Deducir fórmulas del radio, apotema, área y volumen de cada uno de los poliedros regulares en función de su arista.

1869

Uno de los puntos más importantes de la Geometría es el que trata de los poliedros, y no se crea por esto que su conocimiento haya sido fruto de la ciencia, sino que la naturaleza misma, desde su cuna ha manifestado al hombre esos poliedros como quien dice anunciándole las inmensas ventajas y grandes aplicaciones que de su estudio podía reportarse, pues sabido es el sinfín de cristalizaciones que considera la mineralogía. Así es que los naturalistas para darse a entender han concebido seis tipos por medio de los cuales todos los cuerpos cristalizados tienen relación, por ejemplo; la sal común cristaliza en el primer tipo o sea en el sistema cúbico que tiene los tres ejes perpendiculares e iguales entre si; el Rutilo que cristaliza en el segundo o sea en el sistema prismático de base cuadrada teniendo los tres ejes perpendiculares, dos de ellos iguales entre si y el tercero desigual; el Espato de Islandia que cristaliza en el cuarto o sea en el sistema romboídrico teniendo los ejes oblicuos e iguales entre si, etc. etc.

El poliedro fundamental es el tetraedro por medio del cual se ha venido en conocimiento de todos los demás por complicados que sean, así es que suponiendo un poliedro cualquiera no habrá mas que considerar un punto en su interior y trazando por las diferentes aristas y por dicho punto planos quedará el poliedro dividido en varios tetraedros que de su estudio se vendrá en conocimiento del poliedro total.

Otra descomposición pueden sufrir los poliedros concibiendo planos secantes por uno cualquiera de los vértices y por las aristas que no concurran en dicho vértice, y de este modo quedará el poliedro descompuesto en pirámides que tendrán por bases las diferentes caras del mismo, a excepción de las que se reúnen en el vértice común de todas las pirámides, descomponiendo por último éstas, en tetraedros, pues es sabido que toda pirámide se puede descomponer en tetraedros, tendremos por fin una descomposición análoga a la anterior.

Según el tema del discurso no podemos extralimitarnos haciendo un estudio general de todos los poliedros, concretándonos por consiguiente al simple estudio de los poliedros regulares.

No pueden existir nada más que cinco poliedros regulares lo que es fácil de demostrar.

Para demostrar esto, es preciso saber que en todo ángulo poliedro la suma de los ángulos rectilíneos no puede llegar nunca a valer cuatro rectos teniendo que reunir dichos poliedros regulares la condición de que las caras sean polígonos regulares e iguales entre si, y los ángulos diedros iguales, condiciones indispensables para todo poliedro regular.

Así es que no habrá más ahora que consignar con ángulos de triángulo equilátero, cuadrado, etc. y averiguar cuantos podremos sumar entre si para que nos dé ángulo sólido o para que la suma no llegue a cuatro rectos.

Nosotros sabemos por la geometría plana que la fórmula que nos da el valor de un ángulo de un polígono regular de n número de lados es:

$$\text{A} = \frac{2r\left(a-2\right)}{n}$$

el cual dando valores particulares a n tendremos:

Triángulo equilátero-- A= 60º
Cuadrado--- A= 90º
Pentágono-- A=108º
Exágono-- A=120º

Luego como sabemos que no se puede formar ángulo sólido con menos de tres planos, no habrá más que tantear con tres, cuatro o más caras, para ver los poliedros regulares que podrán originarse de este tanteo.

Tres caras constituidas por triángulos equiláteros equivale a 60º 3 3 = 180º. Cantidad menor de cuatro rectos, lo que nos induce a creer en la existencia de un poliedro regular que se llama tetraedro regular compuesto de cuatro triángulos equiláteros e iguales, sus ángulos son triedros, tienen seis aristas y cuatro vértices y el valor de cada uno de sus ángulos diedros es igual a: 70º 319 4306.

Cuatro caras constituidas por triángulos equiláteros dan 60º 3.4 = 240º. Cantidad menor de cuatro rectos, lo que nos dice que también podemos formar poliedro regular, dando esto origen al octaedro terminado por ocho triángulos equiláteros iguales, sus ángulos poliedros están formados por cuatro planos tiene doce aristas y ocho vértices, y el valor de cada uno de sus ángulos diedros es igual a 109º 289 1604.

