Aplicación de las determinantes a la resolución de las Ecuaciones de cuarto grado

1880

El matemático Dostor resuelve las ecuaciones de tercer grado, valiéndose de una determinante circular compuesta de tres líneas; nosotros vamos a resolver las de cuarto grado, apoyándonos en el principio fundamental siguiente:

Cuando una determinante del orden enésimo tiene *n* permutaciones circulares en líneas o columnas, esta determinante es el producto de *n* factores de primer grado con relación a estas cantidades. Dichos factores son las sumas de los productos que se obtienen, multiplicando estas cantidades por las *n* potencias sucesivas de cada una de las *n* raíces enésimas de la unidad.

Bajo este supuesto, para resolver la ecuación de cuarto grado, supondremos la determinante siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

la cual podremos expresar, según el principio anterior, por

$$\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)\left(a+b\beta+c\beta^2+d\beta^3\right)\left(a+b\gamma+c\gamma^2+d\gamma^3\right)\left(a+b\delta+c\delta^2+d\delta^3\right)$$

siendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ las cuatro raíces de la unidad correspondiente a la ecuación $y^4 = 1.$ Pero como estas raíces se pueden hallar fácilmente, para conocer los valores de cada uno de los cuatro factores anteriores, bastará determinar las cantidades *a, b, c, d,* y así tendremos las cuatro raíces de la ecuación de cuarto grado correspondientes a la determinante Δ. Desarrollando, pues, la determinante $\Delta,$ tendremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & d & a \\ c & a & b \\ d & b & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & d & b \\ d & a & c \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix} =$$

$$a^2c^2 - acb^2 - acd^2 + a^2bd + a^2db - a^4 - ab^2c + b^4 + bdc^2 - b^2d^2 - ab^2c + a^2bd - c^2bd -$$

$$acb^2 - c^4 + c^2bd + a^2c^2 - acd^2 - d^2b^2 + a^2db + c^2bd - acd^2 - acd^2 + d^4 =$$

$$a^4 - \left(2c^2 + 4bd\right)a^2 + 4c\left(b^2 + d^2\right)a + c^4 - 4bdc^2 - \left(b^2 - d^2\right)^2$$

Este resultado nos dice que la determinante Δ se puede considerar como una ecuación de cuarto grado, en que *a* representa la incógnita.

Si hacemos, $a=-x$ resultará según las consideraciones anteriores:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -x & b & c & d \\ b & c & d & -x \\ c & d & -x & b \\ d & -x & b & c \end{vmatrix}=x^4-\left(2c^2+4bd\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x-4bdc^2-\left(b^2-d^2\right)^2=$$

$$\left(-x+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^2\right)\left(-x+b\beta+c\beta^2+d\beta^3\right)\left(-x+b\gamma+c\gamma^2+d\gamma^3\right)\left(-x+b\delta+c\delta^2+d\delta^3\right)$$

Si suponemos este resultado igual a cero, y lo comparamos con la ecuación general de cuarto grado $x^4+4px^2+8qx+4r=0$, identificando los resultados tendremos:

$$-\left(-2c^2+4bd\right)=4p \quad (1), \quad -4c\left(b^2+d^2\right)=8q \quad (2), \quad c^4-4bdc^2-\left(b^2-d^2\right)=4r \quad (3)$$

De la igualdad (2) se obtiene:

$b^2+d^2=-\dfrac{2q}{c}$, luego $\left(b^2+d^2\right)^2=\dfrac{4q^2}{c^2}$, o sea, $b^4+2b^2d^2+d^4=\dfrac{4q^2}{c^2}$ cuya igualdad puede transformarse en: $\left(b^2-d^2\right)^2=\dfrac{4q^2}{c^2}-4b^2d^2$. Sustituyendo este valor en (3), se tiene:

$$c^4-4bdc^2-\left(\frac{4q^2}{c^2}-4b^2d^2\right)=4r \quad (4)$$

Empero de (1) podemos deducir: $4bd=-2c^2-4p$, o sea también: $4b^2d^2=4\left(\dfrac{c^2}{2}+p\right)^2$

Haciendo las sustituciones debidas en (4), definitivamente se obtiene:

$$4r=c^4+\left(4p+2c^2\right)c^2-\left[\frac{4q^2}{c^2}-4\left(\frac{c^2}{2}+p\right)^2\right]=c^4+4pc^2+2c^4-\frac{4q^2}{c^2}+4\left(\frac{c^4}{4}+c^2p+p^2\right)$$

luego:

$c^6+4pc^4+2c^6-4q^2+c^6+4c^4p+4p^2c^2=4rc^2$; de donde $c^6+2pc^4+\left(p^2-r\right)c^2-q^2=0$

en cuya ecuación si suponemos $c^2 = z''$, resulta:

$$z''^3 + 2pz''^2 + \left(p^2 - r\right)z'' - q^2 = 0$$

Ecuación que no es mas que la *reducida* que se obtiene por el método de Cardan.

