Nociones

de

Filosofía Matemática

1878

> La Filosofía cual madre cariñosa, lleva como de la mano a los hombres en sus investigaciones científicas, para que se dirijan siempre por el camino de la verdad.

El hombre, mientras cruza el mar proceloso de la vida, lucha constantemente entre la verdad y el error, entronizándose más de una vez el error, a pesar de ese ardiente deseo del espíritu humano por la verdad; razón por la cual no debe asombrarnos el que cada generación que pasa deje escritas solo cortas líneas en ese gran libro que se llama Historia, y que encierra los tesoros mas preciados que han ido acumulando, a través de tantos siglos, las inteligencias privilegiadas de algunos sabios, que, alumbradas por la Divinidad, como cometas, han dejado rastro de su existencia en el vasto firmamento de la Humanidad.

Nadie ignora que a la conquista de una verdad, la preceden, generalmente, cien mil errores; el mundo sabe que el placer de un invento cuesta a veces al mísero mortal, una vida entera de sinsabores y sufrimientos. Pero como luchar es vivir, puesto que sin lucha no hay movimiento, sin movimiento no hay progreso, y sin progreso no hay vida; fuerza es luchar, y luchar con valor y denuedo, para vivir la vida del espíritu, apartando el error de la verdad, las sombras de la luz, la muerte de la vida; fijando, en fin, con toda seguridad, el derrotero que hemos de seguir en nuestras investigaciones científicas.

A este propósito, creemos muy del caso copiar algunos párrafos que escribió el poeta y crítico ***Lessing***, en un momento de verdadero entusiasmo e inspiración: «No la verdad que un hombre posee o cree poseer, sino la pena sincera que ha empleado para alcanzarla, constituye el valor del hombre: Pues no por la posesión, sino por la investigación de la verdad, se ensanchan sus fuerzas, lo que constituye su perfección siempre creciente: La posesión hace indolente, perezoso, soberbio. Si Dios llevase en su diestra la verdad, y en su izquierda solo el vivo anhelo de la verdad, aunque con la añadidura de errar perpetuamente y me dijese: ¡Elige! yo me precipitaría humilde en su izquierda, diciendo: ¡Da, Padre mío! pues la verdad pura es solo para ti. »

Esta lucha, empero, que sostiene el hombre, no debe realizarse como quiera, lo que interesa es luchar y vencer, y por esto, a medida que el hombre penetra más y más en el campo sin límites de la ciencia, siente una como necesidad de aproximarse a la ciencia madre -La Filosofía-. La cual encierra el pentagrama dentro del que deben hallarse inscritas todas las verdades parciales, que cual ramitas desprendidas de un mismo árbol, deben estar alimentadas por la rama Madre que las dio el ser. De esta manera, puédese esperar que la lucha noble del espíritu sea fructífera; solo así, podremos evitar que alguna teoría o hipótesis concebida, en mal hora, entre las tinieblas del error, vaya adquiriendo proporciones gigantescas, a la par como las sombras de los cuerpos, cuando el sol decline hacia Occidente.

Si la Filosofía, pues, es tan necesaria en los diferentes ramos del saber humano; si la doctrina filosófica debe servir como de peana en toda ciencia; en realidad de verdad confesamos que esta doctrina filosófica será tanto más importante, tratándose de una ciencia trascendental como la Matemática, que tiene cual ninguna, el poder de aunar el mundo real con el mundo de las abstracciones, para formar un solo haz armónico, bello y sublime.

Dicho se está que no hay ciencia sin método que la uniforme y caracterice; y para ello requiérese que ese método esté basado en principios sólidos e inquebrantables, que sirvan como de zócalo al edificio que se proyecta levantar; sabemos que el método es tanto más apreciable, cuanto más verdades encierra; empero, en una ciencia tan extensa como la Matemática, es casi de todo punto imposible que un solo método la comprenda en todos sus extremos, y he aquí la razón de su multiplicidad. Mas si ahondamos esta ciencia; si buscamos con intención el espíritu filosófico que promueve el desarrollo creciente del estudio de la cantidad, descubriremos con asombro y entusiasmo, que, entre los muchos métodos, existe algo común, cuya investigación debe llamarnos muy mucho nuestra atención. Este principio común, esta base filosófica, según nuestro humilde parecer, bien podría expresarse por: ***La dualidad determinada en la simetría u oposición de partes.*** Principio notabilísimo, como tendremos ocasión de ver durante el desarrollo de este escrito; principio que, hasta el siglo en que vivimos, no ha empezado a germinar, como a base fundamental en las especulaciones Matemáticas, y esto aun en el estrecho círculo de la Geometría.