También se pueden formar ángulos poliedros con *cinco caras* de triángulo equilátero puesto que 60º 3 5 = 300º, cantidad menor de cuatro rectos, lo que da origen al icosaedro terminado por veinte triángulos equiláteros iguales, sus ángulos poliedros están formados por cinco planos, tiene treinta aristas y doce vértices, el valor de cada uno de sus ángulos diedros es igual a 138º 119 2208.

Probando con *seis caras* tendremos 60º 3 6 = 360º, cantidad igual a cuatro rectos. lo que nos indica de que ya no se puede formar ángulo poliedro.

Pasando al *cuadrado* tendremos formando ángulos poliedros de tres caras: 90º 3 3 = 270º. Cantidad menor de cuatro rectos, dando origen al poliedro regular que en este caso se forma, al exaedro compuesto cada ángulo poliedro de tres caras con doce aristas y ocho vértices, el valor de cada uno de sus ángulos diedros es igual a 90º.

Ahora podemos probar con cuatro caras y tendremos 90º 3 4 = 360º, cantidad igual a cuatro rectos, lo que nos dice que ya no se puede formar ángulo poliedro.

Pasando al pentágono empezaremos por tres caras y tendremos 108º 3 3 = 324º, cantidad menor de cuatro rectos, por consiguiente esto nos indica de que ya se puede formar poliedro regular, dando origen al dodecaedro compuesto de doce pentágonos regulares e iguales, tiene treinta aristas y veinte vértices; el valor de cada uno de sus ángulos diedros es igual a 116º 339 5402.

Si suponemos cuatro planos tendremos: 108º 3 4 = 432º. En donde es de ver que es imposible la formación de un poliedro regular.

En cuanto al *exágono*, suponiendo el ángulo sólido más sencillo tendremos 120º 3 3 = 360º, cantidad igual a cuatro rectos, por lo tanto tampoco es posible en este caso la formación de ángulo poliédrico.

De modo que con mucha más razón se dirá de otro polígono de más lados que sea el exágono lo que se ha dicho de este último, así es que en resumen diremos que no puede haber mas poliedros regulares que los que hemos hallado hasta ahora quedando reducidos éstos a los cinco que ya hemos enunciado en el principio esto es: al tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Antes de pasar adelante es de notar la fórmula debida a *Euler* que da la relación que existe en cada uno de los poliedros regulares, entre las aristas, caras y vértices. Esta es:

$$A + 2 = C + V$$

en la que, A representa las aristas, C representa las caras y V representa los vértices.

Las formulas primitivas por medio de las cuales se deducen todas las demás referentes a los poliedros regulares son las que nos dan el valor del radio de la esfera circunscrita en cada una de ellas. Estas formulas son las siguientes:

<u>Tetraedro</u>	<u>Exaedro</u>	<u>Octaedro</u>	<u>Dodecaedro</u>	<u>Icosaedro</u>
$R = \frac{1}{4} L \sqrt{6}$	$R = \frac{1}{2} L \sqrt{3}$	$R = \frac{1}{2} L \sqrt{2}$	$R = \frac{1}{4} L \left(\sqrt{15} + \sqrt{3} \right)$	$R = \frac{1}{4} L \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

La deducción de estas fórmulas se presenta árida, pero, exigiéndolo así el tema del discurso no me cabe otro recurso sino el permitirme la benevolencia del tribunal. Vamos , pues, a desarrollar estas fórmulas.

En cuanto al tetraedro no habrá mas que trazar una perpendicular desde su vértice a la cara opuesta y haciendo lo propio con otro vértice tendremos que el punto de intersección será el centro de la esfera circunscrita al poliedro, siendo el radio de la esfera, el mismo radio oblicuo del poliedro; no me detendré en demostrar como este punto de intersección es el centro de la esfera ni tampoco en hacer ver como este radio es las 3/4 partes de la altura total por ser esto sumamente fácil de deducir.

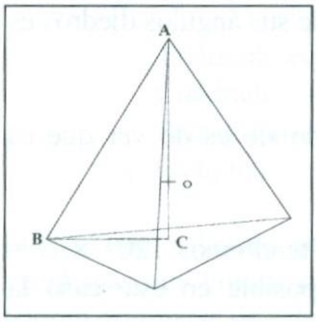


Figura. 1

Mas luego entre la altura del tetraedro, una arista del mismo, junto con la recta que une el centro del triángulo de la base con el extremo de la arista da origen a un triángulo rectángulo que nos dará;

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

Pero <u>BC</u>, por representar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo sabemos que, $BC = \frac{L}{3}\sqrt{3}$.

