1869

Teoría de las líneas proporcionales

1869

Antes de desarrollar la teoría de las líneas proporcionales, prudente será el averiguar en donde radica el origen de esta teoría para su mayor inteligencia.

Nada o muy poco habrían adelantado la mayor parte de las ciencias, a no ser por el auxilio de la Aritmética puesto que ésta ha servido, podemos decir, de hincapié a muchas cuestiones que de otro modo se habrían hecho insuperables a la inteligencia humana; empero no por esto habrían adquirido aquellas el vuelo y desarrollo que han alcanzado hoy día si nos hubiésemos concretado al simple estudio de la Aritmética, pues su lenguaje concreto, largo y complicado, no deja de ser inútil o de poca utilidad en un sinfín de casos: así es que el hombre no cejó hasta tanto que halló otros medios para dar a las cuestiones otro carácter mas claro, mas sencillo, mas general, apelando para la consecución de su objetivo, primero a la Geometría para luego venir en conocimiento del Algebra que considera la cantidad en su mayor grado de generalidad, prescindiendo de si ésta es continua o discreta.

No es de dudar que el paso que se dio de la Aritmética a la Geometría fue debido a la sustitución de un espacio limitado o sea una extensión cualquiera, ya sea volumen, superficie o línea en vez de la unidad numérica, presentándose esta nueva unidad bajo otro carácter más general, que la Aritmética; por lo tanto muchas cuestiones pueden presentar cierta claridad que no es posible en la Aritmética, como sucede por ejemplo en las propiedades de los quebrados, a más de poder variar la cantidad que se tome por unidad típica hasta el infinito.

Así es que por medio de estas extensiones se puede operar de una manera análoga a la Aritmética, pudiéndose versificar todas las operaciones que se refieren al cálculo aritmético. Sin embargo la Geometría no habría dejado de quedar muy rezagada, si se hubiera concretado al cálculo aritmético, y de ninguna manera habrían brotado los ópimos frutos de que se hace acreedora, si el hombre no hubiese intentado buscar las relaciones que podían existir entre las proporciones aritméticas y geométricas, sirviendo esta proporcionalidad Geométrica de base, como es de ver, a la mayor parte de teoremas y corolarios que la Geometría estudia.

Nosotros tan solo trataremos de la proporcionalidad de las líneas, por no extralimitarnos, de lo que exige el tema del discurso, empezando a estudiar la línea recta, pues esta línea tiene ventaja sobre todas las demás, de no menester condición alguna para su homogeneidad, pues ya sabemos que todas las líneas rectas son homogéneas, esto es, no admiten variedad de especies.

Se dice que cuatro líneas pueden formar proporción, cuando la razón que existe entre dos de ellas es igual a la razón de las otras dos, empero ténganse aquí presente la diferencia que existe entre una proporción numérica y otra geométrica; en la primera los cuatro términos de la proporción se refieren a una misma unidad, mientras que en la geométrica lo mas general es referirse dos a dos de sus términos a unidades distintas.

Para formarse idea de esta condición última basta recordar el teorema fundamental de la proporcionalidad de las líneas rectas que dice:

«*Si en el lado de un ángulo se toman partes iguales y por los puntos de división se trazan rectas paralelas que vayan a cortar el otro lado, éste también quedará dividido en partes iguales entre si, pero no iguales en general a las divisiones del otro lado*»

de donde se deduce que por cierto número de partes iguales del primer lado igual número de partes le corresponderá al segundo, constituyendo esto, lo que se llama razón geométrica, evidenciándonos al propio tiempo, esto mismo, que la unidad por uno y por otro lado del ángulo será desigual, excepto el caso de formar triángulos isósceles, las rectas paralelas que se trazan por los puntos de división con los lados del ángulo.

Como consecuencia de este teorema se deduce que si en un trapecio se traza una recta paralela a las bases, divide a los lados no paralelos en partes proporcionales.

Para demostrar esto, bastará prolongar los lados no paralelos hasta encontrarse y nos resultará un ángulo con las condiciones anteriores, por dicho medio de los cuales se deduce con facilidad el teorema antedicho.

Del propio modo tenemos que: «*Si en un triángulo cualquiera se corta por una recta paralela a un lado, quedarán los otros dos lados, divididos en partes proporcionales*»

Estos teoremas y otros análogos son sin disputa los que sirven de base para las figuras semejantes por ser la proporcionalidad de las líneas homólogas una de las condiciones de dichas figuras, por lo tanto, más o menos, este estudio atañe a nuestro discurso, empero no siendo posible desarrollar esta parte tal como sería de desear, prudente a lo menos será el presentar aquí todos aquellos teoremas que se deducen de las figuras semejantes y que mas aplicaciones pueden presentar en el transcurso de la Geometría.

Por medio de los triángulos semejantes que resultan de trazar una perpendicular desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo a la hipotenusa, se deducen varias consecuencias de mucha utilidad y entre ellas el famoso teorema de *Pitágoras*, cual dice: «*Que la hipotenusa de todo triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos*; este teorema se puede hacer extensivo al caso de considerar el ángulo opuesto al lado que se busca, agudo u obtuso, tan solo añadiendo o quitando de la suma del cuadrado de los otros dos lados el duplo de uno de estos por la proyección del otro sobre este.

