# Aplicación de las determinantes

# a la

# Trigonometría

1880

Grandes son las aplicaciones que saca hoy la ciencia de la célebre teoría de las determinantes; y como quiera que ignoramos que nadie se haya ocupado de desenvolver bajo la forma de determinante, las ecuaciones trigonométricas para la resolución de los triángulos planos, vamos nosotros a emprender esta tarea, reduciendo cada ecuación particular de la trigonometría a esta forma, obteniendo por fin una determinante sintética de los tres grupos de formulas trigonométricas, en donde se hallen debidamente combinados, armónica y simétricamente, los seis elementos de un triángulo.

Tomemos una ecuación cualquiera correspondiente al primer grupo, por ejemplo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

Esta ecuación puede sufrir las transformaciones siguientes:

$$\frac{1}{\mathrm{sen}^2 \mathrm{A}} \times a^2 \,\mathrm{sen}^2 \mathrm{A} = \left(b^2 \,\mathrm{sen}^2 \mathrm{A} + c^2 \,\mathrm{sen}^2 \mathrm{A} - 2bc\,\mathrm{sen}^2 \mathrm{A} \cos \mathrm{A}\right) \times \frac{1}{\mathrm{sen}^2 \mathrm{A}}$$

o también:

$$\frac{a^2\left(1-\cos^2 \mathrm{A}\right)}{\mathrm{sen}^2 \mathrm{A}} = \frac{b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\left(b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A} - c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\cos \mathrm{A}\right) + c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\left(c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A} - b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\cos \mathrm{A}\right)}{\mathrm{sen}^2 \mathrm{A}}$$

luego:

$$\frac{a^2\left(1-\cos^2 \mathrm{A}\right) - b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\left(b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A} - c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\cos \mathrm{A}\right) + c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\left(b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\cos \mathrm{A} - c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{A}\right)}{\mathrm{sen}^2 \mathrm{A}} = 0$$

Este resultado lo podemos expresar inmediatamente por un determinante, considerando:

$$a^2, \quad -b\,\mathrm{senA}, \quad \mathrm{c\,senA},$$

como los componentes algebraicos de las determinantes menores de segundo grado, expresadas por lo que hay dentro de los paréntesis en la igualdad anterior, y así resulta:

$$\frac{1}{\mathrm{sen}^2\mathrm{A}}\begin{vmatrix} a^2 & b\,\mathrm{senA} & c\,\mathrm{senA} \\ b\,\mathrm{senA} & 1 & \cos\mathrm{A} \\ c\,\mathrm{senA} & \cos\mathrm{A} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De la misma manera transformaríamos las demás ecuaciones del primer grupo bajo la forma de determinante.

Si pasamos al segundo grupo de fórmulas trigonométricas,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

se deduce:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}, \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}, \quad \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

igualdades que escritas bajo la forma de determinantes, se pueden expresar de la manera siguiente:

$$0 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B \\ a & b \end{vmatrix} (1) \quad 0 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ b & c \end{vmatrix} (2) \quad 0 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} C \\ a & c \end{vmatrix} (3)$$

Hallemos ahora un determinante que reasuma estas tres, multiplicándolas entre sí: de este modo multiplicando la (1) por la (2) resulta:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B + ab, & \operatorname{sen}^2 B + b^2 \\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C + ac, & \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + bc \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando este determinante por (3), se obtiene:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} B + ab \operatorname{sen} A + a \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C + a^2 c, & \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen} A + a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + b^2 \operatorname{sen} A - abc \\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + ab \operatorname{sen} C + c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C + ac^2, & \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen} C + b^2 \operatorname{sen} C + c \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - bc^2 \end{vmatrix} = 0$$

Esta determinante contiene ya los seis elementos triángulo debidamente combinado; empero, este resultado es producido por un solo grupo y no por los tres de la trigonometría, como pretendemos; a este fin averiguaremos, antes de desenvolver la determinante final, las que corresponden al grupo tercero siguiente:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} (\Delta)$$

Fácilmente se comprende que estas igualdades se pueden expresar bajo la forma de determinante, según puede verse a continuación:

$$a = \begin{vmatrix} b & -c \\ \cos B & \cos C \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a & -c \\ \cos A & \cos C \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a & -b \\ \cos A & \cos B \end{vmatrix}$$