Luego sustituyendo en la igualdad primera será:

$$AC = L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{2}{3}L^2$$

de donde, $AC = L\sqrt{\frac{2}{3}}$. Mas por lo que hemos dicho anteriormente no habrá más que tomar los 3/4 de este valor para tener el radio que se busca; de donde:

$$R = \frac{3}{4}L\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{18}{3}} = \frac{L}{4}\sqrt{6}$$

A continuación vamos a hallar la fórmula del exaedro

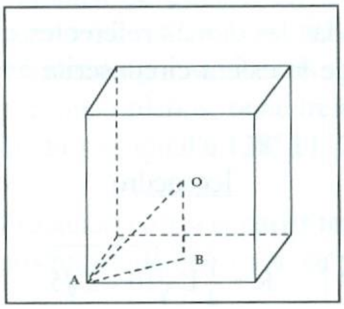


Figura 2ª

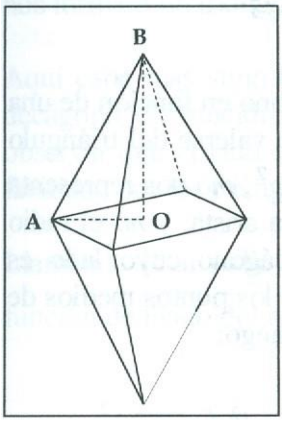
Para esto no habrá más que suponer ya conocido el centro del poliedro, trazar una perpendicular a una de las caras, luego un radio A y unir el pie <u>B</u> de la perpendicular con <u>A</u> y se nos formará un triángulo rectángulo el cual nos dará:

$$AO^2 = AB^2 + BO^2$$

Más como <u>AB</u> representa el radio de la circunferencia circu<u>ns</u> crita al cuadrado tendremos $AB = \frac{L}{2}\sqrt{2}$. <u>BO</u>, como es de ver es mitad de una de las aristas luego:

$$AO^2 = \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4} = \frac{3}{4} L^2 .$$

De donde: $AO = R = \frac{L}{2}\sqrt{2}$, que es la segunda fórmula.



En cuanto al octaedro tenemos que se puede descomponer en dos pirámides de base cuadrada, cuya altura de una de estas pirámides nos dará el radio de la esfera circunscrita al poliedro que es el radio oblicuo del mismo poliedro.

Luego uniendo el pie O base de la pirámide con el punto A tendremos un triángulo rectángulo que nos dará:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2$$

de donde:

$$BO = \sqrt{BA^2 - AO^2} .$$

Dando valores particulares tendremos: $R^2 = L^2 - R^2$ o sea, $2R^2 = L^2$, luego: $R = \frac{L}{\sqrt{2}}$,

multiplicando ambos miembros por $\sqrt{2}$ tendremos: $R = \frac{L\sqrt{2}}{2}$ que será el valor de la tercera formula.

Para encontrar el radio del dodecaedro bastará con poner todos los puntos medios de las diferentes aristas correspondientes a los diferentes pentágonos medios del dodecaedro con respecto la base y luego uniendo estos puntos entre si, nos resultará un decágono, cuyo radio de la circunferencia circunscrita al mismo vendrá expresada por ejemplo sobre la figura, por la recta on , luego uniendo el punto m con o nos formará un triángulo rectángulo en n del cual podremos deducir el valor de om.

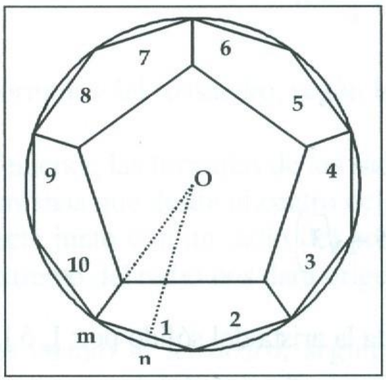


Figura 4ª

Pero ante todo debemos buscar el valor de on en función de una de las aristas.