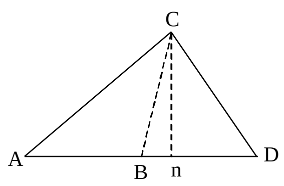


Figura nº 1

Estas propiedades sirven para demostrar, como en todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercer lado, más el duplo del cuadrado de la recta que junta el punto medio de este lado con el vértice opuesto. Para demostrar esto bastará considerar en el triángulo dado (figura nº 1) la recta que pasa por el vértice y el punto medio del lado opuesto, para tener dos triángulos, uno obtusángulo y otro acutángulo, cuyos ángulos son opuestos a la suma de los cuadrados de los lados que se buscan, de modo que aplicando en estos dos triángulos los dos últimos teoremas mencionados, no habrá más luego que, sumar y simplificar las dos igualdades que resultaran para comprender la verdad de este teorema.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.Bn$$

$$CD^2 = CB^2 + BD^2 - 2BD.Bn$$

$$AB = BD$$

$$AC^2 + CD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

Como a corolario del teorema anterior se puede decir que, en todo paralelógramo, la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

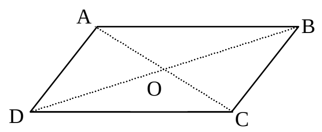


Figura nº 2

Concibiendo el paralelógramo (figura nº 2) y trazando las diagonales respectivas, tendremos que se formarán dos triángulos con las condiciones anteriores, esto es, de tener cada uno de ellos, una recta que pasará por el vértice y el punto medio del lado opuesto, representando ésta, por una de las diagonales, siendo la base del triángulo, la otra diagonal; se explica esto perfectamente por lo que sabemos de que las diagonales en todo paralelógramo se cortan por mitad; de donde aplicando los principios anteriores a cada uno de esos triángulos, sumando y multiplicando las dos igualdades resultantes nos dará a conocer la verdad de este teorema o corolario.

$$AB^2 + BC^2 = 2AO^2 + 2OB^2$$

$$AD^2 + DC^2 = 2AO^2 + 2BO^2$$

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 = 4AO^2 + 4DO^2 = AC^2 + DB^2 = D^2 + O'^2$$

Con mas generalidad podremos decir que: en todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la recta que junta los puntos medios de las mismas diagonales.

Para demostrar este teorema, basta tirar las diagonales (figura 3), tomar el punto medio de una de ellas, uniéndolo con los vértices opuestos del cuadrilátero, nos resultarán dos triángulos, con condiciones para poder aplicar los principios anteriores, luego sumando las dos igualdades resultantes, nos dará un valor tal que se podrá sustituir por otro, puesto que, uniendo el punto medio de la primera diagonal con el punto medio de la segunda, nos resultará un tercer triángulo que podrá simplificar el resultado y ponernos en evidencia esta última verdad.

Vistos los principales teoremas y corolarios que se deducen de la línea recta, podremos pasar a estudiar las propiedades de proporcionalidad que se deducen, cuando ésta, se considera situada en la circunferencia.

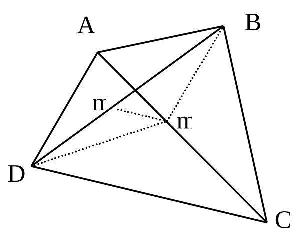


Figura nº 3

Si desde un punto cualquiera de la circunferencia se traza una perpendicular sobre el diámetro y desde el mismo punto se trazan cuerdas a los extremos de éste, se verifica que: La perpendicular es media proporcional entre los segmentos del diámetro. Cada una de las cuerdas es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente. Los cuadrados de las cuerdas son proporcionales a los segmentos del diámetro. El cuadrado del diámetro es igual a la suma de los cuadrados de las cuerdas. Estas proposiciones se deducen con facilidad, teniendo presente que el triángulo que se forma uniendo un punto cualquiera de la circunferencia con los extremos de un diámetro, es rectángulo, fundados en aquel principio de que la medida de todo ángulo inscrito, es la mitad del arco que abrazan sus lados, luego siendo este arco, media circunferencia, el ángulo inscrito correspondiente debe ser un ángulo recto y en consecuencia el triángulo rectángulo, siendo por consiguiente aplicable aquí, todas las consecuencias que se deducen de los triángulos rectángulos semejantes que resultan de bajar una perpendicular desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo a la hipotenusa, tan solo modificando ciertas palabras, esto es, la de la hipotenusa en diámetro y la de los catetos en cuerdas.

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=2\mathrm{Am}^2+2\mathrm{Bm}^2$$

$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2=2\mathrm{Am}^2+2\mathrm{mD}^2$$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2=4\mathrm{Am}^2+2\left[\mathrm{Bm}^2+\mathrm{mD}^2\right]=\mathrm{AC}^2+2\left[\mathrm{Bm}^2+\mathrm{mD}^2\right]$$

$$\mathrm{Bm}^2+\mathrm{mD}^2=2Dn^2+2nm^2$$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2=\mathrm{AC}^2+2\left[2\mathrm{Dn}^2+2\mathrm{nm}^2\right]=\mathrm{AC}^2+\mathrm{DB}^2+4\mathrm{nm}^2$$

Si dos cuerdas se cortan dentro de una circunferencia, las partes de la una son recíprocamente proporcionales a las partes de la otra.