Una vez resuelta esta ecuación de tercer grado, se obtiene el valor *c*, por medio de la igualdad siguiente: $c = \pm\sqrt{z''}$, considerando *z''* como una de las tres raíces de la ecuación de tercer grado, que acabamos de hallar. Ahora, si el desarrollo de la determinante Δ, lo hubiésemos ordenado respecto las letras *b* ó *d*, habríamos encontrado la misma ecuación de tercer grado dependiente de *d* ó *b*, todo lo cual nos dice que las raíces de dicha ecuación de tercer grado, expresan los valores de $b^2 c^2 \ y \ d^2$; de suerte que llamando *z', z'', z'''*, las raíces de la reducida, éstas vendrán expresadas respectivamente por:

$$z' = b^2, \qquad z'' = c^2, \qquad z''' = d^2$$

de donde:

$$b = \pm\sqrt{z'}, \qquad c = \pm\sqrt{z''}, \qquad d = \pm\sqrt{z'''}$$

Resumiendo, por fin, por medio de una serie de igualdades los diferentes valores correspondientes a las determinante Δ, tendremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & b & c & d \\ b & c & d & -x \\ c & d & -x & b \\ d & -x & b & c \end{vmatrix} =$$

$$x^4 - \left(2c^2 + 4bd\right)x^2 - 4c\left(b^2 + d^2\right)x + c^4 - 4bdc^2 - \left(b^2 - d^2\right)^2 = x^4 + 4xp^2 + 8qx + 4r =$$

$$\left(-x + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3\right)\left(-x + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3\right)\left(-x + b\gamma + c\gamma^2 + d\gamma^3\right)\left(-x + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3\right) =$$

$$\left(-x \pm \sqrt{z'}.\alpha \pm \sqrt{z''}.\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\alpha^3\right)\left(-x \pm \sqrt{z'}.\beta \pm \sqrt{z''}.\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\beta^3\right)\left(-x \pm \sqrt{z'}\gamma \pm \sqrt{z''}.\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\gamma^3\right)$$

$$\left(-x \pm \sqrt{z'}.\delta \pm \sqrt{z''}.\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\delta^3\right) = 0$$

Empero este producto de cuatro factores puede ser igual a cero, siéndolo cada uno de dichos factores, luego:

$$\left.\begin{array}{l} -x \pm \sqrt{z'}.\alpha \pm \sqrt{z''}.\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\alpha^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\beta \pm \sqrt{z''}.\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\beta^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\gamma \pm \sqrt{z''}.\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\gamma^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\delta \pm \sqrt{z''}.\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\delta^3 = 0. \end{array}\right\}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{z'}.\alpha \pm \sqrt{z''}.\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\alpha^3 \\ x &= \pm\sqrt{z'}.\beta \pm \sqrt{z''}.\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\beta^3 \\ x &= \pm\sqrt{z'}.\gamma \pm \sqrt{z''}.\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\gamma^3 \\ x &= \pm\sqrt{z'}.\delta \pm \sqrt{z''}.\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\delta^3 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Estos cuatro valores constituyen las cuatro raíces de la ecuación de cuarto grado que habíamos pretendido hallar.

Ahora, como $\alpha, \beta, \gamma. \delta,$ representan las cuatro raíces de la ecuación $y^4 = 1$, o sea: $+1, \text{-}1, +\sqrt{\text{-}1}, \text{-}\sqrt{\text{-}1},$ sustituyendo estos valores particulares en (A) se tendrá definitivamente para las raíces de la ecuación de cuarto grado.

