Aplicación de las determinantes

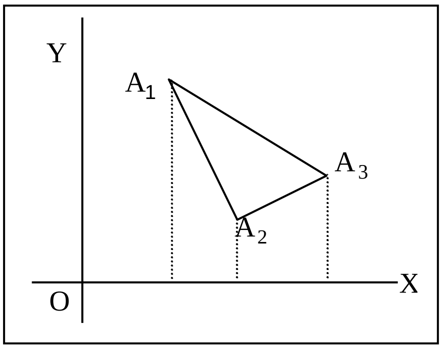
a la

Geometría

1879

Siendo de tanta trascendencia hoy, el estudio de las determinantes, vamos aplicarlas en algunas cuestiones geométricas, procurando detallar en todo lo que sea posible los cambios y operaciones que hay que ejecutar en las transformaciones, a fin de hacerlo asequible a los que no han tenido todavía ocasión de dedicarse a esta clase de estudios.

Área de un triángulo en función: 1º de las coordenadas de sus vértices; 2º de las longitudes de sus lados.



Determinemos primero el área del triángulo $A_1A_2A_3$ en función de las coordenadas $(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3)$ de sus vértices respectivos.

Según se desprende fácilmente de la figura adjunta resulta, llamando S la superficie del triángulo,

$$S = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_3 + y_2)$$

o sea

$$2S = x_3y_3 - x_1y_3 + x_2y_1 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_2$$

simplificando y ordenando debidamente estos términos se obtiene:

$$2S = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \quad (\alpha)$$

Si tomamos , ahora, la determinante general:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

comparándola con la siguiente, fácil es ver que resulta el segundo miembro de la igualdad (α).

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, \\ 1, & x_2, & y_2, \\ 1, & x_3, & y_3, \end{vmatrix}$$

Luego podremos escribir definitivamente:

$$2S = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, \\ 1, & x_2, & y_2, \\ 1, & x_3, & y_3, \end{vmatrix}$$

Area doble del triángulo bajo la forma de determinante y en función de las coordenadas de los tres vértices de dicho triángulo.

Determinemos, ahora, el área del triángulo en función de sus tres lados. Para esto habrá que modificar la última determinante hallada. Ella permite ser escrita de las dos maneras siguientes:

$$2S = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & x_1 & y_1 \\ 0, & 1, & x_2 & y_2 \\ 0, & 1, & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad 2S = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, \\ 1, & 0, & x_1 & y_1 \\ 1, & 0, & x_2 & y_2 \\ 1, & 0, & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Multiplicando estas dos determinantes, tendremos:

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 1.0+0.1+0.0+0.0, & 1.1+0.0+0.x_1+0.y_1, & 1.1+0.0+0.x_2+0.y_2, & 1.1+0.0+0.x_3+0.y_3 \\ 0.0+1.1+x_1.0+y_1.0, & 0.1+1.0+x_1.x_1+y_1.y_1, & 0.1+1.0+x_1.x_2+y_1.y_2, & 0.1+1.0+x_1.x_3+y_1.y_3 \\ 0.0+1.1+x_2.0+y_2.0, & 0.1+1.0+x_2.x_1+y_2.y_1, & 0.1+1.0+x_2.x_2+y_2.y_2, & 0.1+1.0+x_2.x_3+y_2.y_3 \\ 0.0+1.1+x_3.0+y_3.0, & 0.1+1.0+x_3.x_1+y_3.y_1, & 0.1+1.0+x_3.x_2+y_3.y_2, & 0.1+1.0+x_3.x_3+y_3.y_3 \end{vmatrix}$$

Estos valores reducidos dan:

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & x_1^2+y_1^2, & x_2.x_1+y_2.y_1, & x_3.x_1+y_3.y_1 \\ 1, & x_1.x_2+y_1.y_2, & x_2^2+y_2^2, & x_3.x_2+y_3.y_2 \\ 1, & x_1.x_3+y_1.y_3, & x_2.x_3+y_2.y_3, & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}$$

Multiplicando las tres líneas horizontales por -2, luego dividiendo la primera columna vertical por -2, la determinante queda multiplicada por 4, resultando:

$$16\mathrm{S}^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -2\left(x_1^2 + y_1^2\right), & -2\left(x_2.x_1 + y_2.y_1\right), & -2\left(x_3.x_1 + y_3.y_1\right) \\ 1, & -2\left(x_1.x_2 + y_1.y_2\right), & -2\left(x_2^2 + y_2^2\right), & -2\left(x_3.x_2 + y_3.y_2\right) \\ 1, & -2\left(x_1.x_3 + y_1.y_3\right), & -2\left(x_2.x_3 + y_2.y_3\right), & -2\left(x_3^2 + y_3^2\right) \end{vmatrix}$$

Si agregamos, ahora, a las tres líneas horizontales últimas, la primera sucesivamente multiplicada por:

$$x_1^2 + y_1^2 \qquad x_2^2 + y_2^2 \qquad x_3^2 + y_3^2$$

se tiene:

$$16\mathrm{S}^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + x_1^2 + y_1^2, & -2\left(x_2.x_1 + y_2.y_1\right) + x_1^2 + y_1^2, & -2\left(x_3.x_1 + y_3.y_1\right) + x_1^2 + y_1^2 \\ 1, & -2\left(x_1.x_2 + y_1.y_2\right) + x_2^2 + y_2^2, & -2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + x_2^2 + y_2^2, & -2\left(x_3.x_2 + y_3.y_2\right) + x_2^2 + y_2^2 \\ 1, & -2\left(x_1.x_3 + y_1.y_3\right) + x_3^2 + y_3^2, & -2\left(x_2.x_3 + y_2.y_3\right) + x_3^2 + y_3^2, & -2\left(x_3^2 + y_3^2\right) + x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}$$