Por esto nosotros sabemos que el lado del pentágono en función del lado es:

$$l = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

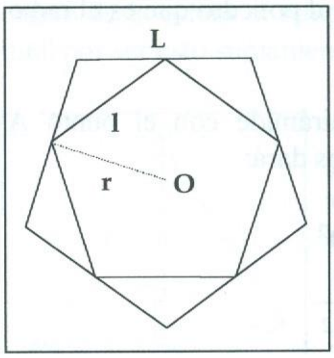
mas este mismo radio r del pentágono cuyo lado es l, es apotema del otro pentágono cuyo lado podemos llamar L, por lo tanto según la geometría plana, sabemos que el apotema en función del lado del pentágono es:

$$r = \frac{1}{10} L \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} ,$$

sustituyendo en la primera fórmula este valor particular, tendremos:

$$l = \frac{1}{2}\frac{1}{10} L \sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{20} L \sqrt{250+100\sqrt{5}-50\sqrt{5}-100} = \frac{1}{20} L \sqrt{150+50\sqrt{5}}$$

$$= \frac{L}{20}\sqrt{6\times 25+2\times 25\sqrt{5}} = \frac{5L}{20}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{L}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$



Teniendo ahora el lado del nuevo pentágono en función de una arista del dodecaedro, no habrá mas que valerse del triángulo anterior el cual nos dará; $mo^2 = mn^2 + no^2$, *mo* nos representa el radio que buscamos, *mn* la mitad de la arista, y *no* el radio de la circunferencia circunscrita al decágono cuyo lado es igual a l o sea la recta que resulta de unir los puntos medios de dos aristas consecutivas según lo dicho, luego:

$$R^2 = \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left[\frac{1}{2}l\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{l^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

sustituyendo en vez de l su valor en función de L tendremos:

$$R^2 = \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{4}\frac{L^2}{16}\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{64}\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}+1\right) = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{64}\left(6+2\sqrt{5}\right)^2$$

$$= \frac{L}{4} + \frac{L^2}{64}\left(36+24\sqrt{5}+20\right) = \frac{4L^2}{16} + \frac{L^2}{16}\left(9+6\sqrt{5}+5\right) = 4\frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{16}\left(14+6\sqrt{5}\right) = \frac{L^2}{16}\left(18+6\sqrt{5}\right)$$

Más la cantidad de dentro del paréntesis se puede considerar como el cuadrado perfecto de $\sqrt{15}+\sqrt{3}$, pues para cerciorarse de esta verdad basta verificar el cuadrado de la suma de estas dos cantidades para ver como sale el valor: $18+6\sqrt{5}$. Luego:

$$R^2 = \frac{L^2}{16}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2$$

de donde llamando l a L tendremos:

$$R = \frac{L}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right) \qquad R = \frac{l}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$$

Valores de la fórmula que se buscaba según venga expresada la arista del sólido por: L ó l.

Por último, para hallar la fórmula correspondiente al Icosaedro no habrá más que valerse de un raciocinio análogo al anterior. Por esto tomando los puntos medios de las diferentes aristas consecutivas que se hallan a la altura media con respecto la base y uniendo entre si todos los puntos resultantes nos dará un decágono, que con el radio de este decágono, media arista, y con la recta que une el extremo de la misma con el centro del poliedro se nos formará un triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el valor que buscamos.

Aquí cabe más simplificación que no en el otro caso pues para la fórmula del radio del decágono en función, no del lado de este sino de una de las aristas del sólido, basta observar que el lado del decágono será mitad de la arista, lo que se puede demostrar con facilidad por los triángulos semejantes que se forman.

Llamando R al radio que se busca, L la arista del poliedro, r el radio del decágono en función del lado del mismo, sabiendo además que $r = \frac{1}{2} l \left(\sqrt{5} + 1 \right)$ tendremos:

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} L \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\, l \left(\sqrt{5} + 1 \right) \right)^2$$

Poniendo l en función de L tendremos:

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} L \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\sqrt{5} + 1 \right) \right)^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16} \left(\sqrt{5} + 1 \right)^2$$

$$R^2 = \frac{4L^2}{16} + \frac{L^2}{16} \left(5 + 2\sqrt{5} + 1 \right) = \frac{4L^2}{16} + \frac{L^2}{16} \left(6 + 2\sqrt{5} \right) = \frac{L^2}{16} \left(10 + 2\sqrt{5} \right)$$

Luego sustituyendo l por L obtendremos:

$$R = \frac{L}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad R = \frac{l}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Fórmulas del Icosaedro, según la arista del sólido venga expresada por l ó L.

Teniendo las fórmulas de los radios fácil será hallar las respectivas a las apotemas, pues no hay mas que desde el centro del poliedro trazar una perpendicular a una de las caras y esta recta junto con un radio del poliedro y otra recta que vaya del pie de la perpendicular al extremo del radio nos dará origen a un triángulo que nos podrá resolver la cuestión.