Ahora bien: como el espíritu humano, busca siempre ensanchar su esfera de acción; como constantemente desea aproximarse a esa expresión general, única verdadera ley universal de todo lo existente; concíbese que el hombre guiado y movido por ese espíritu activo, pretenda extender el principio de dualidad a toda la Matemática, dejando de paso algunos puntos notables que señalen la prolongación de una de las muchas líneas que se vienen trazando en el mapa científico del Universo, desde los tiempos mas decantados de la Historia, con la firme seguridad de que esta línea prolongada, debe converger con todas las demás que se vienen adelantando al propio tiempo y en direcciones varias, hacia un mismo punto; hacia la verdad absoluta; hacia la letra ***Alfa*** de la Creación.

Acabamos de manifestar que la dualidad y la simetría forman la base de toda especulación matemática, hallándose la simetría comprendida en la idea genérica de dualidad, pero debemos advertir que esta palabra debe tomarse en sentido más lato que no se toma en Geometría, esto es, en sentido de oposición de partes, modo de ser contrario y opuesto. El principio dual, en este concepto, adquiere proporciones tan grandes que permite considerarlo como a base, no solo del mundo abstracto sí que también del mundo real: Unificación grandiosa e indispensable, para que el matemático pueda adunar lo que le dicen los sentidos, con los principios abstractos que le suministran sus facultades intelectuales. Empecemos, pues, nuestras investigaciones por el mundo real: fijemos, por un momento, la vista en nuestro sistema planetario, y notaremos como todo planeta gira alrededor del sol, mediante la combinación de dos fuerzas, que gozan de propiedades diferentes; la curva que describe cada planeta, tiene dos puntos notables llamados *focus*, que están situados a ambas partes del centro; resultando ser, además, dicha curva, de segundo grado: y para que el dualismo sea más perfecto, al movimiento de traslación de cada planeta, se le junta otro de rotación. Si del sistema planetario pasamos al planeta que habitamos, encontraremos con más profusión extendido el principio de dualidad.

De momento ya descubrimos dos clases de seres: orgánicos e inorgánicos; entre los seres orgánicos otros dos: animales y vegetales; y entre los animales otra división dual: animales racionales e irracionales, hallándose en este primer grupo uno de los seres que debe de llamarnos más la atención. El Homo sapiens de Linneo; el mundo en pequeño, como le llama cierto escritor; en una palabra, el Hombre, ese ser que a pesar de no poseer armas naturales de defensa, se ha constituido rey de la Creación, solo con su inteligencia; mas si al hombre nos concretamos para acabar de ver, aunque sea a grandes rasgos, como se opera el dualismo en la naturaleza, observaremos que ese dualismo se manifiesta de una manera clara por las tendencias continuas y opuestas de su alma y cuerpo, reflejándose de una manera ostensible, ya en las costumbres, ya en la política, ya en la moral, ya en la religión de la sociedad.

De ello nos responde la mejor obra escrita por nuestro rey de los ingenios, el manco de Lepanto; así como también aquella sublime inspiración, engendrada entre las densas nieblas del septentrión, por un ciego que supo ver, con los ojos de su inteligencia, mejor que nosotros, los combates realizados entre el bien y el mal, allá donde el primer mortal sentó su huella.

Mas dejemos el mundo físico para fijar nuestra atención en el mundo abstracto, y en particular en la matemática, dó el principio de dualidad adquiere proporciones estupendas. Hora es ya, pues, de dar a comprender que dicho principio ha de ser el único punto donde deben converger la Aritmética y la Geometría, para dar con la cúspide de la Matemática, o sea la generación, comparación y determinación de las leyes que existen entre el *Espacio y Tiempo,* fórmula simbólica que debe comprender, el cuanto, el dónde y el cómo de dicha cantidad.

Fija la primera división dual*, el Tiempo y el Espacio*: El Tiempo, determinante del cuanto, o sea del número; el Espacio, engendrador del cuanto, como y donde de las figuras geométricas, según su magnitud, figura y posición.

