Puntos Umbilicales

del

Elipsoide

1880

Puntos umbilicales de una superficie son aquellos en que todas las secciones normales tienen la misma curvatura.

El radio de curvatura de una sección cualquiera de una superficie en el punto M (*x, y, z*) de la misma, viene expresado por la fórmula siguiente:

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2} \times \cos\theta}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$$

siendo:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

θ el ángulo formado por la normal a la sección considerada en dicha superficie y el radio de curvatura que está dirigido según la normal principal; α y β los ángulos que forma la tangente a la curva, en el punto que se considera, con los ejes *x* é *y*; y ρ el radio de curvatura de la sección.

Si en la fórmula anterior suponemos que $\theta = 0$, esto es, que el plano osculador pase por la normal a la superficie en el punto M, se tendrá $\cos\theta = 1$, y por consiguiente si designamos por ρ' el nuevo radio de curvatura, se tendrá:

$$\rho' = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$$

Esta fórmula se puede modificar, sabiendo que: $\cos\alpha = \frac{dx}{d\sigma}$, y $\cos\beta = \frac{dy}{d\sigma}$, siendo σ, la curva de la sección. Así pues, tendremos:

$$\rho' = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2}$$

o sea:

$$\rho' = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2}{r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad \text{(A)}$$

Ahora, como: $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, se deduce: $\frac{d\sigma^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}$

pero:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = pdx + qdy;$$

de donde

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + q^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

luego:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \left(1 + p^2\right) + 2pq\frac{dy}{dx} + \left(1 + q^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Sustituyendo este valor en (A), se halla:

$$\rho' = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \times \frac{1 + p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + \left(1 + q^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{r + 2s\left(\frac{dy}{dx}\right) + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Para determinar los puntos umbilicales de una superficie, o sea, para que el radio de curvatura en un punto de una superficie, tenga siempre el mismo valor, cualquiera que sea el plano normal que pase por dicho punto, basta que este radio sea independiente de la relación $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ que determina el plano normal, a cuyo fin deben suponerse las igualdades siguientes, deducidas de la fórmula últimamente hallada:

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t}. \quad (\mathrm{B})$$

De esta serie de razones iguales, se pueden deducir dos ecuaciones, que junto con la ecuación de la superficie, determinen las coordenadas de los diferentes puntos umbilicales, que puede contener la superficie dada.

Con estos preliminares podemos pasar inmediatamente a la determinación de los puntos umbilicales del elipsoide.

Sea la ecuación del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diferenciando resulta:

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{zdz}{c^2}=0; \quad \frac{dz}{dx}=p=-\frac{c^2x}{a^2z};$$
$$\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0; \quad \frac{dz}{dy}=q=-\frac{c^2y}{b^2z};$$

Diferenciando otra vez estas expresiones obtendremos los valores de *r, s, t*.

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{d\,\frac{c^2x}{a^2z}}{dx}=-\frac{d\,\frac{c^2x}{a^2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}}{dx}=-\frac{\frac{a^2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\times c^2dx-c^2x\times a^2c\times-\frac{\frac{2x}{a^2}dx}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}}{a^4c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}}{dx}=$$

$$=-\frac{a^2c^3\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}{a^4c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=-\frac{c^4\left(b^2-y^2\right)}{a^2b^2z^3}=r.$$

De un modo parecido se obtiene: $\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{c^4\left(b^2-x^2\right)}{a^2b^2z^3}=t.$

Y por fin el valor de *s*, se hallará diferenciando *p* respecto la variable *y*;

$$\frac{d^2z}{dxdy}=-\frac{d\,\frac{c^2x}{a^2z}}{dy}=-\frac{d\,\frac{c^2x}{a^2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}}{dy}=-\frac{\frac{c^2x\times a^2c\times-\frac{\frac{2y}{b^2}dy}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}}{a^4c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}}{dy}=$$

$$=-\frac{c^3a^3xy}{b^2a^4c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}=s$$

Ahora tomando las igualdades (B), resulta:

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}$$

o sea:

$$\frac{1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}}{-\frac{c^4\left(b^2-y^2\right)}{a^2b^2z^3}}=\frac{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^2}}{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}}=-z; \qquad \frac{\left(a^4z^2+c^4x^2\right)a^2b^2z^3}{a^4c^4z^2\left(b^2-y^2\right)}=z,$$

cuya ecuación simplificada puede representarse por: $c^4b^2x^2+a^2c^4y^2+a^4b^2z^2=a^2b^2c^4 \quad (1)$