En cuanto al *tetraedro*, según lo que hemos dicho al tratar de éste, tendremos que el apotema será 1/4 de la altura total, esto es, de la perpendicular trazada desde un vértice a la cara opuesta o sea 1/3 del radio. Así es que siendo $R = \frac{1}{4} L \sqrt{6}$ su valor será:

$$A = \frac{1}{3}\frac{1}{4} L\sqrt{6} = \frac{L}{12}\sqrt{6}$$

En cuanto al *exaedro* fácil es de ver de qué valdrá la mitad de la arista, luego será: $A = \frac{1}{2}L$

Para el *octaedro* tendremos según lo dicho; $A^2 = R^2 - D^2$, siendo A el apotema, R el radio del poliedro, D la distancia del pie del apotema al extremo del radio que será igual al radio r de la circunferencia circunscrita a una de las caras o triángulos que es,

$$r = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

luego:

$$A^2 = \left(\frac{L}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{3} = \frac{L^2}{6}$$

de donde:

$$A = \frac{L}{16} = \frac{L\sqrt{6}}{6}$$

En cuanto al *dodecaedro* procederemos de una manera análoga al caso anterior, solamente que el cateto del triángulo en vez de referirse al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo aquí se referirá a la del pentágono cuya fórmula es:

$$r = \frac{L}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$$

luego

$$A^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \left(\frac{L}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{L}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\right)^2 - \frac{L^2}{100}\left(50+10\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{100L^2}{1600}\left(18+6\sqrt{5}\right) - \frac{16L^2}{1600}\left(50+10\sqrt{5}\right) = \frac{100L^2}{1600}\left(18+6\sqrt{5}\right) - \frac{L^2}{1600}\left(800+160\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{L^2}{1600}\left(1800+600\sqrt{5}-800-160\sqrt{5}\right) = \frac{L^2}{1600}\left(1000+440\sqrt{5}\right) = \frac{L^2}{400}\left(250+110\sqrt{5}\right)$$

luego

$$A = \frac{L}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$$

Por último, del mismo modo procederemos para tener el apotema del *Icosaedro* esto es, nos valdremos de la fórmula general $A^2 = R^2 - r^2$. mas en este caso r nos representa el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyo valor es:

$$r = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

R representa lo que ya se sabe, de modo que tendremos:

$$A^2 = \frac{L^2}{16}\left(10 + 2\sqrt{5}\right) - \frac{L^2}{3} = \frac{L^2}{48}\left(30 + 6\sqrt{5}\right) - \frac{16L^2}{48} = \frac{L^2}{48}\left(14 + 6\sqrt{5}\right)$$

Multiplicando ambos términos por 3 para que el denominador tenga luego raíz cuadrada exacta tendremos:

$$A^2 = \frac{L^2}{144}\left(42 + 18\sqrt{5}\right)$$

mas la cantidad de dentro del paréntesis se puede expresar por el cuadrado exacto de: $\sqrt{15} + 3\sqrt{3}$, luego será:

$$A = \frac{L}{12}\sqrt{\left(\sqrt{15} + 3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{L}{12}\left(\sqrt{15 + 3\sqrt{3}}\right)$$

fórmula última de las apotemas.

Teniendo las fórmulas de los radios de los poliedros en función de las aristas, de una manera sencilla hallaremos las aristas en función de los radios, pues no habrá mas que despejar en las diferentes fórmulas halladas el valor de L, teniendo en cuenta que conviene siempre que el denominador sea una cantidad racional.

Para el *tetraedro* hemos hallado: $R = \frac{1}{4}L\sqrt{6}$, luego:

$$L = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{4R\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$$

Para el *exaedro* hemos obtenido: $R = \frac{L}{2}\sqrt{3}$, luego:

$$L = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

En cuanto al *Octaedro* sabemos que: $R = \frac{1}{2} L \sqrt{2}$, luego:

$$L = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

Para el *Dodecaedro* tenemos: $R = \frac{1}{4} L \left(\sqrt{15} + \sqrt{3} \right)$, aplicando el cálculo será:

$$\frac{4R}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = L$$

fundándonos en aquel principio que dice que la suma multiplicada por la diferencia de dos cantidades es igual a la diferencia de los cuadrados de las mismas cantidades, tendremos, pues, aplicando este principio en la última fórmula, el denominador se convertirá en racional,

$$L = \frac{4R\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)} = \frac{4R\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{15 - 3} = \frac{4R}{12}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = \frac{R}{3}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)$$