Nos hemos propuesto empezar nuestras investigaciones por la ciencia engendrada por el Espacio, o sea la Geometría, puesto que en ésta se halla, podríamos decir, la cuna de nuestros conocimientos matemáticos, por más que, en la escuela Pitagórica, parezca que tuvieran los números el derecho de primacía, empero hasta en las consideraciones numéricas que se atribuyen a dicha escuela, es de ver como se originan en la Geometría, así lo corrobora: el célebre ***gnomon***, engendrador de todos los números; la división de éstos en pares-simétricos, e impares-asimétricos; comparaciones deducidas todas de figuras geométricas, y en particular del triángulo rectángulo isósceles, considerado como polígono elemental. Y si esto no bastara llamaríamos la atención acerca la inscripción célebre de Platón, puesta de manifiesto en el frontispicio de su academia para que el mundo entero supiera la importancia que debe darse a la Geometría. Además que nadie ignora la relación íntima que existe entre la cantidad continua y discontinua, de tal modo, que no se concibe la realidad de los números fraccionarios e inconmensurables, si no se refiere la segunda cantidad a la primera.

Ante razones tan poderosas, creemos fundado, pues, empezar nuestras consideraciones por la Geometría, que se origina en el Espacio.

Espacio y extensión; he aquí la primera división dual que por su importancia requiere que detengamos nuestros pasos por algunos momentos. Lo primero supone negación de límites; lo segundo los afirma: Lo primero se expresa por infinito; lo segundo por finito, dando margen la unión de esas dos cantidades a una serie de métodos, que no tienen otro fin que el de salvar este paso terrible, que ha formado por espacio de mucho tiempo uno de los principales escollos de esta ciencia modelo.

Al extender el hombre su vista por ese vasto firmamento que le rodea, la primera idea que le acude, es la de lo infinitamente grande; al contrario de cuando concentra sus miradas en esos seres microscópicos, cuyas dimensiones se reducen casi a cero; entonces, si bien concibe la idea de lo infinito, es, no obstante, la de lo infinitamente pequeño.

Estas dos ideas incomprensibles, sin embargo, tienen el poder de darnos a conocer la verdadera expresión de lo finito, conforme la doctrina filosófica dualística en oposición de partes: estas dos ideas de infinito, aunadas, forman los elementos constitutivos de todo lo que cabe dentro de la esfera de acción del hombre, o sea de todo lo finito, razón por la cual el célebre Leibnitz, sostiene que lo finito, no es más que la síntesis de los dos infinitos, o como quien dice, un número infinitamente grande de infinitamente pequeños. De tal manera, que la idea de lo finito, no es mas que una consecuencia legítima de la idea de lo infinito.

Conclusión notable y sorprendente para quien no se ha fijado en semejantes cuestiones, ni ha sondeado debidamente la doctrina que sostenemos. Verdad es que parece anómalo, a primera vista, que hayamos de partir del infinito para conocer lo finito, cuando la primera idea es consecuencia de la segunda, en el supuesto de negar los límites a que esta sujeto todo cuerpo; mas estudiada la cuestión con detenimiento, cabe el comprender, como un conocimiento incompleto de la cantidad finita, baste para remontarse por las altas regiones del infinito, y desde allí deducir, como a corolario, un estudio completo y acabado de la cantidad finita; estudio que habría sido casi enteramente imposible realizar, si desde un principio no hubiésemos roto el estrecho círculo que nos sujetara. ¡Que otra cosa no hace el artista, cuando de las partes en bosquejo de un cuadro pasa a buscar el todo armónico y bello de su concepción artística, para descender otra vez a los detalles, a fin de darles vida y expresión!

La relación, pues, de esas cantidades tan importantes, que no sabemos dónde tienen el punto de unión, ha dado origen a varios métodos interesantísimos que se denominan: de agotamiento, de los límites, de los indivisibles, de los infinitamente pequeños; todos los cuales pueden reducirse a dos grupos: 1º Los que conducen de lo finito a lo infinito (Agotamiento y límites), 2º Los que pasan de lo infinito a lo finito (Infinitamente pequeños e indivisibles).

Hagamos un poco de historia antes de dejar este punto tan notable, consagrando al propio tiempo algunas líneas al inmortal Leibnitz, que es el que más ha influido en la unión de esas dos cantidades.