Para demostrar esto basta comparar los triángulos semejantes que resultan de unir por rectas los extremos de las cuerdas.

Si desde un punto fuera de una circunferencia se trazan dos secantes que terminen en los segundos puntos de intersección, dichas secantes y sus segmentos externos son recíprocamente proporcionales.

Esto se demuestra trazando las cuerdas cruzadas, correspondientes a los puntos de intersección de las secantes con la circunferencia, deduciéndose de la comparación de los dos triángulos semejantes que se forman, la verdad antes enunciada.

Si desde un punto fuera de una circunferencia se traza una tangente y una secante que termine la primera en el punto de tangencia, y la segunda, en el segundo punto de contacto, la tangente es media proporcional entre la secante y el segmento externo de la misma secante.

Este principio es, fácil de deducir, si se recuerda que la tangente no es otra cosa sino el límite de las secantes, de modo que, aplicando el principio anterior bajo el supuesto de que dos de los puntos de contacto se haya confundido en uno solo se deducirá esta última propiedad.

Sin embargo se puede demostrar este principio directamente, suponiendo las dos cuerdas que se deducen de unir los puntos de intersección de la secante, con el punto de tangencia, comparando luego los triángulos semejantes que se originen.

De todo lo que antecede se deduce que si por un punto cualquiera trazamos una recta que corte a una circunferencia, el producto de las distancias desde este punto a los dos de intersección es constante, lo que de una manera mas general podremos enunciar diciendo: «*El producto de los segmentos aditivos o sustractivos de una cuerda es constante*»

De los principios anteriores se deduce un medio para dividir una recta en media y extrema razón, recibiendo el nombre de tal, toda recta que está dividida por un punto intermedio en dos partes tales, que, la mayor es media proporcional entre toda la recta y la parte menor de la misma.

Para esto no hay mas que levantar al extremo de la recta, una perpendicular igual a la mitad de la recta, describiendo luego una circunferencia con un radio igual a esta última recta, trázase luego desde el otro extremo de la recta una secante que pase por el centro de la circunferencia, y no habrá mas que trasladar el segmento externo de la secante sobre la recta para tener el punto que dividirá a la recta dada en media y extrema razón.

Esta construcción se funda en aquella proposición que ya hemos demostrado que dice que, la tangente que termina en el punto de tangencia es media proporcional entre la secante que termina en el segundo punto de contacto y el segmento externo de la misma

Como a consecuencia de estos principios se deducen varias propiedades referentes a los ejes radicales, el cual creo prudente dar una ligera idea.

Llámese potencia de un punto, relativamente a una circunferencia, el producto constante de los segmentos aditivos o sustractivos que forma este punto sobre toda cuerda que le contiene.

Así es que el lugar geométrico de todos los puntos de igual potencia, con relación a dos circunferencias, es una perpendicular a la línea de los centros, y recibiendo el nombre de eje radical. Este eje contiene todos los puntos desde donde se verifica que todas las tangentes trazadas a ambas circunferencias son iguales entre si.

Para hallar en general el punto sobre la línea de los centros, que ha de servir de base al eje radical, es preciso saber que la diferencia de los cuadrados de las distancias de los centros de las circunferencias al punto intermedio, es igual a la diferencia de los cuadrados de los radios.

Estas condiciones son de fácil deducción en vista de los triángulos rectángulos que se originan, uniendo un punto cualquiera del eje radical con los centros de las circunferencias junto con las tangentes, en el supuesto de ser estos iguales.

Bajo este punto de vista, fácil es determinar una fórmula que nos de directamente sobre la línea de los centros, el punto correspondiente al eje radical.

Esta fórmula se deduce del valor de la suma y diferencia de los dos segmentos de la línea de los centros, determinados por el punto donde el eje radical corta a esta línea, siendo el valor de esta fórmula, o sea la distancia que se deduce, por ejemplo, desde el centro de la circunferencia mayor, igual, a la mitad de la línea de los centros mas la mitad de una tercera proporcional entre la línea de los centros y la recta, que forma los medios de la proporción, representado por el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa representa el radio mayor de las dos circunferencias, y el cateto conocido, el otro radio.

En ciertos casos se simplifica esta regla, por ejemplo, cuando las circunferencias son exteriores, en este caso no hay mas que trazar una tangente común a las dos circunferencias, tomando luego el punto medio de la parte de tangente comprendida por los dos puntos de contacto, el punto hallado tendrá que ser por precisión un punto del eje radical, a mas como este eje ha de ser perpendicular a la línea de los centros, tendremos determinada la posición de esta recta, trazando desde el punto hallado una perpendicular a la línea de los centros.