Por último en cuanto al *Icosaedro* tendremos: $R = \frac{1}{4} L \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, luego:

$$L = \frac{4R}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

multiplicando ambos términos del cuadrado por $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ será:

$$L = \frac{4R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}}$$

Ahora para quitar la $\sqrt{5}$ del denominador nos valdremos del mismo principio del dodecaedro y tendremos:

$$L=\frac{4R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}=\frac{4R\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(10-2\sqrt{5}\right)}{100-20}=\frac{4R\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{\left(10-2\sqrt{5}\right)^2}}{80}=$$

$$=\frac{4R\sqrt{1200+240\sqrt{5}-400\sqrt{5}-400}}{80}=\frac{4R}{80}\sqrt{800-160\sqrt{5}}=\frac{4R}{80}\sqrt{16\times 50-16\times 10\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{16R}{80}\sqrt{50-10\sqrt{5}}=\frac{R}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

fórmula pedida.

Vista esta parte podremos inmediatamente pasar a estudiar las superficies o áreas de los poliedros.

Para esto basta hallar el área de una de las caras en función de un lado según la geometría plana, la que por falta de tiempo no nos detendremos a buscar su origen a más de que ya se debe suponer conocido todo lo que se refiere a dicha parte de la geometría, luego, multiplicando el valor de esta cara por el número de ellas que contenga el poliedro, nos dará el resultado de la superficie total.

Así es que para el *tetraedro* tendremos:
Superficie del triángulo en función del lado $\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}$, luego:

$$S=4\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}=L^2\sqrt{3}$$

Para el *exaedro* tendremos:
Superficie del cuadrado en función del lado L^2, luego:

$$S=6L^2$$

Para el *octaedro* tendremos:
Superficie del triángulo en función del lado $\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}$, luego:

$$S=8\frac{L^2}{4}\sqrt{3}=2L^2\sqrt{3}$$

Para el *Dodecaedro* tendremos:
Superficie del pentágono en función del lado $\frac{L^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$, luego:

$$S=12\frac{L^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=3L^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Por último tendremos para el *Icosaedro*:
Superficie del triángulo en función del lado $\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}$, luego:

$$S = 20\frac{L^2}{4}\sqrt{3} = 5L^2\sqrt{3}$$

Estas mismas fórmulas de las superficies, en vez de hallarlas en función de la arista también se podrían hallar en función del radio; para esto no habrá mas que, en las fórmulas anteriores, poner en vez del lado las fórmulas que hemos ya hallado del lado en función del radio.

Para el *tetraedro* hemos hallado $S = L^2\sqrt{3}$ a más $L = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$, luego:

$$S = \frac{4}{9}R^2 6\sqrt{3} = \frac{24}{9}R^2\sqrt{3} = \frac{8}{3}R^2\sqrt{3}$$

Para el *exaedro* sabemos que $S = 6L^2$ más $L = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$, luego:

$$S = 6\frac{4}{9}R^2 \times 3 = \frac{72}{9}R^2 = 8R^2$$

En cuanto al *Octaedro* se tiene $S = 2L^2\sqrt{3}$ para $L = R\sqrt{2}$, luego:

$$S = 2R^2 \times 2\sqrt{3} = 4R^2\sqrt{3}$$

En cuanto al *Dodecaedro* sabemos que $S = 3L^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ más $L = \frac{1}{3}R\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$, luego:

$$S = 3\frac{R^2}{9}\left(18-6\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{R^2}{3}\sqrt{\left(18-6\sqrt{5}\right)^2\left(25+10\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{R^2}{3}\sqrt{\left(504-216\sqrt{5}\right)\left(25+10\sqrt{5}\right)} = \frac{R^2}{3}\sqrt{1800-360\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{3}\sqrt{36\times 50-36\times 10\sqrt{5}} = \frac{6R^2}{3}\sqrt{50-10\sqrt{5}} = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

Por último para el *Icosaedro* sabemos qué $S = 5L^2\sqrt{3}$ pero $L = \frac{1}{5}R\sqrt{50-10\sqrt{5}}$, luego:

$$S = \frac{5R^2}{25}\left(50-10\sqrt{5}\right)\sqrt{3} = \frac{R^2}{25}\left(250-50\sqrt{5}\right)\sqrt{3} = \frac{R^2}{25}\left(5\times 50-50\sqrt{5}\right)\sqrt{3} =$$

$$= \frac{50R^2}{25}\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{3} = 2R^2\left(5\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$$

fórmula pedida.