Pero, antes de pasar adelante, hemos de advertir que si en el grupo ($\Delta$) eliminamos cosC y cosB, resulta:

$$a^3 - b^2 a - c^2 a + 2abc\cos A = 0$$

o sea

$$a\left(a^2 - 0\right) - b\left(ba - ac\cos A\right) + c\left(ab\cos A - ca\right) = 0$$

o también:

$$a^2\left(1-0\right) - b\left(b - c\cos A\right) + c\left(b\cos A - c\right) = 0\ ;$$

cuyo resultado puede ser escrito bajo la forma de determinante, debiendo ser ésta, equivalente a la que ya hallamos con referencia al primer grupo, solo que ahora adquiere la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ b - c\cos A & 1 & 0 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pues bien, teniendo ya los tres grupos de fórmulas trigonométricas bajo la expresión de determinante, podemos combinarlas entre sí para tener la determinante final, expresión genuina de las relaciones que existen entre los seis elementos de un triángulo. Sea la determinante ya hallada:

$$a = \begin{vmatrix} b & c \\ \cos B & \cos C \end{vmatrix}$$

la cual se puede representar por la de tercer grado siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \cos C & 1 & 0 \\ \cos B & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha)$$

Si tomamos la determinante correspondiente al segundo grupo:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}B & \operatorname{sen}C \\ b & c \end{vmatrix} = 0$$

podrá representarse también por la de tercer grado siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}B & \operatorname{sen}C \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (C)$$

Multiplicando (α) por (C), se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \operatorname{sen}B\cos C + b\cos B & \operatorname{sen}B & b \\ \operatorname{sen}C\cos C + c\cos B & \operatorname{sen}C & c \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando por fin esta determinante, combinación de las determinantes correspondientes a los dos grupos últimos de las fórmulas trigonométricas, por la determinante ya hallada, correspondiente al primer grupo, o sea:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ b - c\cos A & 0 & 1 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la determinante final:

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} a^2 + (b - c\cos A)(\operatorname{sen}B\cos C + b\cos B) + \\ (c - b\cos A)(\operatorname{sen}C\cos C + c\cos B), \end{matrix} & \begin{matrix} a^2 b + (b - c\cos A)\operatorname{sen}B + \\ \operatorname{sen}C(c - b\cos A), \end{matrix} & \begin{matrix} a^2 c + b^2 + c^2 \\ -2bc\cos A \end{matrix} \\ ab + \operatorname{sen}B\cos C + b\cos B & b^2 + \operatorname{sen}B & bc + b \\ ac + \operatorname{sen}C\cos C + c\cos B & bc + \operatorname{sen}C & c^2 + c \end{vmatrix} = 0 \ (\gamma)$$

Ahora podemos simplificar la primera línea; tomando el primer término resulta:

$$
\begin{aligned}
&a^2+(b-c\cos A)(\operatorname{sen}B\cos C+b\cos B)+(c-b\cos A)(\operatorname{sen}C\cos C+c\cos B)=a^2+b\operatorname{sen}B\cos C-\\
&c\cos A\operatorname{sen}B\cos C+b^2\cos B-bc\cos A\cos B+c\operatorname{sen}C\cos C-b\cos A\operatorname{sen}C\cos C+c^2\cos B-\\
&bc\cos B\cos A=a^3+a^2\cos B+b(\operatorname{sen}A\cos C+\cos A\operatorname{sen}C)\cos C-c\cos A\operatorname{sen}B\cos C+\\
&c(\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B)\cos C-b\cos A\operatorname{sen}C\cos C=a^3+a^2\cos B+b\operatorname{sen}A\cos^2C+\\
&c\operatorname{sen}A\cos B\cos C=a^3+a^2\cos B+\operatorname{sen}A\cos B(b\cos C+c\cos B)=a^3+a^2\cos B+a\operatorname{sen}A\cos C
\end{aligned}
$$

Si tomamos el segundo término de la primera línea

$$
\begin{aligned}
&a^2b+b\operatorname{sen}B-c\cos A\operatorname{sen}B+c\operatorname{sen}C-b\cos A\operatorname{sen}C=\\
&a^2b+b(\operatorname{sen}A\cos C+\cos A\operatorname{sen}C)-c\cos A\operatorname{sen}B+c(\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B)-b\cos A\operatorname{sen}C=\\
&a^2b+b\operatorname{sen}A\cos C+c\operatorname{sen}A\cos B=a^2b+\operatorname{sen}A(b\cos C+c\cos B)=a^2b+a\operatorname{sen}A
\end{aligned}
$$