Cuando las circunferencias son secantes, es de ver que, los puntos de contacto de dichas circunferencias cumplirán con la condición de hallarse en la relación de la diferencia de los cuadrados de los radios, de modo que dos puntos de contacto han de corresponder al eje radical, y como dos puntos determinan la posición de una línea recta, podremos decir en conclusión que, el eje radical en este caso viene determinado por la cuerda común de las dos circunferencias.

Si las dos circunferencias son tangentes exterior o interiormente, el eje radical se confunde con la tangente común a las dos circunferencias.

Cuando las dos circunferencias son interiores, sin tener ningún punto de contacto, es preciso recurrir a la fórmula general que ya hemos indicado, para hallar la posición del eje radical, en el cual es de ver que éste, se separará mas y mas del centro de la primera circunferencia a medida que la distancia de los centros se haga menor, de modo que cuando esta distancia se haya reducido a cero, el eje radical se hallará en el infinito, demostrándonos esto que, las circunferencias concéntricas carecen de eje radical.

Si las circunferencias son iguales, el eje radical se halla en el punto medio de la línea de los centros, lo que es muy natural, pues hemos visto que la fórmula que nos determina la posición de dicha recta, depende de los términos reduciéndose a cero el segundo, por la hipótesis anterior, quedando tan solo el primero que es igual a la mitad de la línea de los centros.

Ahora con facilidad se comprenderá lo que se entiende por centro radical. Se entiende por centro radical el punto que resulta de la intersección de varios ejes radicales, así es que si se tienen tres circunferencias situadas en un mismo plano, no teniendo los centros en una misma recta, dan por su combinación dos a dos, tres ejes radicales que se cortarán en un mismo punto llamado centro radical, lo que es fácil de hallar por medio de las cuerdas comunes; hay que advertir aquí, que, si el centro radical es exterior a las circunferencias, las seis tangentes que se podrán trazar desde dicho punto a las tres circunferencias dadas serán iguales entre si.

Así podríamos continuar presentando infinitos teoremas y propiedades tanto de las líneas rectas, como de las circunferencias enlazadas con las rectas, que todos tendrían por base la proporcionalidad de las líneas, pero de todos modos con las que hemos manifestado, no dudo de que se podrá venir en conocimiento de la importancia de dicho punto.

Ya hemos visto de una manera general, la relación que existe entre la Aritmética y la Geometría, en el principio del Discurso, ahora falta ver como se realiza este paso en virtud de los teoremas antes explicados. No hablaremos ni de las sumas, ni restas, ni multiplicaciones, pues tanto por su sencillez, como por no corresponder al punto, lo pasaré por alto, empezando el estudio por la comparación. En la Aritmética sabemos que un término extremo de una proporción directa es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo; aquí de una manera análoga diremos que, el valor de una línea que forma el extremo de una proporción discreta es igual al producto de las dos líneas del medio dividido por la del otro extremo, constituyendo esto en términos geométricos, una cuarta proporcional.

Si buscando el mismo término extremo diera la casualidad que los medios de la proporción fueran iguales, diríamos que un extremo es igual al cuadrado del término medio divido por el otro extremo, formando esto en términos geométricos una tercera proporcional, y por último si se busca la línea media de una proporción continua, diremos de una manera semejante a la Aritmética de que es igual a la raíz cuadrada del producto de las otras dos líneas constituyendo esto lo que se llama una media proporcional.

Hay algunas fórmulas o valores que a simple vista, parece imposible el poder aplicar a los teoremas anteriores, o el que sea aplicable a la Geometría, sin embargo, mediante alguna transformación se verá como se pueden resolver geométricamente.

Sea por ejemplo, cuando se tiene una cantidad dividida por otra; en este caso se puede multiplicar el numerador del quebrado por *uno* sin que varíe el valor del cociente y tendremos que bajo esta forma la cantidad se podrá hallar por medio de una cuarta proporcional.

Del mismo modo cuando se tiene que extraer la raíz cuadrada de cierta cantidad, multiplicando la cantidad subradical por *uno* podremos hallar su valor por medio de una media proporcional, o también transformando la cantidad subradical en la suma del cuadrado de dos cantidades para poder aplicar luego el teorema de Pitágoras.

Por estos medios se resuelven problemas numéricos, bastante complicados, pero ante todo conviene saber que clase de extensión nos representará una cantidad numérica o literal cualquiera; según lo visto tenemos que cuando el valor que se busca es una línea y está dada por un quebrado, contiene el numerador de éste, una dimensión mas que el denominador; cuando la línea está dada por una raíz, hay tantas dimensiones en la cantidad subradical, como unidades tiene el índice del mismo; de donde se puede deducir una regla muy sencilla, algún tanto relacionada con los logaritmos, y es que para tener las dimensiones resultantes de una fórmula y por consiguiente saber si se refiere a un volumen, superficie o línea, según salgan tres, dos o una dimensión, bastará en el primer caso, restar el grado del denominador, del correspondiente al numerador; y en el segundo bastará dividir el grado de la cantidad subradical por el índice del mismo.