Si fijamos nuestra atención en los tiempos antiguos, veremos aparecer la idea de infinito, como de paso, y sin unión ni enlace alguno. Así en la escuela Jónica hallamos a *Anaximandro* que estudiando el infinito lo diviniza, al contrario de *Anaxímenes* que tiende a materializarlo; en la escuela Itálica encuéntrase un Archytas que se ocupa de esta cuestión, y hasta el mismo Aristóteles, hablando de las doctrinas de Pitágoras, dice: «El infinito es par, porque es el par que envuelto y determinado por el impar da a los seres el elemento del infinito»

Mas todas estas consideraciones de la antigüedad, se refieren al infinitamente grande, y aun de una manera implícita y vaga: de suerte, que esas ideas no se solidan hasta el siglo XVII; siglo de los analistas modernos; siglo en que los dos infinitos aunados, se sujetan a la doctrina dual, formando métodos seguros y fecundos para identificarse con el pensamiento de Dios geómetra. En esa época, todas las naciones, se ocupan con ardor del análisis de los dos infinitos. Entre los geómetras italianos, hallamos un Miguel-Ange Ricci, que trata de los máximos y mínimos, así como de la teoría de las tangentes, entre los ingleses encontramos al distinguido Juan Wallis, inventor de la Aritmética de los infinitos; cuyos prosélitos son los no menos célebres Brouncker, Willian Neil, Wren, Isaac Barrow, etc. entre los geómetras holandeses, descubrimos a los notables *Schooten*, Hudde, Llure, Huygens; y para terminar, entre los alemanes aparecen un Kauffmann, un Walther de Ischirnhausen.etc.

Con todo, el preclaro genio que ha llegado a dominar este punto con toda lucidez, el que ha sabido formar un método general para toda la matemática en el terreno puro y abstracto de la cantidad, es, sin disputa, el Aristóteles de nuestros tiempos modernos, el nunca bastante alabado Leibnitz; mediante la feliz concepción de su diferencial. Verdad es que el libro de *Horologia-oscillatorio*, junto con la lectura de las cartas de Pascal, y sobre todo el *Opus geometricum de Gregorio de Saint-Vincent*, le abrieron, como el mismo confiesa, horizontes nuevos para el estudio profundo de la Matemática, hasta el punto de descubrir la ley de continuidad que forma el gran principio de todas sus especulaciones científicas; mas no se crea que ese varón notable, ese genio afortunado de los tiempos modernos, no tuviera que luchar entre sus contemporáneos; empero luchó y venció, a pesar de la guerra desusada que le libraron sus enemigos, envidiosos de su gloria. Y es que cuando la inteligencia del hombre está alumbrada por la divinidad, siente en su interior, el mísero mortal, como una voz que le dice «adelante, adelante, no te asuste, no te intimide esa turba multa de necios, sedientos de tu fama»

Rindamos, pues, un tributo de respeto y admiración al insigne filósofo moderno, cuya franca e inspirada pluma, cual estrella polar, debe guiar a las generaciones futuras en sus investigaciones científicas.

¡Loor y prez al sabio Leibnitz, cuya sombra se levanta de su tumba para tomar cada vez mayores dimensiones en el vasto firmamento de la Humanidad, pues si un Arquímedes, concibió una palanca capaz de desquiciar la tierra, el inmortal Leibnitz, encuentra el punto de apoyo de la poderosa palanca del análisis, que debe acercar la inteligencia humana, al trono del Altísimo, dó reside la verdad absoluta de todo lo creado!

En la confianza de que el lector nos habrá dispensado este arranque natural del corazón, efecto sin duda del gran respeto que nos merece la figura más notable de nuestros tiempos modernos, nos permitiremos la libertad de continuar nuestro estudio, después de haber presentado el dualismo entre la Extensión y el Espacio, o sea entre la cantidad finita e infinita, con el mayor desarrollo posible, atendidos los límites de nuestro escrito.

