Algo referente a cierta clase especial de Integrales Singulares

1911

Motivos muy atendibles de dignidad profesional, oblíganme a tomar la pluma para contestar al Sr. Terradas, sobre su impugnación relativa a mi trabajo acerca de una clase especial de integrales singulares, cuya impugnación fue publicada en abril último por la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona; no habiéndola recibido hasta mediados de julio, explicando perfectamente esta circunstancia la causa del retardo en mi contestación.

Téngase por cierto que, si los argumentos del Sr. Terradas me hubiesen convencido, habría tenido alma para manifestar que había sido víctima de una obsesión, empero como no sea así, véome en el caso de defender la tesis general que consigno en mi Memoria, no tanto en el caso de defender la tesis general que consigno en mi Memoria, no tanto por mi, como para corresponder así a la distinción que me otorgó la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, al permitir que se insertara mi trabajo en su acreditada Revista.

Poca importancia concede el Sr. Terradas a la parte primera de mi Memoria, donde expongo alguna idea que considero propia y nueva; y bien puedo afirmar que la base de mis consideraciones radica en el estudio que en un principio desarrollo relativo a las involutas y envolventes dentro de los diferentes órdenes infinitesimales, a fin de deducir los casos en que al aplicar el procedimiento general para la determinación de la envolvente, resultan expresiones que no convengan a la envolvente, y, por consiguiente, no pertenezcan a la integral singular. A expresiones analíticas de verdaderas envolventes se refiere mi Memoria, pues en la página 68 hay un párrafo que dice:

«*Este método guarda relación con la teoría de las involutas y envolventes*», y este principio, que considero actuar constantemente, no lo repito a cada paso, por considerarlo innecesario.

Dice dicho Sr. Terradas que concretarse a esto ***no ofrece novedad alguna***, sin embargo, ello me bastó para recabar mi método especial, base para resolver con suma facilidad y rapidez varios problemas y en particular para salvar la dificultad que presenta Serret, en su célebre ecuación diferencial.

Para mayor claridad voy a señalar lo más saliente de mi memoria para ponerlo luego en parangón con las objeciones del Sr. Terradas.

Para apreciar debidamente la importancia de la teoría respecto a las líneas envolventes, pondremos algunos ejemplos:

1º Sea la ecuación primitiva:

$$f(x, y, \alpha) = y + \alpha x + \alpha^2 = 0 \qquad [1]$$

luego al considerar

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = x + 2\alpha = 0 \qquad [2]$$

y al eliminar α entre [1] y [2], se obtiene:

$$x^2 - 4y = 0$$

De este resultado se infiere que la envolvente de las diferentes rectas expresadas por [1] es una parábola que tiene su vértice en el origen y cuyo eje coincide con el de *y*.

Conforme advierten algunos autores, para que haya envolvente precisa que dos curvas consecutivas se encuentren; de modo que hay que considerar a lo menos dos valores para α en la función

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

Mas suponiendo dos involutas infinitamente próximas, siendo la ecuación en α de segundo grado, deben considerarse iguales las raíces de la misma, a fin de que resulte un elemento común con la envolvente.

Si aplicamos estas consideraciones al ejemplo anterior:

$$y + \alpha x + \alpha^2 = 0$$

se obtiene

$$\alpha = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

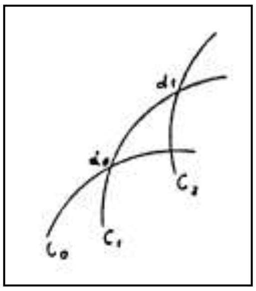
de donde, para que las raíces sean iguales, debe suponerse

$$x^2 - 4y = 0$$

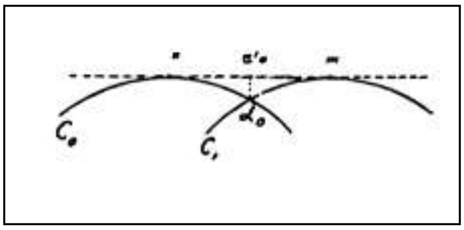
Resultando inmediatamente la misma ecuación de la parábola hallada anteriormente.

Hay que advertir, sin embargo, que las condiciones que hemos indicado para la determinación de la envolvente pueden considerarse ***necesarias, pero no suficientes***, como vamos a probar mediante principios geométricos y analíticos, dentro de lo infinitésimo.