Téngase presente, antes de pasar adelante, que la proporcionalidad que hemos visto que podía existir entre cuatro rectas, se puede hacer extensiva a líneas cualesquiera, mientras exista homogeneidad entre ellas, lo que es bastante difícil cuando se trata de una línea cualquiera, mas no sucede así, cuando se trata de la circunferencia, puesto que basta para el caso, de que las circunferencias estén trazadas con el mismo radio.

Algunos teoremas y corolarios de la Geometría y sobre todo la mayor parte de los pertenecientes a las líneas proporcionales, tienen por fundamento el estudio de las transversales cuya teoría vamos a desarrollar para que se tenga idea de una de las partes de la Geometría que está bastante descuidada sin razón plausible y que es de mucha utilidad.

Se entiende por transversal toda recta que tiene la propiedad de cortar a los tres lados de un triángulo.

El teorema primero que se deduce del estudio de las transversales es que, toda transversal determina en los tres lados de un triángulo o en sus prolongaciones, seis segmentos tales que, el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

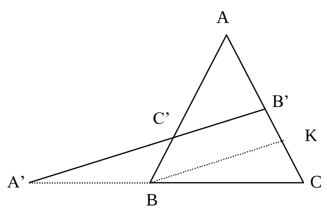


Figura nº 4

Para demostrar esto no hay mas que trazar desde un vértice, una recta paralela a la transversal, resultando dos triángulos semejantes (figura 4) por tener dos lados paralelos, del mismo modo resulta por la parte opuesta otros dos triángulos semejantes, que nos darán dos proporciones, deducidas de la comparación de sus lados o rectas homólogas, las cuales multiplicadas y simplificadas entre si, nos darán una igualdad final que nos demostrará el teorema.

$$A'B'C',\ BKC,\ A'C : A'B :: CB' : B'K$$
$$BAK,\ C'AB',\ BC' : C'A :: KB' : B'A$$
$$A'C \times B'K = A'B \times CB'$$
$$BC' \times B'A = C'A \times KB'$$
$$A'C.B'K.BC'.B'A = A'B.CB'.C'A.KB'$$
$$A'C.B'C.B'A = A'B.CB'.C'A$$

Recíprocamente, tendremos que hallándose distribuidos sobre los tres lados de un triángulo o sobre sus prolongaciones, tres puntos que den seis segmentos, habiendo no mas que un solo punto en cada recta y que el número de puntos situados en los lados sea par, si el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres, los tres puntos están en línea recta.

Esto se puede demostrar como todos los teoremas recíprocos o indirectos, esto es, destruyendo la conclusión y haciendo ver en el absurdo en que se cae según el teorema directo, indicándonos esto a admitir por consiguiente la conclusión del teorema recíproco como a verdadero.

Otra cuestión importante existe en el estudio de las transversales, cual es que, tres rectas trazadas desde los vértices de un triángulo a un mismo punto interior o exterior al triángulo, determinan en los lados opuestos seis segmentos tales que, el producto de los tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

Para demostrar esto, basta considerar dos triángulos que se formarán según estas rectas interiores cortados cada uno de ellos respectivamente por una transversal y aplicando el teorema anterior, multiplicando y simplificando luego las igualdades que salgan nos dará la verdad del teorema (figura 5).

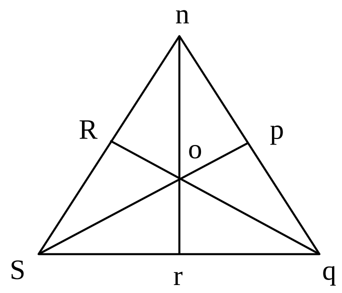


Figura nº 5

Es de notar que cualquiera que sea la posición del punto dado siempre resulta un número impar de puntos de división sobre los lados mismos y un número par sobre sus prolongaciones.

$$Sn : nq :: Sr : rq; \quad Sq : Sn :: qp : pn$$
$$Sq : nq :: SR : Rn$$
$$Sn \times rq = nq \times Sr; \quad Sq \times pn = Sn \times qp$$
$$mq \times SR = Sq \times Rn; \quad rq.pn.SR = Sr.qp.Rn$$

Recíprocamente, podríamos decir: si sobre los lados de un triángulo o sobre sus prolongaciones se tienen distribuidos tres puntos de tal modo que haya un número impar de ellos sobre los lados mismos, si el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres, las rectas tiradas desde cada punto de división al ángulo opuesto concurren en un mismo punto.

Fundándose en este teorema se puede desarrollar una porción de corolarios que son de alta importancia.

Corolario 1º.- Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un mismo punto.

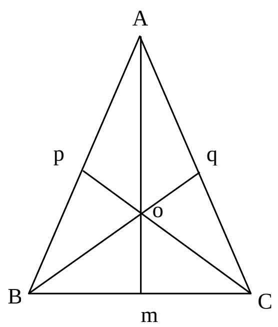


Figura nº 6

Nosotros sabemos que la bisectriz de un ángulo, tiene la propiedad de dividir al lado opuesto en partes proporcionales a los lados del ángulo de la bisectriz, pues aplicando este teorema en cada una de las bisectrices, multiplicando y simplificando al propio tiempo las igualdades que nos resultan, nos quedará de manifiesto el último teorema explicado.

$$BmA, \ mAC,$$
$$BC.om.Ap = Ao.Bp.mc, \ Cq.Ao.Bm = BC.om.Aq$$
$$BC.om.Ap.Cq.Ao.Bm = Ao.Bp.mc.BC.om.Aq$$
$$Ap.Cq.Bm = Bp.mc.Aq$$

Quedando demostrado según el mismo principio que las bisectrices se han de encontrar en un mismo punto (figura 6)

Corolario 2º.- Las tres rectas tiradas desde los vértices de un triángulo a los puntos medios del lado opuesto concurren en un mismo punto.