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{z'} \qquad \pm \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''}, \\ x &= \mp\sqrt{z'} \qquad \pm \sqrt{z''} \mp \sqrt{z'''}, \\ x &= \pm\sqrt{z'}\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''} \mp \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \\ x &= \mp\sqrt{z'}\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

De cada una de estas igualdades basta tomar los signos superiores o inferiores para tener los valores de las cuatro raíces, según sea el signo de q correspondiente a la reducida de tercer grado, pues el producto de los tres términos de una cualquiera de las igualdades anteriores debe darnos el valor de q con signo contrario, lo que es fácil de probar, ya sea directamente, o ya por el método de Cardan. Así, pues, descomponiendo el grupo (B) en dos, según q sea negativo o positivo, tendremos las raíces precisas que corresponden en cada caso, correspondientes a la ecuación de cuarto grado.

$$\left.\begin{aligned} x &= +\sqrt{z'} \qquad + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}, \\ x &= -\sqrt{z'} \qquad + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}, \\ x &= +\sqrt{z'}\sqrt{-1} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \\ x &= -\sqrt{z'}\sqrt{-1} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \end{aligned}\right\} \quad q\text{, negativa}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\sqrt{z'} \qquad - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}, \\ x &= +\sqrt{z'} \qquad - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}, \\ x &= -\sqrt{z'}\sqrt{-1} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \\ x &= +\sqrt{z'}\sqrt{-1} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}\sqrt{-1}, \end{aligned}\right\} \quad q\text{, positiva}$$

Al determinar las cuatro raíces de la ecuación de cuarto grado por el método de Cardan, se encuentran estos mismos valores para las raíces, solo que todos los términos resultan reales. Esta falta de unidad en los resultados depende de que por la teoría de las determinantes se resuelve la cuestión de un modo más general, pues considerando las raíces de la unidad tanto reales como imaginarias, es preciso suponer la reducida de tercer grado capaz de admitir también, si es posible, raíces reales e imaginarias; empero esto se puede suponer, porque si bien debe tener una raíz real y positiva, cabe suponer las otras dos imaginarias. Ahora bien, siguiendo el procedimiento de Cardan, según este supuesto, resultan para la ecuación de cuarto grado dos raíces reales y dos imaginarias, conforme hemos hallado directamente por la teoría de las determinantes.

Una duda, no obstante, puede presentarse y que conviene desvanecer. Habiendo dos raíces imaginarias, éstas deben ser conjugadas y en este concepto concretando los valores de z′ y z″ en el supuesto de ser las dos imaginarias conjugadas, pudiera creerse que al sumarlas o restarlas podrían alterar el resultado de las raíces definitivas; pero es fácil ver como a pesar de esto persisten dos raíces reales y otras dos imaginarias en la ecuación de cuarto grado, conforme vamos a demostrar. Sea $\sqrt{z'} = m + n\sqrt{-1}$, y $\sqrt{z''} = \mathrm{m} - \mathrm{n}\sqrt{-1}$, sustituyendo estos valores particulares en (B) resulta:

$$
\begin{aligned}
x &= \pm\left(m + n\sqrt{-1}\right) \pm \sqrt{z''} \pm \left(m - n\sqrt{-1}\right)\\
x &= \mp\left(m + n\sqrt{-1}\right) \pm \sqrt{z''} \mp \left(m - n\sqrt{-1}\right)\\
x &= \pm\left(m + n\sqrt{-1}\right) \mp \sqrt{z''} \mp \left(m - n\sqrt{-1}\right)\\
x &= \mp\left(m + n\sqrt{-1}\right) \mp \sqrt{z''} \pm \left(m - n\sqrt{-1}\right)
\end{aligned}
$$

simplificando se tiene:

$$
\begin{aligned}
x &= \pm\, 2m \qquad \pm \sqrt{z''}\\
x &= \mp\, 2m \qquad \pm \sqrt{z''}\\
x &= \pm\, 2n\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''}\\
x &= \mp\, 2n\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''}
\end{aligned}
$$

De modo que hasta en el caso de concretar la cuestión vemos como persisten las dos primeras raíces reales y las otras dos imaginarias, conforme se desprende del cuadro general (B).

Con esto queda, pues, completamente probado como valiéndonos de la teoría de las determinantes hemos logrado expresar las cuatro raíces de la ecuación: $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$, con un grado de generalidad mucho mayor que por el procedimiento de Cardan.

Y si bien las fórmulas reales de aquel autor permiten elevarse al caso del imaginarismo, después de varios rodeos, coincidiendo el resultado con el que nosotros hemos hallado directamente por medio de la teoría de las determinantes, no cabe duda que es más lógico suponer para fórmulas generales de las raíces, el caso que éstas comprendan cantidades reales e imaginarias, que no el que contengan solo valores reales.

Tarragona a 25 de Septiembre de 1880
Lauro Clariana Ricart