# Relación entre

# las

# Dos Integrales Eulerianas

1881

Según Legendre, se da el nombre de *integrales eulerianas* a las dos integrales siguientes:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

La primera, conforme la notación de Bimet, se designa por $\mathrm{B}(p,q)$, y se llama *integral euleriana de primera especie*. La segunda, Legendre la representa por el símbolo $\Gamma(n)$, y forma la *integral euleriana de segunda especie*.

Ante todo vamos a transformar $\Gamma(n)$, suponiendo que $x = y^2$, de modo que:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-2}\,2y\,dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy. \quad (\mathrm{A})$$

Si en vez de $n$ suponemos $p$ y $q$, referidas a las variables $y$, $x$, tendremos:

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}\,dy,$$
$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2q-1}\,dy,$$

multiplicando estas dos igualdades, resulta:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}y^{(2p-1)}x^{(2q-1)}dy\,dx \quad (\mathrm{B})$$

Ahora nos conviene, en esta integral múltiple, trasformar las coordenadas rectangulares en coordenadas polares, y para ello recordaremos las fórmulas generales de transformación aplicadas al caso particular de dos variables.

$$\int\int \cup\,dx\,dy = \int\int \pm\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr}\right)\cup\,dr\,d\theta$$

y como $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\theta$, luego:

$$\frac{dx}{dr} = \cos\theta, \quad \frac{dx}{d\,\theta} = -\ r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{dr} = \mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{d\,\theta} = \mathrm{r}\cos\theta;$$

sustituyendo estos valores en (B), en el concepto de que U venga expresado por: $e^{-\left(x^2+y^2\right)}y^{2p-1}x^{2q-1}$, se tiene:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}y^{2p-1}x^{2q-1}\,dx\,dy =$$

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty\left(r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta\right)\times e^{-\left(r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)}\times\left(r\,\mathrm{sen}\theta\right)^{2p-1}\times\left(r\cos\theta\right)^{2q-1}dr\,d\,\theta$$

Consideramos esta integral doble expresada por el producto de dos simples: la primera referida a la variable θ, en cuyo caso los límites ∞ y 0 de la integral se transforman en $\frac{\pi}{2}$ y 0, como es fácil de comprender; y la segunda integral referida al radio vector *r*, que es la otra variable: luego

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^{2p-1}\,\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\,\theta\times 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr \quad (\mathrm{C})$$

Si comparamos esta segunda integral con la segunda expresión de Euler, después de modificada, según viene expresado en (A), se comprende que la integral:

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr$$

se exprese por Γ (*p* + *q*). Mas la primera integral:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^{2p-1}\,\theta\ \cos^{2q-1}\theta\ d\theta$$

se puede descomponer en:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^{2p-2}\,\theta\ \cos^{2q-2}\theta\ \times 2\mathrm{sen}\theta\ \cos\theta\ d\theta \quad (\mathrm{D})$$

de modo que si suponemos: $\mathrm{sen}^2\,\theta\ = x$, se deduce:

$$\operatorname{sen}\theta = x^{\frac{1}{2}}, \qquad \cos\theta = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{sen}^{2p-2}\theta = x^{\frac{2p-2}{2}} = x^{p-1}, \quad \cos^{2q-2}\theta = (1-x)^{\frac{2q-2}{2}} = (1-x)^{q-1},$$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = dx,$$

cuyos valores sustituidos en (D), dan:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-2}\theta \cos^{2q-2}\theta \times 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (\mathrm{E})$$

Hay que advertir que los límites $\frac{\pi}{2}$ y $0$, se transforman en 1 y 0 pues de $\operatorname{sen}\theta = x^{\frac{1}{2}}$ resultan, siendo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = 0$, los valores $x = 1$ y $x = 0$.

Ahora bien, fácil es ver que la integral (E), no es más que la primera de Euler, cuya expresión ya hemos designado en un principio por $\mathrm{B}(p,q)$; luego sustituyendo todos los valores hallados en (C), se obtiene definitivamente:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q)\,,$$

y por consiguiente:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Igualdad que nos pone en relación las dos integrales eulerianas. Esta expresión permite resolver problemas de alta trascendencia, tanto en la Geometría como en la Mecánica.

Tarragona a 10 de Mayo de 1881
Lauro Clariana Ricart