Sean las líneas $C_0\ C_1\ C_2$, como involutas infinitamente próximas dos a dos. Según lo que precede, el elemento $\alpha_0\ \alpha_1$, lo mismo puede considerarse de la curva involuta C_1, como de la envolvente; empero para demostrar mejor ciertas anomalías aparentes que se operan en el estudio de la envolvente, entendemos que sería útil considerar la formación de ésta, tal como indica la segunda figura adjunta, esto es, imaginando el elemento envolvente expresado por la recta *n m*, o sea por la porción de tangente común a las dos involutas $C_0\ C_1$ infinitamente próximas: esto equivale a suponer que el punto α_0 se trasladará a α'_0, por medio de una perpendicular trazada desde α_0 á *n m*, y en el concepto de que los dos elementos de curvas involutas $n\alpha_0$ y $m\alpha_0$ se sustituirán por $n\alpha'_0$ y $m\alpha'_0$, respectivamente, todo lo cual será posible cuando $\alpha_0\ \alpha'_0$ se resuelva en un infinitamente pequeño, a lo menos, de segundo orden, siendo $n\alpha_0\ m\alpha_0$ y los ángulos $\alpha_0\ n\alpha'_0, \alpha_0\ m\alpha'_0$, infinitamente pequeños de primero, conforme se demostró ya al estudiar un triángulo infinitesimal bajo las mismas condiciones.



Esta conclusión equivale a considerar los elementos de las involutas consecutivas, coincidentes con el correspondiente de la envolvente, y por ende, que las dos raíces α del caso último estudiado, siendo iguales tengan una tangente común para las dos involutas consecutivas en el punto considerado. Sin embargo, no siempre que se tenga una línea como resultado de la unión de puntos comunes de involutas que tengan dos a dos tangentes comunes, se podrá afirmar que sea una envolvente de ellas, pues si al formar el triángulo $n\alpha_0 m$ no resulta $\alpha_0\ \alpha'_0$ de un orden infinitesimal superior al de los lados $n\alpha_0$ y $m\alpha_0$, no podrá considerarse dicha línea como ***envolvente***, de las involutas dadas.



Para formarse cargo de esta conclusión será suficiente atender al ejemplo siguiente:

Sea la ecuación de la circunferencia:

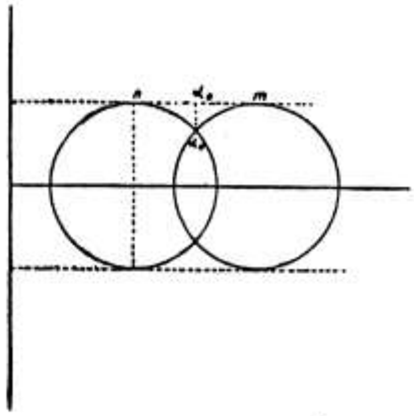
$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

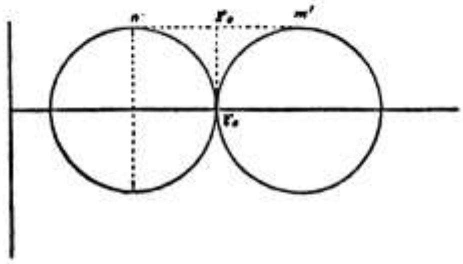
Siguiendo el procedimiento general para hallar la envolvente de las diferentes circunferencias al variar el parámetro α, teniendo todas el mismo radio y los centros en diferentes puntos del eje *x*, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = x - \alpha = 0$$

de donde al sustituir este valor en [1] se obtiene

$$y^2 - r^2 = 0 \qquad (a)$$





Esta es la ecuación de la envolvente, resolviéndose en dos rectas paralelas al eje *x*, y a las distancias *r* y -*r* del origen de coordenadas, como se manifiesta en la primera figura adjunta. Mas si nos fijamos en la disposición de la segunda figura, cabe considerar también el eje *x*, o sea *y* = 0, como una línea que une puntos comunes de involutas dos a dos, teniendo tangentes comunes, y a pesar de ello no se puede considerar dicho eje como envolvente, puesto que un punto de ella, tal como C_0, no se puede suponer que vaya a coincidir con C'_0, pues el triángulo $n' C_0 m'$, no se halla en las mismas condiciones que el $n \alpha_0 m$, de la figura anterior, no solo porque las tangentes a las involutas y a la envolvente no pueden coincidir, sino porque la perpendicular $C_0 C'_0$ a la tangente común $n' m'$ a las dos involutas correspondientes, resulta del mismo orden infinitesimal cero, que los lados $n C_0$ y $m C_0$, condición contraria a la supuesta para puntos de la verdadera envolvente.