Desde lo antiguo que la extensión se divide en dos partes: extensión real y abstracta; extensión de tres y dos o una dimensiones: división notable, que ha dado origen a las inspiradas concepciones de *Poncelet*, desarrolladas en su geometría proyectiva, que tanto ha llamado la atención de todos los sabios. Y no se crea, que si estrechamos los límites de la Geometría, deje de descubrirse la doctrina que sostenemos: así, por ejemplo, en la teoría de los polígonos, hallamos dos ideas fundamentales; lados y ángulos; elementos necesarios para todas sus ulteriores combinaciones. En la semejanza de figuras, encontramos también dos condiciones principales que la determinan: proporcionalidad de lados e igualdad de ángulos. En la igualdad de figuras, descubrimos las mismas condiciones anteriores, solo que la razón de los lados homólogos, es igual a la unidad. Ahora, si en vez de combinar rectas, tratamos de relacionar la recta con la curva, aun se hará más notable el principio de dualidad. Arquímedes, decía que para constituirse en jefe de una ciencia, era preciso, ante todo, idear un método, y así él lo realizó para salvar el paso expuesto de la recta a la curva, aplicándolo en particular al valor determinante de la relación de la circunferencia al diámetro. Para ello supuso dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito a la circunferencia, los cuales, considerados como a dos variables, podían acercarse a la curva tanto como se quisiera, permitiendo diferenciarse en menos de una cantidad dada por pequeña que fuera; método fecundo, llamado de *exhaustion* o de agotamiento; principio dual en oposición de partes, pues mientras la variable menor crece, la mayor disminuye, estrechándose indefinidamente estos dos valores para acercarse más y más al verdadero valor de la circunferencia. Una cosa análoga hallaríamos si se tratara de resolver el mismo problema por procedimientos distintos: en el método de los isoperímetros, por ejemplo, daríamos con dos fórmulas, que harían las veces de las dos variables anteriores, y cuyos valores, representantes de los radios rectos y oblicuos de los diferentes polígonos, que se irían sucediendo, se aproximarían más y más. Y lo mismo podríamos decir, respecto el método de las áreas, con las dos formulas determinantes de las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo.

Con todo, en donde el principio dual toma proporciones colosales, es en la geometría superior, creada por *Desargues, Pascal y Brianchon*, y llevada a su mayor apogeo por *Steiner*. En esta notable geometría, aparecen como de relieve, los delineamientos de la dualidad, que con tanto acierto ha sabido señalar el insigne matemático de nuestro siglo, M. Chasles. Justo es que manifestemos, aunque sea a grandes rasgos, la importancia de nuestra tesis, es esa Geometría nueva, que, según la chistosa ocurrencia de M. Gergonne, viene destinada a llevar la ciencia matemática, por partida doble. Muchos ejemplos podríamos presentar, a cuál más notable y preciosos; empero, en materia de suyo tan árida, nos concretaremos a lo más fundamental e importante, por ejemplo, al célebre exágrama místico de Pascal, el cual dice así: «*Los puntos de encuentro de los lados opuestos de un exágono inscrito en una cónica, están en línea recta*»

Brianchon formó el correlativo de ese teorema, del modo siguiente: «*Las tres diagonales que juntan dos a dos los vértices de un exágono circunscrito a una cónica, pasan por un mismo punto*»

Incalculables son las consecuencias que se deducen de estos dos principios, sobre todo si el exágono se transforma en pentágono, cuadrilátero o triángulo, hallándose en cada caso particular del principio de Pascal, su correlativo, según las consideraciones de Brianchon.

Para completar los principios anteriores pondremos los siguientes teoremas, importantes también bajo todos conceptos:

«Dado un exágono inscrito en una sección cónica, si se toman los puntos de intersección de los lados opuestos, luego los puntos de intersección de las tres diagonales con los dos lados opuestos, los nueve puntos, así obtenidos, están situados sobre tres rectas, que pasan por un mismo punto»

Correlativo.
«Dado un exágono circunscrito a una cónica, si se juntan por rectas los vértices opuestos, luego cada vértice al punto de concurso de los dos lados adyacentes a los que pasan por este vértice, las nueve rectas así obtenidas pasan tres a tres, por tres puntos, que están en línea recta»

Creemos que estos pocos ejemplos, bastarán para dar a comprender, la importancia del principio dual, en esa geometría superior, donde cada teorema, lleva su correlativo, y en que las rectas y puntos del primero, se transforman, en puntos y rectas del segundo. Principio dual, en oposición de partes.

Es inútil que hagamos extensivas nuestras consideraciones a la Geometría del espacio, pues hallaríamos una justa correspondencia con la plana, transformando tan solo las palabras de rectas y puntos, en planos y aristas, no solo en la Geometría elemental, sino en la superior.

Ha llegado el momento, de fijarnos en el segundo elemento de la Matemática **El Tiempo** no para estudiarlo en si, sino como engendrador del *cuánto* o sea del *número*, a fin de descubrir en la Aritmética particular y universal, el principio establecido ya en la Geometría, y aunar así estas dos ramas de la Matemática, en una sola fórmula simbólica, última aspiración de los verdaderos amantes del saber. Averigüemos como.