Para acabar las fórmulas que pide el tema del discurso nos falta tratar de los volúmenes de los poliedros en función de una de sus aristas.

Para resolver este punto bastará saber que el volumen de todo poliedro está dado por la suma de los volúmenes de diferentes pirámides que cada uno de ellos tiene por base cada una de las caras del poliedro, por altura la apotema del mismo sólido y que hay tantos de ellos como caras tiene el poliedro, de modo que podremos dar la regla general para hallar el volumen de todo poliedro regular cual es; Multiplicar la superficie total por el tercio del apotema y el producto será el volumen resultante. Hay que advertir que según las fórmulas halladas podemos hallar los volúmenes de estos cuerpos geométricos no tan solo en función del lado si que también en función del radio; como vamos a ver.

Para el *tetraedro*:

Superficie: $L^2\sqrt{3}$, Apotema: $\frac{L}{12}\sqrt{6}$, luego: $V = \frac{L^2}{3}\sqrt{3}\times\frac{L}{12}\sqrt{6} = \frac{L^3}{36}\sqrt{18} = \frac{L^3}{12}\sqrt{2}$.
pero: $L = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$, de donde:

$$V = \frac{8}{27}R^3 6\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{48}{324}R^3\sqrt{12} = \frac{48.2}{324}R^3\sqrt{3} = \frac{96}{324}R^3\sqrt{3} = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$$

En cuanto al *exaedro* sabemos que: Superficie: $6L^2$, Apotema: $\frac{1}{2}L$, luego:

$$V = 6L^2\times\frac{1}{6}L = L^3$$

mas, $L = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$, de donde:

$$V = \frac{8}{27}R^3\times 3\sqrt{3} = \frac{24}{27}R^3\sqrt{3} = \frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$$

Pasando al *Octaedro* será: Superficie: $2L^2\sqrt{3}$, Apotema: $\frac{1}{2}L\sqrt{6}$, luego:

$$V = 2L^2\sqrt{3}\times\frac{1}{18}L\sqrt{6} = \frac{2.3L^3}{18}\sqrt{2} = \frac{L^3}{3}\sqrt{2}$$

pero como: $L = R\sqrt{2}$, tendremos:

$$V = \frac{R^3\times 2\times\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}R^3$$

Pasando al dodecaedro vamos a hacer ver como habríamos podido hallar todas las fórmulas que nos dan los volúmenes de los poliedros regulares valiéndonos de las fórmulas que nos dan la superficie de los mismos, no en función del lado, como lo hemos hecho en todos los casos anteriores, sino cuando están dadas en función del radio, así es que demostrado por este caso quedará demostrado por todos los demás.

Nosotros sabemos que la superficie del dodecaedro es igual a: $2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}}$, siendo el valor de la apotema:

$$A = \frac{1}{20}L\sqrt{250+110\sqrt{5}}$$

luego:

$$V = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}}\times\frac{1}{60}L\sqrt{250+110\sqrt{5}}$$

mas como: $L = \frac{1}{3}R\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$, sustituyendo será:

$$V = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}}\times\frac{1}{60}\frac{1}{3}R\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\sqrt{250+110\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^3}{90}\sqrt{50-10\sqrt{5}}\sqrt{250+110\sqrt{5}}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$$

mas tenemos que:

$$\sqrt{15}-\sqrt{3} = \sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{18-6\sqrt{5}},$$

luego:

$$V = \frac{R^3}{90}\sqrt{7000+3000\sqrt{5}}\sqrt{18-6\sqrt{5}} = \frac{R^3}{90}\sqrt{\left(7000+3000\sqrt{5}\right)\left(18-6\sqrt{5}\right)} = \frac{R^3}{90}\sqrt{36000+12000\sqrt{5}}$$

$$= \frac{R^3}{90}\sqrt{400\times 90+400\times 30\sqrt{5}} = \frac{20}{90}R^3\sqrt{90+30\sqrt{5}} = \frac{2}{9}R^3\sqrt{90+30\sqrt{5}}$$

fórmula pedida.

