En una extensa memoria presentada a la Real Academia de Ciencias de Madrid, D. Lauro Clariana, después de exponer los métodos conocidos para hallar integrales singulares, se propone buscar una ecuación diferencial de la que una ecuación dada

$$F\left(x, y, \psi\left(x, y\right)\right) = 0$$

que llamaremos abreviadamente $Q = 0$ es integral «singular». [Págs.1025, 1026].

Acerca del contenido de aquella memoria nos permitiremos algunas consideraciones.

Dada una ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \quad (1)$$

podrá suceder que tenga o no tenga integral singular. La tendrá cuando la ecuación $Q = 0$ resultado de eliminar y' entre:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

satisfaga a (1). No la tendrá en caso contrario. Es bien sabido que lo último es lo más general.

Si tiene (1) la integral singular $Q = 0$, es evidente que (1) es una ecuación diferencial de la que $Q = 0$ es integral singular.

Cuando (1) no tiene a $Q = 0$ por integral singular, el Sr. Clariana no se detiene, y le busca a $Q = 0$ una ecuación diferencial de la que $Q = 0$ sea integral singular. Prescinde entonces por completo de (1) como ecuación diferencial, y, como si recordar que $Q = 0$ lo ha deducido eliminando y' entre:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

o lo que es igual, eliminando g entre:

$$F\left(x, y, g\right) = 0 \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial g} = 0 \quad (3)$$

viene a decir que si la ecuación (2) con la constante arbitraria g se considera como la integral general de la ecuación diferencial $D=0$ que resulta de eliminar g entre (2) y su derivada respecto a x,

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial g}y'=0 \quad (4)$$

la ecuación $Q=0$ sacada de (2) y (3) será *siempre* la integral *singular* de la ecuación diferencial $D=0$.

Ahora bien, cuando $Q=0$ es solo la envolvente de las curvas (2), suponiendo que estas curvas tienen envolvente, el razonamiento no ofrece novedad alguna, pues es sabido que en los puntos de la envolvente, esta es tangente a la involuta. Pero de ningún modo se puede afirmar que $Q=0$ será *siempre* integral *singular* de la ecuación diferencial que tiene a (2) por integral general. Tomemos por ejemplo los dos casos siguientes:

Ejemplo 1º: Sea la ecuación diferencial:

$$F(x,y,y')=ax+by+cy'^2(x+y)=0 \quad (5)$$

Es fácil ver que no tiene integral singular. Derivando, en efecto, respecto a y' se tiene, igualando a cero la derivada,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=2cy'(x+y)=0$$

de esta ecuación se deduce una de dos, o

$$x+y=0$$

o

$$y'=0$$

Si $x+y=0$, ya tenemos eliminada la y', y si y' = 0, llevado este valor a $F(x,y,y')=0$ nos encontraremos que

$$ax+by=0$$

En consecuencia, la ecuación que se ha llamado antes $Q=0$ se compondrá de la recta $ax+by=0$, y de la recta $x+y=0$, y se tendrá

$$Q=(ax+by)(x+y)=0 \quad (6)$$

En la primera recta $y'=-\frac{a}{b}$, en la segunda recta $y'=-1$.

Ni el sistema

$$ax + by = 0, \qquad y' = -\frac{a}{b}$$

ni el

$$x + y = 0, \qquad y' = -1$$

satisfacen a $F(x, y, y') = 0$. Luego, como se decía, la ecuación diferencial propuesta no tiene integral singular. Vamos a aplicar ahora el procedimiento del Sr. Clariana para deducir la ecuación diferencial de la que $Q = 0$ habrá de ser integral singular. Para ello, pondremos en (5) en vez de y', la constante arbitraria *g*,

$$ax + by + cg^2(x + y) = 0 \quad (7)$$

y eliminaremos *g* entre esta ecuación y su derivada respecto a *x*:

$$a + by' + cg^2(1 + y') = 0$$

Efectuando la eliminación, resulta

$$(ax + by)(1 + y') - (a + by')(x + y) = 0 \quad (8)$$

Si $Q = 0$ es integral singular de esta ecuación diferencial deberá satisfacer a su derivada respecto a y', a saber:

$$ax + by - b(x + y) = 0$$

Ahora bien, ni la recta $ax + by = 0$, ni la recta $x + y = 0$ satisfacen a esta ecuación. Solo el punto $x = 0, y = 0$, común a las dos rectas, la satisface. Luego

$$Q = (ax + by)(x + y) = 0,$$

no es integral singular de la ecuación diferencial formada según indica el Sr. Clariana. Las rectas $ax + by = 0$, y $x + y = 0$ son dos integrales particulares de la ecuación diferencial formada, y no singulares, ya que se deducen de la integral general (7) de la ecuación diferencial formada (8), haciendo la constante *g* igual a cero o indefinidamente grande, respectivamente.