Todo número resulta de una dualidad preestablecida entre la cantidad que se pretende medir, y otra de la misma especie que se toma por unidad.

Las operaciones que con los números pueden ejecutarse son de dos clases; unas tienden a componer, otras a descomponer, resultando en conjunto seis operaciones que dos a dos forman un verdadero sistema dual, en oposición de partes; por esto, se considera la resta regresiva de la suma, la división de la multiplicación, y las raíces de las potencias. Además, toda operación aritmética, se sujeta a un sistema de numeración y en todo sistema de numeración, obra el principio dual, determinado por la fijeza de la base, y la variabilidad de cada cifra, que constituye el valor absoluto de la misma. Estas consideraciones, han llamado de tal modo la atención de algunos distinguidos matemáticos, que en su virtud, han procurado romper este círculo de hierro que les aprisionaba, para estudiar el número en si, sin estar sujeto a ninguna base. Estudio que ha dado resultados sorprendentes e inesperados. Vamos a reseñar alguno de esos trabajos notables desarrollados por *Pascal, Euler, Fermat, Gauss, Legendre*, siendo éstos, casi los únicos, que se han dedicado con entusiasmo al arduo y espinoso estudio de la Aritmética pura.

La serie natural de los números es:

1, 2, 3, 4, 5, ... n.

Esta serie nada nos dice en si, ni establece relaciones ni armonía alguna, a no ser que se procure hallar algún punto de comparación entre estos mismos números, estudiados en su propia naturaleza. De estas comparaciones ha resultado la primera división, clasificándolos en elementales o primarios, y compuestos. Las notables fórmulas de los números perfectos, de los amigables, y la inspirada, aunque no del todo demostrada de Euler, respecto la suma de los factores primos y compuestos de un número, son suficiente para hacernos ver de momento la importancia de esos estudios, los cuales, toman mayores proporciones en las formas algorítmicas, representantes de números figurados y poligonales, de cuyo análisis resulta que: el décuplo de todo número trigonal, sumado con la unidad, produce un cuadrado; que los números trigonales son cuadrados perfectos, que lo son también los productos por veinticuatro, más la unidad de los pentagonales etc. etc. De esta suerte, se llega a las conclusiones célebres de Fermat, algunas de ellas completamente originales, a la par que curiosas, por ejemplo: Todo número es o trigonal o está compuesto por dos o tres números trigonales; o es el mismo cuadrado, o está compuesto por dos, tres o cuatro cuadrados; pentagonal o compuesto por dos, tres, cuatro o cinco números pentagonales, etc.

Mas si notables son estos resultados, no son en cambio suficientes para formar un cuerpo de doctrina, tal como es de desear. A este fin se han agrupado los números de tal modo que se sujeten siempre al principio dual, conforme la base filosófica que sostenemos, lo que es factible, como se deja comprender en las descomposiciones siguientes, deducidas de la serie natural de los números:

$$\begin{cases} 0,2,4,6,\ldots \\ 1,3,5,7,\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} 0,3,6,09,\ldots \\ 1,4,7,10,\ldots \\ 2,5,8,11,\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} 0,4,08,12,\ldots \\ 1,5,09,13,\ldots \\ 2,6,10,14,\ldots \\ 3,7,11,15,\ldots \end{cases}$$

cuyos grupos pueden expresarse por las fórmulas siguientes:

$$\begin{matrix} 2x+0 \\ 2x+1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x+0 \\ 3x+1 \\ 3x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+0 \\ 4x+1 \\ 4x+2 \\ 4x+3 \end{cases} \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Todas estas fórmulas parciales, pueden venir expresadas por la general $Kx+\alpha$. Forma dual en que el segundo término se halla enlazado evidentemente con el factor *k* del primero, por representar todos los números enteros inferiores a éste. De esta fórmula notable dedúcense dos teorías: la divisibilidad y las congruencias, según sea o no, el segundo término de la fórmula general, igual a cero; ramas importantes, que están destinadas a llenar los grandes vacíos que aun se notan hoy, en el difícil estudio de la Aritmética trascendental.

Falta ver, ahora, la relación que guarda esta síntesis Aritmética, con la forma dual geométrica, representante de las cantidades, en su mayor grado de generalidad, o sea con las impropiamente llamadas imaginarias. Sabemos que Descartes, realizó la dualidad, en las cantidades reales, dividiéndolas en positivas y negativas.