Para concluir nos falta hallar la fórmula del *Icosaedro* y sabemos que la superficie es igual a $S = 5L^2\sqrt{3}$, Apotegma: $\frac{L}{12}\left(\sqrt{15}+3\sqrt{3}\right)$, luego:

$$V = 5L^2\sqrt{3}\times\frac{L}{36}\left(\sqrt{15}+3\sqrt{3}\right) = \frac{5}{36}L^3\left(\sqrt{45}+9\right)$$

mas como $L = \frac{1}{5}R\sqrt{50-10\sqrt{5}}$, luego:

$$V = \frac{5}{36}\frac{R^3}{125}\sqrt{\left(50-10\sqrt{5}\right)^3}\times\left(\sqrt{45}+9\right) = \frac{R^3}{36.25}\sqrt{\left(50-10\sqrt{5}\right)^3}\times\sqrt{\left(\sqrt{45}+9\right)^2} =$$

$$= \frac{R^3}{900}\sqrt{\left(125000-75000\sqrt{5}+75000-5000\sqrt{5}\right)}\sqrt{\left(45+54\sqrt{5}+81\right)} =$$

$$= \frac{R^3}{900}\sqrt{\left(200.000-80.000\sqrt{5}\right)\times\left(126+54\sqrt{5}\right)} = \frac{R^3}{900}\sqrt{3.600.000+720.000\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^3}{900}\sqrt{360000\times 10+360000\times 2\sqrt{5}} = \frac{600}{900}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Ultima fórmula.

Aquí damos fin a todas las fórmulas que se pueden presentar referentes a los poliedros regulares.

Varias son las aplicaciones que se pueden originar de las fórmulas estudiadas. Así por ejemplo: conocida la superficie de una de las caras de un poliedro regular hallar otro diferente, equivalente al primero, deduciendo a más de este último el valor del radio, apotema y volumen del mismo sólido.

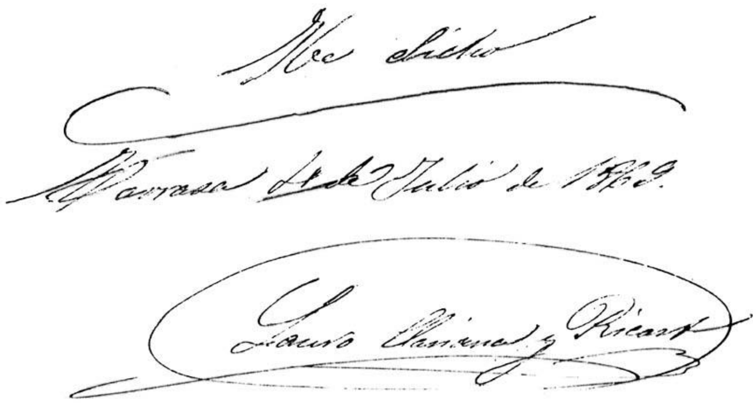
Para esto supongamos dada la cara del Octaedro, para transformar este poliedro en un Dodecaedro de superficie equivalente, no habrá más que multiplicar la cara del triángulo dada del octaedro por ocho para tener la superficie total, más como esta superficie ha de ser equivalente a la del Dodecaedro, será preciso igualar el valor hallado con el valor de la superficie de éste, que está dado en función del lado, por la fórmula:

$$S = 3L^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

deduciendo de ésta igualdad el valor de L; una vez conocido este valor, con facilidad hallaremos el del radio, apotema y volumen del mismo por las fórmulas que ya llevamos estudiadas.

Otras combinaciones se podrían hacer para resolver diferentes problemas referentes a los poliedros regulares, lo que no me detendré a desarrollar tanto por ser de fácil deducción, como también porque supongo que cuando habré llegado a este punto habrá pasado casi el tiempo necesario para la lectura del discurso.

Esperando que pues de este modo haya satisfecho los deseos de las personas que han tenido la amabilidad de escucharme y sobre todo de aquellas que han de ser censoras de este pequeño trabajo,


He dicho
Tarrasa 2 de Julio de 1869.
Lauro Clariana y Ricart

Oposición a Cátedra

Año: 1869

Institutos de 3ª Clase de Albacete y Lorca

Cátedra: Matemáticas

Memoria: Deducir fórmulas del radio, apotema, área y volumen de cada uno de los poliedros regulares en función de su arista.

Legajo: 5489-6. Archivo Educación.- Alcalá de Henares.