Por fin, el tercer término de la primera línea da:

$$a^2c+b^2+c^2-2bc\cos A=a^2c+a^2=a^2(c+1)$$

Sustituyendo estos valores en la determinante ($\gamma$) resulta:

$$\begin{vmatrix} a^3+a^2\cos B+a\operatorname{sen}A\cos C & a^2b+a\operatorname{sen}A & a^2(c+1)\\ ab+\operatorname{sen}B\cos C+b\cos B & b^2+\operatorname{sen}B & bc+b\\ ac+\operatorname{sen}C\cos C+c\cos B & bc+\operatorname{sen}C & c^2+c\end{vmatrix}=0$$

o también

$$\begin{vmatrix} a(a^2+\operatorname{sen}A\cos C+a\cos B) & a(ab+\operatorname{sen}A) & a^2(c+1)\\ ab+\operatorname{sen}B\cos C+b\cos B & b^2+\operatorname{sen}B & b(c+1)\\ ac+\operatorname{sen}C\cos C+c\cos C & bc+\operatorname{sen}C & c(c+1)\end{vmatrix}=0$$

Partiendo la primera línea por $a$, y la última vertical por $c+1$, se tiene definitivamente:

$$\begin{vmatrix} a^2+\operatorname{sen}A\cos C+a\cos B & ab+\operatorname{sen}A & a\\ ab+\operatorname{sen}B\cos C+b\cos B & b^2+\operatorname{sen}B & b\\ ac+\operatorname{sen}C\cos C+c\cos B & bc+\operatorname{sen}C & c\end{vmatrix}=0$$

o sea

$$\begin{vmatrix} a(a+\cos B)+\operatorname{sen}A\cos C & ab+\operatorname{sen}A & a\\ b(a+\cos B)+\operatorname{sen}B\cos C & b^2+\operatorname{sen}B & b\\ c(a+\cos B)+\operatorname{sen}C\cos C & bc+\operatorname{sen}C & c\end{vmatrix}=0$$

determinante sintética de los tres grupos de fórmulas trigonométricas para la resolución de los triángulos planos.

Notable es sin duda la simetría y armonía que se nota en los diferentes términos de dicha determinante, poder admirable y característico de esta clase de expresiones.

Mas para convencernos de la verdad de este resultado basta probar, por fin, como el valor de esta determinante es realmente igual a cero, para lo cual podemos emplear, por ejemplo, el método de *Sarrus*, escribiendo los términos de la determinante anterior bajo la forma que sigue:

$$\left.\begin{array}{ccc} a(a+\cos B)+\operatorname{sen}A\cos C & ab+\operatorname{sen}A & a \\ b(a+\cos B)+\operatorname{sen}B\cos C & b^2+\operatorname{sen}B & b \\ c(a+\cos B)+\operatorname{sen}C\cos C & bc+\operatorname{sen}C & c \\ a(a+\cos B)+\operatorname{sen}A\cos C & ab+\operatorname{sen}A & a \\ b(a+\cos B)+\operatorname{sen}B\cos C & b^2+\operatorname{sen}B & b \end{array}\right\}$$

multiplicando respectivamente en cruz, separando los productos positivos de los negativos, se tiene:

$$[a(a+\cos B)+\operatorname{sen}A\cos C](b^2+\operatorname{sen}B)c-[c(a+\cos B)+\operatorname{sen}C\cos C](b^2+\operatorname{sen}B)a$$

$$[b(a+\cos B)+\operatorname{sen}B\cos C](bc+\operatorname{sen}C)a-[a(a+\cos B)+\operatorname{sen}A\cos C](bc+\operatorname{sen}C)b$$

$$[c(a+\cos B)+\operatorname{sen}C\cos C](ab+\operatorname{sen}A)b-[b(a+\cos B)+\operatorname{sen}B\cos C](ab+\operatorname{sen}A)c$$

Ahora verificando operaciones y simplificando, se obtiene:

$$(b^2+\operatorname{sen}B)\cos C(c\operatorname{sen}A-a\operatorname{sen}C)+(bc+\operatorname{sen}C)\cos C(a\operatorname{sen}B-b\operatorname{sen}A)+(ab+\operatorname{sen}A)\cos C(b\operatorname{sen}C-c\operatorname{sen}B)$$

empero, este resultado en virtud de las relaciones trigonométricas:

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a}=\frac{\operatorname{sen}B}{b}=\frac{\operatorname{sen}C}{c},$$

se reduce a cero; por lo tanto, queda con esto completamente probado que la última determinante que hemos hallado es verdadera.

Tarragona a 10 de Mayo de 1880
Lauro Clariana Ricart