Pero los preciosos trabajos de *Buée*, seguidos más tarde por los de *Wronski* y *Vallés*, dieron a comprender una nueva dualidad, expresada por dos rectas perpendiculares, verdadera expresión del imaginarismo puro; y gracias a los trabajos de Menelaüs y Ptolomeo, perfeccionados por nuestros matemáticos modernos, hemos podido expresar el valor de una imaginaria dirigida, trigonométricamente, por medio del módulo y argumento respectivo, en que hace referencia a un sistema de coordenadas polares; y como quiera que hemos hallado ya la forma numérica $Kx+\alpha$, expresada bajo la forma dual, a la par como las imaginarias, mediante su módulo y argumento, es claro que si afectamos a α de $\sqrt{-1}$ podremos asociar estos dos resultados de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+d^2}}\sqrt{-1}\right)=\mathrm{M}\left\{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\sqrt{-1}\right\} \\ \mathrm{K}\,x+\alpha\sqrt{-1}=\sqrt{k^2x^2+\alpha^2}\left(\dfrac{kx}{\sqrt{k^2x^2+\alpha^2}}+\dfrac{\alpha}{\sqrt{k^2x^2+\alpha^2}}\sqrt{-1}\right)=\mathrm{M}'\left\{\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\sqrt{-1}\right\} \end{array}\right\}=\mathrm{M}''\left(\cos\gamma+\operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1}\right)$$

Consecuencia notabilísima, pues estas expresiones sintetizan completamente en forma dual, y en una misma fórmula trigonométrica, según la expresión de las cantidades imaginarias, todas las ramas de esta Ciencia tan importante que venimos estudiando *La Matemática.* Empero no siempre los números se estudian conforme lo hemos hecho hasta aquí, pues, también se ha procurado agruparlos, sujetándolos a una cierta ley algebraica, como va indicado en las nuevas fórmulas generales, tales como: $a+bx+cx^2$; $a+bx+cx^2+dx^2$; siendo una de las más notables la analítica homogénea binaria y cuadrática, representada por $ax^2+2bxy+cy^2$. Esta fórmula tan fecunda, ha merecido llamar la atención de sabios tan distinguidos como Pell, Silvestre, Cayley, etc., promoviendo estos trabajos el estudio de las determinantes, las cuales vienen a coronar nuestros tiempos modernos, pero que afirman una vez más nuestro punto doctrinal, pues la base de dichas determinantes, en último análisis, no es mas que un principio dualístico múltiplo coordinativo, realizado en la simetría de partes. Y fácil es comprender, como dichas determinantes, en virtud de la alternancia de signos, pueden agruparse en dos, todos los términos, para alcanzar la forma dual sintética de toda la determinante, expresada por $\alpha - c$.

Es tanta la importancia que se atribuye hoy, por todos los matemáticos del mundo, a esos determinantes, que no parece sino que ellas, vengan designadas a regir los destinos de esta ciencia modelo.

Y por esto, se procura amoldar, digámoslo así, bajo esta forma, varias expresiones de la Geometría analítica, lo que es posible, generalmente, atendida la simetría que se nota en el desarrollo de muchos cálculos.

Bien es verdad que para problemas sencillos, quizás sea más difícil hallar el resultado en forma de determinante, que no directamente, empero para problemas complicados, nadie puede dudar de la ventaja que habrá en presentar el resultado siempre bajo una misma forma dual y simétrica, siendo esta ventaja tanto mayor, cuanto mas complicado sea el problema, pues este es el poder de todo concepto o fórmula muy sintética.

Así, si bien el valor de la determinante, representante del área de un triángulo en función de los tres lados del mismo, no deja de presentar mas complicación que la fórmula elemental que todos conocen; empero, este pequeño inconveniente queda sobradamente compensado para cuando se tratan de resolver problemas tan complicados como, por ejemplo, la determinación de radios de esferas tangentes a cuatro esferas dadas, cuya determinante bellísima, se atribuye a *M. Bauer*.