Si a las tres columnas verticales últimas, agregamos por fin la primera multiplicada sucesivamente por los mismos factores de la determinante anterior, se deduce:

$$16\mathrm{S}^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + 2\left(x_1^2 + y_1^2\right), & -2\left(x_2.x_1 + y_2.y_1\right) + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2, & -2\left(x_3.x_1 + y_3.y_1\right) + x_1^2 + y_1^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ 1, & -2\left(x_1.x_2 + y_1.y_2\right) + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2, & -2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + 2\left(x_2^2 + y_2^2\right), & -2\left(x_3.x_2 + y_3.y_2\right) + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ 1, & -2\left(x_1.x_3 + y_1.y_3\right) + x_3^2 + y_3^2 + x_1^2 + y_1^2, & -2\left(x_2.x_3 + y_2.y_3\right) + x_3^2 + y_3^2 + x_2^2 + y_2^2, & -2\left(x_3^2 + y_3^2\right) + 2\left(x_3^2 + y_3^2\right) \end{vmatrix}$$

Si llamamos $d_{1.2}, d_{1.3}, d_{2.3}$ los lados respectivos $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ del triángulo dado; siendo:

$$d_{1.2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad d_{1.3} = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2, \quad d_{2.3} = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$$

simplificando y haciendo las sustituciones debidas en la última determinante resulta definitivamente:

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & d_{1.2}, & d_{1.3} \\ 1, & d_{2.1}, & 0, & d_{2.3} \\ 1, & d_{3.1}, & d_{3.2}, & 0 \end{vmatrix}$$

Determinante que nos da el área del triángulo en función de los lados del mismo.

Antes de terminar vamos a presentar otra aplicación muy curiosa de las determinantes al triángulo y que está íntimamente enlazada con lo que precede.

Para esto tomaremos el punto de origen en el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo; según el primer caso que llevamos estudiado podemos escribir:

$$2S = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}$$

Si designamos por R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, resulta

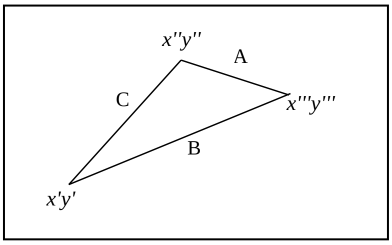
$$2SR = \begin{vmatrix} x' & y' & R \\ x'' & y'' & R \\ x''' & y''' & R \end{vmatrix}$$

y también

$$-2SR = \begin{vmatrix} x' & y' & -R \\ x'' & y'' & -R \\ x''' & y''' & -R \end{vmatrix}$$

multiplicando estas dos últimas determinantes, se tiene:

$$-4S^2R^2 = \begin{vmatrix} x'x' + y'y' - RR, & x'x'' + y'y'' - RR, & x'x''' + y'y''' - RR \\ x''x' + y''y' - RR, & x''x'' + y''y'' - RR, & x''x''' + y''y''' - RR \\ x'x''' + y'y''' - RR, & x''x''' + y''y''' - RR, & x'''x''' + y'''y''' - RR \end{vmatrix}$$



de la figura adjunta se desprende:

$$-\frac{1}{2}\left[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2\right]=-\frac{1}{2}c^2$$

mas por otra parte se deduce:

$$-\frac{1}{2}\left[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(x'^2-2x'x''+x''^2+y'^2+2y'y''+y''^2\right)\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-2x'x''-2y'y''+2\mathrm{R}^2\right)=x'x''+y'y''-\mathrm{R}^2$$

luego:

$$x'x''+y'y''-\mathrm{R}^2=-\frac{1}{2}c^2$$

De un modo análogo se obtiene:

$$x'x'''+y'y'''-\mathrm{R}^2=-\frac{1}{2}b^2, \qquad x''x'''+y''y'''-\mathrm{R}^2=-\frac{1}{2}a^2$$

Haciendo, pues todas las reducciones y sustituciones debidas en la última determinante se deducen:

$$-4\mathrm{S}^2\mathrm{R}^2=\begin{vmatrix} 0, & -\frac{1}{2}c^2, & -\frac{1}{2}b^2 \\ -\frac{1}{2}c^2, & 0, & -\frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2}b^2, & -\frac{1}{2}a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

esta determinante equivale a la siguiente:

$$-4\mathrm{S}^2\mathrm{R}^2=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}.0, & -\frac{1}{2}c^2, & -\frac{1}{2}b^2 \\ -\frac{1}{2}c^2, & -\frac{1}{2}.0, & -\frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2}b^2, & -\frac{1}{2}a^2, & -\frac{1}{2}.0 \end{vmatrix}$$

luego:

$$-4S^2R^2 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2 \\ c^2, & 0, & a^2 \\ b^2, & a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

comparando esta determinante con la general, tendremos:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_2c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

y aplicando este desarrollo al caso particular que nos ocupa se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2 \\ c^2, & 0, & a^2 \\ b^2, & a^2, & 0 \end{vmatrix} = 2a^2b^2c^2$$

Luego

$$-4S^2R^2 = -\frac{1}{8}\times 2a^2b^2c^2, \quad \text{o sea} \quad 16S^2R^2 = a^2b^2c^2$$

Despejando por fin el valor del radio se obtiene: $R = \frac{abc}{4S}$: Fórmula importante de la geometría elemental, la cual nos da el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, en función de los tres lados del mismo, y de su área.

Tarragona a 10 de Noviembre de 1879
Lauro Clariana Ricart