MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA. NÚM. 657 VOL. XXXII. NÚM. 9

# EL PRINCIPIO DE ELECCIÓN

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

Sesión inaugural del día 29 de noviembre de 1956

Dr. D. José Mª ORTS

*Publicada en abril de 1957*

BARCELONA

1957

SEÑORES ACADÉMICOS:

Dentro de unos años —— concretamente en 1964 cumplirá, —— Dios mediante, esta Real Academia de Ciencias y Artes, los dos siglos de existencia, y si el 150 aniversario de su fundación se conmemoró con actos cuya brillantez atestiguan algunos documentos que se conservan en los archivos de esta Casa, es de esperar que las solemnidades que se organicen con motivo del segundo centenario, superen, o por lo menos, igualen en esplendor, al de aquellas fiestas jubilares.

Pocos son ya, por desgracia, los que sobreviven de cuantos formaban parte de la Academia como miembros numerarios en aquellos lejanos días, y pueden, por tanto, dar fe de modo personal y directo de la magnificencia con que esta Corporación quiso y logró celebrar sus triples bodas de oro; el paso inexorable de los años, fue llevándose unos tras otros los hombres de aquella generación, y según mis datos, son únicamente tres los que en la actualidad permanecen en las filas académicas y quiera Dios que en ellas continúen por mucho tiempo: el Dr. Fontseré, mi querido y venerado Profesor de Mecánica, cuya antigüedad, no superada por ningún otro académico, data de 1909, y es por tanto nuestro Decano, en la justa significación de esa palabra según el Diccionario de la Real Academia Española; el señor Masriera que, con la escasa diferencia de medio año, sigue al Dr. Fontseré en el orden escalafonal académico, y el Dr. Jardí, cuyo ingreso tuvo lugar precisamente en una de aquellas sesiones conmemorativas[1].

Los documentos a que acabo de aludir, constituyen el volumen especialmente dedicado a la reseña detallada de los actos que entonces se organizaron, y que realzaron con su presencia, representaciones de las más altas jerarquías del país y de las corporaciones científicas nacionales y extranjeras. Se vivían .todavía aquellos años tranquilos de comienzos de este siglo, en que el tránsito de fronteras resultaba apenas perceptible, y los campos de Europa no habían conocido aún los horrores de aquella primera guerra internacional a que hubimos de asistir — bien que al margen y de lejos por designio providencial — los que ya vamos para viejos.

Según puede verse en el citado volumen, iniciáronse aquellos actos con unas palabras previas de saludo y bienvenida del Presidente de la Academia - que lo era a la sazón, don José Doménech y Estapá - que a su condición de Académico y Catedrático universitario, unía la de Arquitecto, y a quien como tal, se debe precisamente el proyecto y ejecución de la reforma de la fachada de este edificio, como también - y en colaboración del Dr. Fontseré en su calidad de .Astrónomo - los del Observatorio Fabra, cuyo primer cincuentenario se cumplió recientemente.

Tras aquellas palabras de la Presidencia, aparece en ese mismo volumen una documentadísima Memoria acerca de las actividades de la Academia desde sus orígenes, a cargo de don Agustín Murcia Valerdi, Catedrático que fue de la Facultad de Farmacia, y a quien sin duda recordaran algunos de los aquí presentes, como uno de los más entusiastas defensores de la autonomía universitaria.

Aquel brillante discurso resumen de Murúa, de carácter crítico - histórico sobre la vida y desarrollo de la Academia, tuvo por base — según declara el propio autor en uno de los párrafos iniciales — los datos recopilados por uno de sus antecesores, don ]osé Balari y Jubany, para el discurso inaugural de 1893-94, completados con los que, relativos a tiempos posteriores, fueron recogidos, en parte, por otros dos académicos: don José Ramón de Luanco y don Arturo Bofill y Poch, Secretario que fue de la Corporación durante' muchos años. La reseña del Dr. Murúa, quedaba, naturalmente, limitada a los trabajos de los académicos ya fallecidos en aquella fecha, y así lo hacía constar expresamente el autor en uno de los párrafos finales de su discurso, con estas palabras:

[1] Cuando nos disponíamos a dar forma definitiva a estos párrafos, nos sorprende dolorosamente la noticia del fallecimiento del Académico don Paulino Castells Vidal, que en un principio habíamos incluido entre los escasos Académicos supervivientes que fueron testigos presenciales de las fiestas del tercer cincuentenario de la Academia. Y como el elogio póstumo de la actuación del señor Castells, como miembro de esta Corporación, de la que hubo de ser Presidente durante un breve interregno, corresponde al Secretario General de la Academia, nos limitamos a consignar aquí el testimonio de nuestro sentimiento por esta pérdida**,** que ha reducido a tres, el número de aquellos Académicos que vivieron los actos conmemorativos del 150 aniversario de la Academia**.**

"En cuanto a los trabajos científicos y artísticos de los académicos que viven, no es este momento de hablar, ya que ni su modestia consentiría el justo elogio, ni la crítica se encuentra en condiciones de desenvolverse libre de prejuicios. Reservemos esta labor a los académicos que hayan de sucedernos[2]

Pues bien; releyendo estas palabras a poco de haber recibido la comunicación en que se me designaba para cumplir el deber reglamentario que me obliga a elevar mi voz en estos momentos, y recordando la alusión al segundo centenario de la Academia que hiciera nuestro Secretario General, Dr. Torroja, en la Memoria de la Sesión inaugural de uno de los pasados cursos, pensé que tal vez no desentonara en este acto, y a guisa de introducción, recoger en parte la invitación tan explícitamente formulada en el párrafo transcrito, trazando el bosquejo de los trabajos de algunos académicos que pertenecieron a la Sección primera, con vistas al balance mucho más amplio y completo de las actividades científicas y artísticas de la Corporación, que deba efectuarse en su día, con motivo del segundo centenario.

Lo que además, y sin recurrir a precedentes más antiguos, contaba con otros de fechas mucho más recientes: tal el discurso del Dr. Raurich, acerca de la labor de un académico farmacéutico, en la inauguración del año académico 1943-44; el del Dr. Bataller, en 1948, sobre las investigaciones paleontológicas en ja Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, y el ameno trabajo de turno con que el Dr. Font y Quer hubo de cerrar las tareas académicas del curso pasado.

A lo cual venían a sumarse otros motivos para mí de mucho peso, y en primer término, la necesidad — que trataré de justificar seguidamente — de revalorizar la obra científica de los que aquí nos precedieron; con lo que al avivar en algunos de los que me escuchan, el rescoldo de sus recuerdos — y recordar es volver a vivir — tal vez logre diluir un tanto el tecnicismo propio del tema que constituye el núcleo de este discurso, y del que procuraré haceros gracia, en buena parte, para aliviar en lo posible vuestra tortura, ya que estos párrafos van a carecer de esa amenidad inherente a las disertaciones de carácter artístico o a las excursiones a través de los espacios siderales.

Y aunque se haya dicho — y no sin cierto fundamento — que las miradas retrospectivas en el orden científico, parecen señalar el momento del ocaso en el plano de la investigación, yo no dudo en afrontar los ataques de esa crítica, no siempre positiva, ante la urgencia con que se presenta la revalorización a que acabo de referirme, a fin de contrarrestar esa furia iconoclasta de la obra de nuestros mayores, que viene observándose en ciertos sectores de la cultura, y a la que ya hube de referirme en otra ocasión.

Porque si el culto a los valores tradicionales constituye, como es bien notorio, una de las virtudes de la raza — y de las que puede considerarse arquetipo la figura egregia de don Marcelino Menéndez y Pelayo. cuyo centenario ha tenido lugar precisamente este año —, nunca como en las horas que atravesamos, conviene de vez en cuando volver la vista atrás, para recoger ese demagógico reto al pasado, lanzado no ha mucho tiempo y con dudosa oportunidad, por quien ocupaba un destacado puesto en las esferas intelectuales de nuestra Patria. Reto al que parecen responder cumplidamente, aquellas certeras y vibrantes palabras del gran escritor católico y académico francés Gabriel Marcel, en su discurso con motivo de la inauguración del curso en el Instituto de Francia.