Además, si pasamos a la determinación de la ecuación diferencial que corresponde a [1] al derivar ésta, según *x*, se tiene

$$(x - \alpha) + y \frac{dy}{dx} = 0 \qquad [2]$$

de donde eliminando α, entre [1] y [2], resulta

$$y^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=r^2 \quad [3]$$

siendo ésta la ecuación diferencial de [1].

Ahora bien, si derivamos la ecuación de la envolvente hallada, (a), se obtiene

$$y\frac{dy}{dx}=0$$

Ecuación que queda satisfecha bajo dos conceptos diferentes, eso es, siendo

$$y=0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{dx}=0$$

Si sustituimos el primer valor en [3], fácilmente se comprende que no satisface a dicha ecuación; confirmando este resultado analítico y obtenido ya por la geometría, o sea, que y = 0, no se puede considerar como envolvente de las circunferencias, por más que dicho valor satisfaga a la derivada de la ecuación envolvente; en cambio, el segundo valor

$$\frac{dy}{dx}=0$$

sustituido en [3], da

$$y^2=r^2$$

expresión que corresponde con la misma ecuación de la verdadera envolvente hallada.

Otro criterio existe para conocimiento de la integral singular puramente analítico, aplicable sobre todo en ecuaciones diferenciales de segundo orden. En la página 67 se encuentra la siguiente:

El procedimiento debido a Lagrange, se funda en la igualdad de raíces respecto a la derivada de la ecuación diferencial; mas como advierte Serret, con suma oportunidad, en el ejemplo

$$\frac{dy}{dx}=P\pm\sqrt{Q}$$

se comprende que, en general, la derivada de la función Q = 0, no satisfaga a

$$\frac{dy}{dx}=P$$

Este concepto explica perfectamente la causa por la cual al aplicar la regla para determinar la expresión de la integral singular en la célebre ecuación diferencial de Serret, no satisface dicha expresión a ésta, y en virtud de esa irregularidad, pensé en buscar la verdadera ecuación diferencial que podía referirse a la precitada integral singular, sugiriéndome un procedimiento especial para hallarla, permitiéndome luego poder utilizar dicho método o procedimiento, bajo formas diferentes para resolver muchos ejemplos propuestos por notables matemáticos.

En términos generales, ese procedimiento especial podemos formularlo del modo siguiente:

«En efecto, si la ecuación diferencial primera es

$$F(x, y, y') = 0 \qquad [1]$$

al considerar la y' como constante arbitraria resulta:

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (a)$$

Si se toma la derivada de dicha función con toda generalidad, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad [2]$$

Ahora bien, la derivada de (a) considerando C constante, será

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \qquad [3]$$

Así para que [2] corresponda con [3] basta que

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0 \qquad [4]$$

de cuya ecuación se deduce

$$C = \psi(x, y)$$

De modo que al sustituir este valor, por último, en (a) se obtiene

$$F[x, y, \psi(x, y)] = 0 \qquad [5]$$

Esta ecuación representa la integral singular, en el concepto de corresponder la tangente en un punto de la curva [5] con la de la ecuación diferencial que resulta de combinar (*a*) con [3] dándonos esta segunda ecuación diferencial notable, la seguridad de que la ecuación [5] constituya su integral singular, ***conforme a la clase especial que estudiamos***.»

En fin, para no prolongar por más tiempo estas consideraciones, terminaré mostrando la importancia de dicho procedimiento, aplicándolo al último de todos los ejemplos, esto es, a la célebre ecuación de Serret:

$$y - 2xy' - y'^2 = 0 \qquad [1]$$

Al generalizarla, se tiene

$$y - 2xC - C^2 = 0 = f(x, y, C) \qquad (1')$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial C} = -2x - 2C = 0$$

o sea

$$C = -x$$

cuyo valor sustituido en (1') da

$$y + x^2 = 0 = \varphi(x, y) \qquad [2]$$

Empero si de [1] buscáramos la integral singular. según el procedimiento de Lagrange, no cabe duda que obtendríamos la misma ecuación [2], pues según lo dispuesto y' es igual a *C*.