Esto es fácil de ver porque tenemos que los lados del triángulo quedaran divididos en segmentos iguales y por consiguiente se podrá aplicar el teorema anterior, lo que nos evidenciará la verdad del corolario.

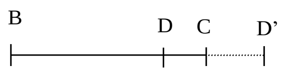
Corolario 3º.- De una manera parecida se puede deducir que las perpendiculares trazadas desde los tres vértices sobre los lados opuestos deben concurrir en un mismo punto.

Esto se demuestra, comparando los diferentes triángulos semejantes que dos a dos se forman, para luego haciendo como en el primer corolario, esto es, multiplicando y simplificando las tres igualdades resultantes, nos de la verdad del corolario.

Vistos los principales teoremas y corolarios que se deducen del estudio de las transversales, pasaremos a estudiar los haces armónicos que están íntimamente enlazados con todo lo que precede.

Cuando se tiene una recta dividida por un punto en dos partes cualesquiera, se puede concebir siempre en su prolongación, otro punto que esté en la misma razón de los dos segmentos anteriores, pudiéndose establecer por consiguiente proporción con dichas cuatro cantidades o rectas, estos cuatro puntos de la recta constituyen un sistema armónico, y los puntos dos a dos no consecutivos forman lo que se llama los puntos conjugados del sistema.

El origen de los sistemas armónicos radica en las proporciones armónicas numéricas, recibiendo el nombre de tales aquellas, cuya diferencia entre el 1º y 2º número es a la diferencia del 2º al 3º como el 1º es al 3º., esto suponiendo siempre una gradación entre dichos números.



$$BD : DC :: BD' : CD'$$
$$D'C : DC :: BD' : BD$$
$$D'C = BD' - BC$$
$$DC = BC - BD$$
$$BD' - BC : BC - BD :: BD' : BD$$
$$1^o - 2^o : 2^o - 3^o :: 1^o : 3^o$$

Figura.7

Se puede demostrar de una manera geométrica esta propiedad (figura 7), según las tres distancias que se deducen de todo sistema armónico. Hay que advertir aquí de paso que: dados tres puntos, se podrá hallar con facilidad la posición del cuarto, fundados en la misma proporción que se deduce de todo sistema armónico junto con la propiedad del Algebra que dice: Suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente o consecuente como suma de antecedente y consecuente de la segunda razón, es también a su antecedente o consecuente respectivo.

Ahora si desde un punto cualquiera se trazan rectas que vayan a parar a los cuatro puntos que determinan un sistema armónico, el todo formará un haz armónico, en el cual cada una de las rectas que hemos trazado, constituirá un radio del haz y los radios correspondientes a dos puntos conjugados, formaran los radios conjugados.

Así, si se tiene un ángulo con sus bisectrices correspondientes, esto es, la interna y la externa correspondiente al ángulo suplementario, formaran un haz armónico, las bisectrices con los lados del ángulo.

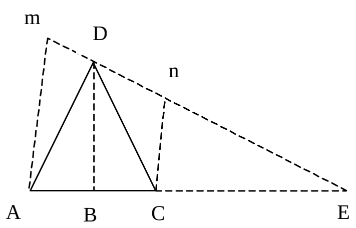


Figura nº 8

Para demostrar esto, (figura 8).basta saber que en todo triángulo las bisectrices, una correspondiente al ángulo interno y la otra al ángulo externo, junto con los dos lados del triángulo, cortan al tercero en cuatro puntos que forman un sistema armónico, por lo tanto según lo que llevamos dicho, las bisectrices y los otros dos lados del triángulo van a los diferentes puntos del sistema armónico y por lo tanto el conjunto formará un haz armónico.

$$AB:BC::AD:DC;\quad AE:EC::Am:Cm$$
$$Am:Cn::AD:DC;\quad AE:EC::AD:DC$$
$$AB:BC::AE:EC$$

De aquí se origina otro teorema importante: «En todo haz armónico, una recta cualquiera tirada paralelamente a uno de los radios del haz, queda dividida en dos partes iguales por los otros tres radios». Esto se demuestra trazando desde un punto de los radios una paralela a la recta dada y de la comparación de cuatro triángulos semejantes que resultan dos a dos, junto con la propiedad que tiene toda recta que corta a un haz armónico, cual es de formar un sistema armónico, se deduce con facilidad la igualdad entre las partes cortadas (figura 9).