Para formarse cargo de todo cuanto acabamos de decir, terminaremos este trabajo, anotando algunos ejemplos de determinantes, representantes de algunos valores muy conocidos de la Geometría, a fin de que a simple vista, se puedan apreciar las armonías de dualidad, simetría y uniformidad que resultan en dichos desarrollos:

$$2\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Fórmula representante del área de un triángulo en que S representa el área del mismo, siendo: $x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3$ las coordenadas de sus tres vértices.

$$16\,\mathrm{S}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{d}_{12} & \mathrm{d}_{1} \\ 1 & \mathrm{d}_{12} & 0 & \mathrm{d}_{23} \\ 1 & \mathrm{d}_{31} & \mathrm{d}_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

Fórmula del área del triángulo en función de sus tres lados, designando $: \mathrm{d}_{1\cdot 2}\ \mathrm{d}_{1\cdot 3}\cdots$ los cuadrados de las distancias de los vértices correspondientes según los subíndices.

$$-36\ \mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & e_2 & c_2 \\ a_2 & 0 & b_2 & f_2 \\ e_2 & b_2 & 0 & d_2 \\ c_2 & f_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Volumen del tetraedro en función de R radio de la esfera circunscrito al mismo y de *a, b, c, d, e, f,* pares de aristas opuestas de dicho tetraedro.

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

Relación entre las distancias mutuas de cinco puntos situados de una manera cualquiera en el espacio, designando $d_{12}\ d_{13}$ ...... los cuadrados de las distancias mutuas de los vértices correspondientes según los subíndices.

$$0=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & 1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ 1 & -r_1 & r_1^2 & r_1^2+r_2^2-d_{1_2} & r_1^2+r_3^2-d_{1_3} & r_1^2+r_4^2-d_{1_4} \\ 1 & -r_2 & r_2^2+r_1^2-d_{2_1} & r_2^2 & r_2^2+r_3^2-d_{2_3} & r_2^2+r_4^2-d_{2_4} \\ 1 & -r_3 & r_3^2+r_1^2-d_{3_1} & r_3^2+r_2^2-d_{3_2} & r_3^2 & r_3^2+r_4^2-d_{3_4} \\ 1 & -r_4 & r_4^2+r_1^2-d_{4_1} & r_4^2+r_2^2-d_{4_2} & r_4^2+r_3^2-d_{4_3} & r_4^2 \end{vmatrix}$$

Radios de esferas tangentes a cuatro esferas dadas, cuyos radios son $r_1\ r_2\ r_3\ r_4;\ d_{1_2}\ d_{1_3}....$ designan los cuadrados de las distancias respectivas a los centros de dichas esferas y x el radio desconocido.

Hemos llegado al fin de nuestras consideraciones científicas, después de haber manifestado la acción de nuestra doctrina filosófica en todo el curso de la Matemática, y en particular en esos últimos tiempos, mediante la teoría de las determinantes. Antes de dejar la pluma, empero, creemos del caso manifestar, aunque sea de paso, nuestra última idea, que quizá influya en el feliz porvenir de la ciencia que estudiamos. Los determinantes que hoy se conocen, refiérense, generalmente, a cantidades reales correspondientes a radios vectores, cuya evolución es de 0° ó 180°, según los términos sean positivos o negativos; y esto, conforme la teoría evolutiva de las cantidades imaginarias, relacionadas a un sistema de ejes polares. Pues bien, animados, nosotros, por ese espíritu generalizador, bien podríamos prescindir de esa condición concreta, para estudiar las determinantes para evoluciones cualesquiera, o sea desde 0° hasta ∞^0, a fin de llegar así, al punto más culminante de nuestras consideraciones dualísticas, consiguiendo unir bajo la expresión dual en simetría de partes, todas las ramas de la Matemática, formando de esta ciencia modelo, un solo haz armónico, bello y sublime, término de todas las aspiraciones más nobles del hombre científico. Y ya que hoy se trasmite la palabra de un confín a otro de la tierra con la velocidad del rayo; ya que hoy se ha llegado a liquidar los gases: bióxido de nitrógeno, formeno, óxido de carbono y oxígeno; ya que hoy las chimeneas ostentan con altivez sus negras frentes, para sellar con ellas el siglo que nos vio nacer; justo es que los que se dedican a la Matemática pura, procuren aunar todas sus fuerzas, para constituir un cuerpo de doctrina único, seguro e inquebrantable, a fin de que todas las ciencias que se alimentan de esta Ciencia madre, no titubeen jamás en tomar de ella, todos aquellos principios que crean necesarios, para sus aplicaciones, seguros de que, cual madre cariñosa, ha de guiar sus pasos con seguridad y provecho.

Tarragona 15 Diciembre 1.878
Lauro Clariana Ricart