Fácilmente se comprueba que esta integral singular no satisface a la ecuación diferencial [1], manifestándonos esto que [1] no es la ecuación diferencial que corresponde con [2] como integral singular. Pues para encontrar la segunda ecuación diferencial, conforme al procedimiento expuesto, basta derivar, según *x*, la ecuación [1'] considerada como integral general; así, pues,

$$-2C + y' = 0$$

de donde

$$C = \frac{y'}{2}$$

al sustituir este valor en [1'], resulta

$$y - xy' - \frac{y'^2}{4} = 0 \qquad [3]$$

Esta es la segunda ecuación diferencial; la cual queda ahora satisfecha por la integral singular $y + x^2 = 0.$ En efecto, al derivar dicha integral singular, da $y' = -2x,$ y al sustituir en [3] se obtiene

$$-x^2 + 2x^2 - x^2 = 0$$

o sea 0 = 0.

Esto es, una identidad, lo que no resulta, según hemos indicado, al sustituir $y' = -2x$ en la primera ecuación diferencial, pues se obtiene

$$-x^2 + 4x^2 - 4x^2 = 0$$

igualdad que no se convierte en identidad.

Refiriéndose al estudio de la envolvente, podríamos decir que [2] como envolvente satisface a [3] y no a [1] y, por consiguiente, la integral singular lo es de la ecuación diferencial [3].

El otro criterio analítico puede también justificar el resultado anterior, sin atender a consideraciones de la envolvente:

En efecto, de [1] resulta

$$y' = -x \pm \sqrt{x^2 + y}$$

siendo

$$x^2 + y = 0$$

luego da la igualdad anterior

$$y' = -x$$

valor que no corresponde con la derivada de

$$x^2 + y = 0$$

En cambio, de [3] resulta

$$y' = -2x \pm 2\sqrt{x^2 + y}$$

de donde, siendo

$$x^2 + y = 0$$

se obtiene

$$y' = -2x$$

valor correspondiente a la derivada de la ecuación anterior, o sea de la integral singular.

Pasemos ya a las consideraciones del Sr, Terradas. Bien cabe afirmar que el principal argumento de su refutación radica en el párrafo siguiente:

«Cuando $Q = 0$ es solo la envolvente de las curvas

$$F(x, y, g) = 0$$

suponiendo que estas curvas tienen envolvente, el razonamiento no ofrece novedad alguna, pues es sabido que en los puntos de la envolvente ésta es tangente a la involuta.

Pero de ningún modo se puede afirmar que $Q = 0$ sacada de

$$F(x, y, g) = 0 \qquad [2]$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial g} = 0$$

sea siempre integral singular de la ecuación diferencial que tiene a [2] por integral general.»

Verdaderamente que este punto es de importancia y necesita detenerse en él para comprender mejor lo que se consigna en mi Memoria.

Para mayor claridad designaré por *D* la ecuación diferencial dada o primitiva; por *Q* lo que resulta de eliminar el parámetro o constante arbitraria de la integral general y su derivada igualada a cero, respecto a la misma constante arbitraria; y por último sea *D'* la ecuación diferencial que resulta de generalizar *D*, tomándola como integral general. Así, pues, puede resultar que la derivada de *Q* satisfaga a *D*, en cuyo caso la *Q* representará una integral singular de *D*; mas si *Q* satisface a *D'* y no a *D*, entonces resulta *Q*, integral singular solamente de *D'*.

Ahora bien. la integral singular determinada por el procedimiento de Lagrange al partir de *D*, y como representante de *Q* puede ser que no satisfaga a *D*, en cuyo caso mi procedimiento conduce a la determinación de la ecuación diferencial *D'*, que puede corresponder a *Q*, como integral singular, esto es, en el concepto de haber generalizado la *D*, y que exprese ésta, en dicho supuesto, la integral general de *D'*: aquí partimos de la *D* generalizada, resultando una función dependiente de parámetro o constante arbitraria, lo cual permite hallar la eliminante entre ella y su derivada respecto a dicha constante é igualada a cero; fácilmente se concibe que tendrá que coincidir con lo que de la regla de Lagrange para la determinación de la integral singular, porque no se hace más que aplicar el procedimiento suyo, cambiando y' en *C*.