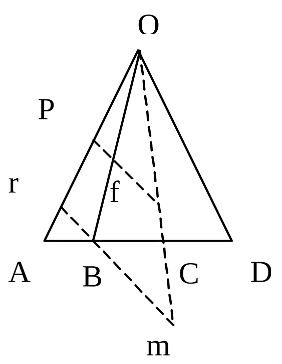


Figura nº 9

De aquí se puede deducir el recíproco, el cual nos conduce al corolario que nos enseña el medio de determinar uno de los radios de un haz armónico, conociendo los otros tres, pues basta según el corolario anterior, trazar por un punto cualquiera del radio conjugado al que se busca, una recta que quede dividida en dos partes iguales por los otros dos radios conjugados, tirando luego por el punto común de todos los radios una recta paralela a la transversal y quedará resuelto el problema.

$$ABr,\ ADO$$
$$AB : AD :: Br : OD$$
$$BCM,\ OCD$$
$$BM : OD :: BC : CD \quad AB :: BC :: BD : DC$$
$$BC : DC :: AB : AD \quad Bm : OD :: AB : AD$$
$$Br : OD :: BM : OD$$
$$Br = Bm$$
$$pf = tq$$

También tendremos como a consecuencia que, en todo haz armónico, los puntos de intersección de los cuatro radios con una transversal cualquiera forman un sistema armónico. Esto es fácil de deducir por lo cual omitiremos su explicación, como así también creo prudente, omitir todas las aplicaciones que se podrían deducir de estos principios, como es de ver, en el cuadrilátero completo que *Mr. Poinsot* considera de grado superior a todos los demás, siendo la base al propio tiempo del estudio de los polígonos estrellados.

Lo único que conviene advertir antes de dejar esta parte es que, si se tiene un punto y un ángulo en el mismo plano, y desde el punto se trazan diferentes rectas que corten al ángulo, resultaran diferentes cuadriláteros completos cuyas diagonales se cortaran en diferentes puntos que estarán en línea recta, estando situada esta recta dentro del ángulo, pasando por el vértice del mismo y siendo el radio conjugado de la recta que pasa por el punto dado y el vértice del ángulo dado, constituyendo los otros dos radios conjugados del sistema, las dos rectas del ángulo. Así es que esta propiedad la podemos expresar diciendo que, el punto dado es el polo y la recta hallada por las intersecciones de los cuadriláteros completos, la línea polar; de donde se deduce que del mismo modo que hemos hallado que el punto dado es el polo de la recta hallada, también se encontraría que un punto cualquiera de la recta que une el punto dado con el vértice sería polo de la misma polar anteriormente mencionada.

Lo que resumiendo podremos decir que: «En todo haz armónico, cada radio es una línea polar respecto de cada punto de su conjugado, y recíprocamente cada punto de ésta, es un polo respecto de aquel»

Para acabar nos falta estudiar ciertas propiedades parecidas a las anteriores, pero referentes a la línea llamada circunferencia que es la segunda que estudia la Geometría. En esta parte también hay que estudiar los puntos conjugados, transversales, polos y polares.

Ante todo debemos desarrollar un problema muy sencillo que tiene por base la división armónica de las líneas, para venir luego en conocimiento de todo lo demás, tal es: Dados en un plano dos puntos extremos de una recta, hallar otro punto cuyas distancias a los dos primeros estén en una razón dada m:n.

Es desde luego muy fácil de ver que este problema es indeterminado, es decir que existen una porción de puntos sobre el mismo plano que, reunirán las mismas condiciones; el lugar geométrico de todos estos puntos será una circunferencia cuyo diámetro será la distancia de los dos puntos conjugados que tienen relación con los extremos de la recta, suponiendo ésta dividida armónicamente bajo la hipótesis o relación de m:n (figura 10).