Ejemplo 2º: Sea la ecuación con constante arbitraria *g:*

$$(y - g)^2 = x^3$$

la ecuación $Q = 0$ correspondiente, resultado de eliminar *g* entre ella y su derivada respecto a *g*:

$$2(y - g) = 0$$

es evidentemente

$$x^3 = 0$$

de donde se deduce

$$x = 0$$

Esta ecuación representa el eje de la y, y, según el Sr. Clariana, es la integral singular de la ecuación diferencial de la que $(y-g)^2 = x^3$ es integral general, o sea

$$\frac{9}{4}x = y'^2$$

Mas es evidente que $x = 0$ ni siquiera satisface a esta ecuación.

Los ejemplos, como se verá inmediatamente, pueden multiplicarse a voluntad, más indican ya que el procedimiento de que nos ocupamos puede fallar, de modo que no siempre conduce a una ecuación diferencial de la que $Q=0$ sea integral singular. Ello ocurrirá, verbigracia, siempre que las curvas $F(x,y,g)=0$ tengan puntos singulares, o siempre que suponiendo que se engendra por corrimiento y deformación la serie de aquellas curvas dando al parámetro variable g distintos valores, haya un valor de g para el cual el movimiento generador sea estacionario. En el primer caso la curva lugar geométrico de los puntos singulares, satisface a

$$F(x,y,g)=0 \quad \text{y a} \quad \frac{\partial F}{\partial g}=0,$$

circunstancia bien conocida; y en el segundo, la curva correspondiente al movimiento estacionario satisface también a las indicadas ecuaciones; y es evidente, que, en el primer caso la tangente a la curva lugar geométrico de los puntos singulares, no coincidirá, en general, con la tangente o tangentes a las curvas que representen integrales particulares en los puntos comunes, y, que, en el segundo caso, la curva que satisface a

$$F=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial g}=0$$

es una integral particular. En los ejemplos presentados se ven claras ambas cosas. En el segundo, el lugar geométrico de los puntos de retroceso de las integrales particulares es el eje de las y, y en él, la tangente de retroceso tiene la dirección del eje de las x, al paso que la tangente al eje de las y es el mismo eje de las y. Por otra parte, no existe envolvente, las curvas integrales particulares recubren todo el semiplano $x>0$.

Respecto al primer ejemplo, consideremos el conoide recto

$$ax+by+cz^2(x+y)=0$$

en que *a, b, c* son, verbigracia, positivos, superficie que se halla comprendida entre los planos

$$ax + by = 0$$

$$x + y = 0$$

cortando al plano *xy* según la recta $ax + by = 0$. Para cada valor de *z* se tiene una generatriz paralela al plano de las *x y*, que se proyecta en verdadera magnitud sobre este plano según una recta que pasa por el origen y se halla entre las rectas $ax + by = 0$ del plano *x y*.

Consideremos el movimiento de la proyección de la generatriz en el plano de las *x y* a medida que cortamos la superficie por planos paralelos al de las *x y* y cuya distancia al origen disminuya constantemente. La proyección indicada se mueve desde $x + y = 0$ en sentido $(x, - y)$ hasta coincidir con $ax + by = 0$ cuando el plano secante coincide con el de las *x y*, para retroceder en sentido contrario a medida que el plano secante se aleja del origen hacia la parte negativa del eje de las *z*. Cuando cambia el sentido del movimiento, este es estacionario, lo cual ocurre al coincidir la recta móvil con $ax + by = 0$.

Como es sabido, en general, la curva $Q = 0$ que satisface a

$$F(x, y, g) = 0 \quad \text{y a} \quad \frac{\partial F}{\partial g} = 0$$

se compondrá de varias ramas; solo en la rama que sea envolvente de las curvas $F(x, y, g) = 0,$ suponiendo que esta rama exista, se podrá afirmar que $Q = 0$ es integral singular.

Hay que hacer constar que el procedimiento del Sr. Clariana no da el medio de formar la integral singular de una ecuación diferencial dada, sino al revés, lo cual carece de interés porque el dato es la ecuación diferencial, y porque además, hay infinitas soluciones del problema inverso, puesto que una curva se puede considerar como envolvente de infinitas clases de involutas. Finalmente, según acabamos de ver, el método indicado puede fallar, de modo que no se puede afirmar que «con seguridad» ni «a priori» ni «siempre» resuelve el problema propuesto.

Lo realmente curioso es, que el Sr. Clariana recuerda* que si «al eliminar una de las variables entre

$$F(x, y, g) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial g} = 0$$

sale *g* constante, la solución que satisface a

* Véase, por ejemplo, Hoüel, *Cours de Calcul Infinitesimal*, tomo II, pág.386. París, 1879

$$F(x,y,g) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial g} = 0\,,$$

será integral particular» y a continuación indica que puede dejar de satisfacer a la ecuación diferencial de la que

$$F(x,y,g) = 0$$

es integral general, comprobándolo con una ecuación diferencial presentada por Serret; es decir, en una parte de su memoria reconoce e indica casos excepcionales, y 18 páginas más adelante, al exponer su método «de base segura» y «no sujeto a oscilaciones», niega implícitamente su existencia.

Barcelona 25 Febrero 1911
Esteban Terradas Illa[**]

[**] Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. Tercera Epoca, Vol. VIII, Núm. 29