Además, hay que ver al buscar la nueva ecuación diferencial D' correspondiente a D generalizada, si la derivada de Q corresponde con D'; verdaderamente que en absoluto no podemos asegurar que esto se realice, pero bien cabe admitir que se cumpla la condición anterior, esto es, que exista envolvente o integral singular, por cuanto, en virtud de lo que precede, hemos visto que, al partir de la ecuación primitiva, suelen obtenerse envolventes en totalidad o en parte, como se puede apreciar en los ejemplos expuestos.

En general, esta condición se verifica, y en todos los ejemplos que se presentan en mi Memoria, sacados de varios autores, esta condición tiene lugar, y a ella me reduzco, como he manifestado varias veces, y dentro de este círculo de acción creo que estoy en terreno firme y seguro. Sin duda que rebuscando mucho puede darse con casos excepcionales de modo que Q tampoco sea integral singular de D', como los presentados por el Sr. Terradas, mas ellos están fuera de los supuesto y por consiguiente no rezan conmigo, no obstante hasta así, mi procedimiento indica y conduce al conocimiento de cuando hay la carencia de integral singular como ya veremos, tomando pie de los mismos ejemplos citados por el Sr. Terradas.

De todos modos en donde se puede apreciar mejor la importancia de ese procedimiento es, al hacerlo extensivo a ecuaciones diferenciales de orden superior al primero, como resulta en la notable ecuación de 2º orden, estudiada por Rubini y Serret, y otros casos que pueden suponerse, y que se manifiestan en el transcurso de mi Memoria, al hacer extensivo dicho procedimiento a esas nuevas ecuaciones.

Pasemos, pues, ya a considerar los dos ejemplos que pone el Sr Terradas. Respecto al primero

$$F(x, y, y') = ax + by + cy'^2 (x + y) = 0 \qquad [5]$$

concretareme a la parte que me ataña, y que dice así: «Vamos a aplicar ahora el procedimiento del Sr. Clariana para deducir la ecuación diferencial de la que $Q = 0$, habrá de ser integral singular. Para ello pondremos en [5] en vez de y' la constante arbitraria g,

$$ax + by + cg^2 (x + y) = 0 \qquad [1]$$

y eliminaremos g entre esta ecuación y su derivada respecto a x

$$a + by' + cg^2 (1 + y') = 0$$

Efectuando la eliminación, resulta

$$(ax + by)(1 + y') - (a + by')(x + y) = 0 \qquad [2]$$

Si Q es integral singular de esta ecuación diferencial, deberá satisfacer a su derivada respecto a y'.....»

Lo realmente curioso es que el Sr. Terradas haya olvidado que una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, como la anterior, no admite integral singular; por lo tanto, suplico a dicho señor, que no me obligue a admitir semejante dislate. Así la falta de integral singular en este ejemplo especialísimo queda justificado por los mismos principios anteriores. Además se podría proceder del modo siguiente para probar la falta de integral singular en la expresión [1] presentándola bajo la forma

$$\left(a+cg^2\right)x+\left(b+cg^2\right)y=0$$

la cual por valores particulares del parámetro *g*, resulta un sistema de rectas que salen del origen de coordenadas, y que consideradas como involutas originan un punto por envolvente, lo que demuestra que la integral singular como expresión de la envolvente, es nula, y por consiguiente, según los principios que integran mi Memoria no hay integral singular.

Respecto al segundo y último ejemplo dice:

«Sea la ecuación con constante arbitraria *g*

$$(y-g)^2=x^3$$

La ecuación $Q = 0$ correspondiente, resultado de eliminar *g* entre ella y su derivada respecto a *g*:

$$2(y-g)=0$$

es evidente

$$x^3=0$$

de donde se deduce

$$x=0$$

Esta ecuación representa el eje de la y, y según el Sr. Clariana es la integral singular de la ecuación diferencial de la que

$$(y-g)^2=x^3$$

es integral general.....»

Cuidado, Sr. Terradas, en atribuirme afirmaciones que no admito; lástima que mi compañero no se haya fijado más en la primera parte de mi Memoria, pues allí hubiera encontrado lo que repito aquí, esto es, el estudio de la envolvente respecto de una circunferencia de radio constante que se mueve, teniendo el centro siempre en el eje *x*, y de este modo habría visto que considero como los puntos comunes de las involutas, o puntos de retroceso, en dicho eje *x*, no engendran envolvente y por ende tampoco integral singular; el caso supuesto por el señor Terradas, es semejante al anterior, solo que el eje *x*, cambia en eje *y*; de todos modos, no habiendo envolvente no hay integral singular.