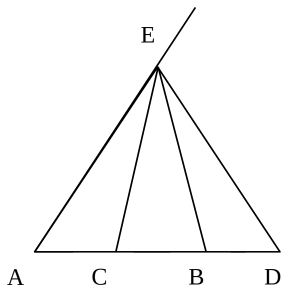


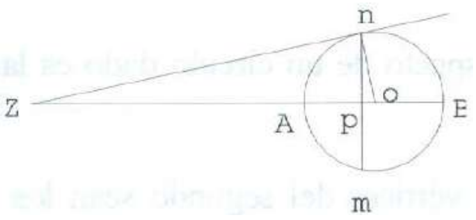
Figura nº 10

$$AC : CB :: m : n$$
$$AE : EB :: m : n$$
$$AC : CB :: AE : EB$$
$$DA : DB :: AE : EB$$
$$AC : CB :: DA : DB$$

Para demostrar esto, basta dada la relación m:n en que se ha dividido la recta, hallar este punto sobre la misma, hállase luego la posición de otro punto que esté en la misma relación pero fuera de la recta, lo cual se podrá obtener con facilidad trazando desde los extremos de la recta dada dos arcos cuyos radios se hallen en la misma relación m:n y fácil será de ver luego como uniendo este punto resultante con los extremos de la recta dada y con el punto hallado anteriormente, nos resultará un triángulo con su bisectriz; además trazando luego la bisectriz correspondiente al ángulo externo, tendremos que, la intersección de esta última bisectriz con la prolongación de la recta dada, nos dará el cuarto punto del sistema armónico; mas lo que se ha demostrado por un punto lo mismo se demostraría por otro cualquiera que se hallara en la misma relación de m:n, esto es, de que irían a parar las bisectrices de los nuevos ángulos que resultarían a los puntos conjugados de los extremos de la recta dada, mas por ser todas estas bisectrices que se forman correspondientes a ángulos adyacentes, tendremos que dos a dos se cortaran formando ángulos rectos; por lo tanto fundándonos ahora en aquel teorema que dice que el lugar geométrico de todos los vértices de diferentes ángulos rectos que van a parar a los extremos de una recta es una circunferencia cuyo diámetro es la misma recta, tendremos que los extremos del diámetro serán los puntos conjugados que tendrán relación con los extremos de la recta dada, hallándose todos los puntos de la circunferencia con respecto de los extremos de la recta dada, en la misma relación de m:n que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema se puede transformar de la manera siguiente: Dado un círculo y un punto, determinar el conjugado de este; hay que advertir que este círculo o circunferencia se llama generalmente círculo regulador

Es fácil deducir el conjugado de un punto interior al círculo regulador; para esto basta trazar por el punto dado una perpendicular al diámetro que resulta de unir el punto dado con el centro del círculo, y el punto donde esta perpendicular encuentra la circunferencia se le traza una tangente que se prolonga hasta encontrar también la prolongación del diámetro que habíamos trazado anteriormente, el punto de intersección será el punto pedido que será conjugado del primero (figura 11).



Cuando el punto que se tiene que hallar es interior al círculo, no hay más que trazar desde el punto exterior conocido, dos tangentes al círculo regulador; unir por medio de una cuerda los dos puntos de tangencia, lo que constituirá la cuerda de contacto, y el punto de intersección de esta cuerda con la recta que resultará de unir el punto dado con el centro del círculo, nos dará el punto conjugado del primero.

$$\begin{gathered}
\text{Por el supuesto se tiene:}\\
ZA : ZB :: pA : pB; \quad ZB : ZA :: ZB : pA\\
ZB = oZ + oB; \quad ZA = oZ - oB\\
PB = Ao + op; \quad pA = Ao - op\\
oZ + oB : oZ - oB :: Ao + op : Ao - op\\
2.oZ : 2.oB :: 2Ao : 2op\\
oZ : oB :: aO : oP\\
oA^2 = op.oZ\\
mo^2 = oZ.oP
\end{gathered}$$

Teorema importante se presenta aquí, cual es que, las cuerdas de contacto de todos los ángulos circunscritos, cuyos vértices están colocados en una recta común, se cortan en un mismo punto que es el conjugado del punto pie de la perpendicular, bajada desde el centro de la circunferencia a la recta dada. Esto se deduce con facilidad apoyándose en el teorema anterior como también en la proporcionalidad que existe entre los lados de dos triángulos rectángulos semejantes que se forman (figura 12)[1]. Hay que advertir que puede suceder que la recta dada que hemos concebido sea exterior, secante o tangente a la circunferencia.

Los dos casos primeros se desarrollan de una manera parecida, en cuanto al tercero basta decir que los dos puntos conjugados en este caso se confunden con el extremo del diámetro.

Formando el recíproco de este teorema tendremos que, si desde un punto interior o exterior a una circunferencia, se trazan varias rectas que vayan a encontrar a cada una de ellas a dos puntos de dicha circunferencia y luego por estos puntos se tiran las tangentes geométricas, los vértices de todos los ángulos circunscritos formados por dichas tangentes determinan la posición de una línea recta, que pasará por el punto conjugado del primero y será perpendicular a la recta trazada desde el centro al punto dado; así es que este punto recibe el nombre de polo, mientras que la recta hallada se llama línea polar.

[1] Ver figura en el manuscrito.

De una manera análoga se demuestra que toda cuerda tirada en una circunferencia por un punto dado queda dividida armónicamente por dicho punto y su polar.

Que la polar del vértice de un ángulo cualquiera, respecto de un círculo dado es la recta que junta los polos de sus dos lados.

Que si dos polígonos cualesquiera son tales que los vértices del segundo sean los polos respectivos de los lados del primero con relación a un circulo dado, recíprocamente los vértices de éste serán los polos respectivos de los lados de aquel.

Señores:

Mucha extensión habríamos podido dar a esta parte, pero no me he atrevido a ello, por temor de traspasar los límites del tiempo fijado por el Reglamento, concretándome por lo tanto a desarrollar la teoría de las líneas proporcionales, de una manera general sin pasar a casos particulares, por ser éstos de fácil deducción en vista de los principios sentados, esperando que de este modo habré satisfecho los deseos de todas las personas que han tenido la amabilidad de escucharme, y sobre todo de aquellas que han de ser censoras de este pequeño trabajo. He dicho.

Barcelona 1. de Julio de 1869

Lauro Clariana y Ricart

Oposiciones a Cátedra

Instituto de: Tarragona
Cátedra de: Matemáticas
Año: 1.869
Memoria: Teoría de las líneas proporcionales
Legajo: 5489-14
Notas: Archivo Educación Alcalá de Henares