De las mismas igualdades (B) se infiere: $\frac{1+q^2}{t}=\frac{pq}{s}$,

o sea,

$$\frac{1+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}}{-\frac{\left(c^4a^2-x^2\right)}{a^2b^2z^3}}=-z$$

de donde resulta:

$$c^4b^2x^2+a^2c^4y^2+a^2b^4z^2=a^2b^2c^4 \quad (2)$$

Si tomamos luego la ecuación del elipsoide,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

o sea:

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^4,$$

y la combinamos con los (1) y (2) ya halladas, tendremos el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} c^4b^2x^2+a^2c^4y^2+a^2b^4z^2&=a^2b^2c^4\\ c^4b^2x^2+a^2c^4y^2+a^4b^2z^2&=a^2b^2c^4\\ c^2b^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2&=a^2b^2c^2 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{C})$$

Combinando la 1ª ecuación con la 3ª después de multiplicar ésta por b^2 y restarlas respectivamente, resulta:

$$c^2b^2\left(c^2-b^2\right)x^2+a^2c^2\left(c^2-b^2\right)y^2=a^2b^2c^2\left(c^2-b^2\right),$$

o sea:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \ (\alpha).$$

Combinando, ahora, en el mismo sistema (C), la 2ª ecuación con la 3ª, después de multiplicar ésta por a^2 y restarlas respectivamente, se tiene:

$$c^2b^2\left(c^2-a^2\right)x^2+a^2c^2\left(c^2-a^2\right)y^2=a^2b^2c^2\left(c^2-a^2\right),$$

o sea:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (\beta).$$

Los resultados iguales de (α) y (β), nos prueban la indeterminación del sistema (C): luego para determinar completamente las coordenadas de los puntos umbilicales, es preciso tomar otra vez las igualdades (B), según la nueva combinación: $\frac{1+p^2}{1+q^2}=\frac{r}{t}$; sustituyendo los valores particulares que corresponden al elipsoide se deduce:

$$\frac{1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}}{1+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}}=\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2},$$

de donde:

$$a^6b^4z^2+a^2b^4c^4x^2-b^4a^4z^2x^2-b^4c^4x^4=a^4b^6z^2+a^4b^2c^4y^2-a^4b^4z^2y^2-a^4c^4y^4\quad(\delta)$$

partiendo todos los términos por c^2 y sabiendo que: $\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}&a^6b^4-a^4b^4x^2-a^6b^2y^2+a^2b^4c^2x^2-b^4a^4x^2+b^4a^2x^4+b^2a^4x^2y^2-b^4c^2x^4=\\&=a^4b^6-a^2b^2x^2-a^4b^4y^2+a^4b^2c^2y^2-a^4b^4y^2+a^2b^4y^2x^2+a^4b^2y^4-a^4c^2y^4\quad(\Delta)\end{aligned}$$

Ahora de (α), ó (β), se deduce, $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$; luego sustituyendo este valor en la ecuación (Δ), después de simplificarla resulta: $\left(a^2b^2-c^2a^2\right)y^4=0$, o sea, y = 0.

Tomando otra vez la ecuación (δ), en el supuesto de ser *y* = 0, se obtiene:

$$a^6b^4z^2+a^2b^4c^4x^2-b^4a^4z^2x^2-b^4c^4x^4=a^4b^6z^2\quad(\pi)$$

y como: $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$; siendo *y* = 0, se deduce, $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$.

Sustituyendo este valor en (π), después de haber dividido por a^2, se halla:

$$a^2b^4c^2z^2+\frac{b^4a^4}{c^2}z^4-b^4a^2z^4=a^2b^6z^2$$

luego:

$$z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Sustituyendo, por fin, este valor en: $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, se tiene: $x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$.

De suerte que: $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \\ x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \end{array} \right\}$

representan las coordenadas de los cuatro puntos umbilicales del elipsoide en función de sus tres ejes *a*, *b*, *c*, siendo $a > b > c$, conforme nos habíamos propuesto determinar.

Tarragona a 25 de Noviembre de 1880
Lauro Clariana Ricart