Así quedan explicados los dos problemas anteriores lógicamente y dentro del mismo procedimiento basado en la teoría de las involutas y envolventes.

Después de todo, llámame sobradamente la atención uno de los párrafos que copio textualmente:

«Hay que hacer constar que el procedimiento del Sr. Clariana no da el medio de formar la integral singular de una ecuación diferencial dada, sino al revés......»

Para desmentir tal aserto será suficiente apuntar algunos ejemplos que me vengan a mano de los varios que contiene mi Memoria:

1º Sea la ecuación diferencial

$$x + 2yy' - xy'^2 = 0 = f(x, y, y') \qquad [1]$$

Al generalizarla, conforme hemos manifestado, se obtiene:

$$x + 2yC - xC^2 = 0 \qquad [1']$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 2y - 2xC = 0, \qquad C = \frac{y}{x}$$

Sustituyendo este último valor en [1'], se deduce inmediatamente la integral singular de [1].

$$x^2 + y^2 = \varphi(x, y) = 0$$

pues que satisface a dicha ecuación diferencial.»

De suerte que se ha pasado de la ecuación diferencial a su integral singular; este procedimiento corresponde con el de Lagrange, obteniéndose, por consiguiente, la misma Q en ambos métodos. De modo que si $Q'_x = D$, y en el supuesto de $Q'_x = D'$, se tiene $D = D'$.

Este caso, siendo el menos importante, según esta última conclusión, nos dice, sin embargo, que el procedimiento expuesto puede servir de comprobación.

En efecto, al tomar la derivada de [1'] según *x*, se tiene

$$1 + 2y'C - C^2 = 0$$

$$C = y' + \sqrt{y'^2 + 1}$$

sustituyendo este valor en [1'], se obtiene

$$x + 2y\left(y' + \sqrt{y'^2 + 1}\right) - x\left(y' + \sqrt{y'^2 + 1}\right)^2 = 0 \qquad [1]$$

y como de

$$x^2 + y^2 = 0$$

se deduce

$$y' = -\frac{x}{y}$$

luego

$$\sqrt{y'^2 + 1} = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y} = 0$$

y, por consiguiente, la ecuación [1'] se reduce a

$$x + 2yy' - xy'^2 = 0$$

Ecuación diferencial a la primitiva [1].

«Supongamos ahora un caso más general, por ejemplo la célebre ecuación de Rubini y Serret:

$$f(x, y, y', y'') = y - xy' + \frac{1}{2}x^2 y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0 \qquad [a]$$

La derivada que hemos de generalizar aquí es *y*”, luego según la teoría ya explicada para las ecuaciones diferenciales de primer orden, se tendrá

$$f(x, y, y', C) = y - xy' + \frac{1}{2}x^2 C - (y' - xC)^2 - C^2 = 0 \qquad [a]$$

y en virtud de

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

resulta

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x(y' - xC) - 2C = 0$$

de donde

$$C = \frac{x^2 + 4xy'}{4(1 + x^2)}$$

Este valor de C, sustituido en (a), da, después de sencillas reducciones, la ecuación

$$F_1(x, y, y') = 16(1 + x^2)y + x^4 - 8(x^3 + 2x)y' - 16y'^2 = 0$$

la cual constituye la primera integral singular de la ecuación diferencial dada, conforme al resultado obtenido por Serret.»

Creo que con lo anterior queda suficientemente probado que se ha pasado de ecuaciones diferenciales a integrales singulares.

En la refutación del Sr. Terradas, después de lo precedente no queda más que el pequeño final que considero demasiado duro, por no decir ofensivo o despectivo. De todos modos queda probado que dentro de los principios que integran mi Memoria, se han resuelto de una manera exacta y relativamente sencilla los múltiples ejemplos dados por matemáticos y en particular por Rubini y Serret.

Verdaderamente podrá ser que valga poco lo contenido en mi Memoria, pero tengo la convicción de que algo nuevo y aprovechable se encuentra en ella, no ignorando que en manos más expertas que las mías podía haber dado mejor fruto.

Digna de estima es la discusión noble y franca, pero se empeñece cuando se convierte en esclava de la pasión.

Supongo que quien lea con detención e imparcialidad este escrito, comprenderá perfectamente que solo heme propuesto hacer frente con nobleza y dignidad al acometimiento impertinente del Sr. Terradas.

Barcelona, 24 de Junio de 1911