Refiriéndose a las aberraciones que con intensidad creciente vienen dándose en ciertos sectores del arte y de la literatura, se expresa Marcel en estos términos: "*Jamás los verdaderos hombres de pensamiento hicieron tabla rasa del tiempo pretérito: partieron de él para luego desarrollar el crecimiento orgánico de las doctrinas filosóficas, políticas o estéticas. El arte actual que lucha contra todo lo que le precedió, es, sin embargo, conformista con una sola cosa: con la aberración. El espectáculo de la historia contemporánea,* añade Marcel, *es el de un mundo de mediocres. Y los que invocan a la juventud, lo que hacen en el fondo, es adularla de manera vil para captar su adhesión y su aplauso*."

---

[2] A más del discurso del señor Murúa, en dicho volumen aparece una reseña muy amplia de los actos conmemorativos del 150 aniversario de la Academia, del que también puede verse un resumen en la Memoria de las actividades académicas durante e! curso 1913-1914**,** leída por el Secretario General, don Arturo Bofill y Poch, en la sesión inaugural del año académico 1914-1915 (Boletín de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, tomo III. Págs. 400 a 406), en la que se hace constar que la iniciativa de la conmemoración del tercer cincuentenario, partió del académico correspondiente R. P. Longinos Navás.

Y las consecuencias de esa adulación, son, como era lógico esperar, esa audacia y ese desprecio de la tradición a que aludiera nuestro malogrado compañero de Academia, Sr. Soldevila Valls, fallecido el curso pasado, en su bellísimo discurso acerca de “Los oficios suntuarios y la crisis artística” cuya riqueza de fondo corre parejas con la elegancia de su prosa límpida, sencilla y llana, al modo que Cervantes aconseja por boca de su andante caballero; audacia y desprecio que, en último análisis, no son más que manifestaciones de esa prisa por alcanzar metas y situaciones, que en otros tiempos, no se lograban sino tras largos años de trabajo y experiencia, y a los cuales hubo de aludir el ilustre publicista José Mª de Sagarra en reciente artículo titulado “Zenón y la juventud”, del que vais a permitir que os transcriba aquí unos párrafos, llenos de aguda ironía:

“Cuando yo estudiaba en la Universidad — dice Sagarra —, nuestros Profesores eran venerables ancianos de luengas barbas, y los catedráticos precoces por su juventud, constituían notables excepciones.”

“Hoy día ocurre lo contrario; conozco una buena cantidad de Profesores universitarios, cuya gran competencia admito, pero cuyo aspecto físico es mas de estudiantes que de doctores. Hoy se puede llegar a un altísimo cargo docente sin haber llegado a la mitad del camino de la vida. Esto, cuarenta años atrás, era imposible.”

“En la cosa pública ocurre lo mismo. Se dan en Europa ministros, que antes, por su edad, se les hubiese permitido solamente ser concejales. Yo, frente a estos señores que a los cuarenta años ya lo han logrado todo, me pregunto si al doblar los sesenta no se aburrirán profundamente.”

“La humanidad ha vivido siglos dando una importancia enorme a la experiencia. Hoy día, la sana experiencia que no hay manera de improvisarla porque es obra lenta y constante del tiempo, se considera casi una ñoñez...”

Y a continuación, y después de relatar algunas incidencias de la vida de Zenón el estoico, que comenzó sus enseñanzas filosóficas en uno de los pórticos de Atenas, tras largos años de estudio, agrega: “Sería estúpido criticar estos hechos porque nacen de la fatal biología de nuestro tiempo pero yo no sé si esta prisa en llegar, esta prisa en correr, esta prisa en vivir y en alcanzar lo que sea; esta gran improvisación del hombre y de su paso por el mundo, puede conducir a la perfección y a la selección, o si solamente va a conducirnos a la simple mediocridad….”

Los párrafos transcritos, entre mil que, en análogo sentido podrían aducirse, reflejan el ambiente característico de nuestro tiempo en algunas esferas culturales. Y aunque en el campo científico, y más concretamente en el matemático, el problema no presente caracteres tan agudos, puede, no obstante, observarse también una cierta psicosis criticista o un deliberado olvido de la obra de nuestros antepasados más inmediatos, por parte de las juventudes actuales, con vistas a la supervaloración de la propia, que es causa de ese “narcisismo” que tanto priva en ciertos sectores intelectuales. y ante el cual precisa reaccionar mediante frecuentes miradas retrospectivas y “retornos al pasado”, que pongan de relieve la eficiencia de la obra de nuestros maestros. Y en esa reacción y en ese retorno, estriba precisamente la justificación de que yo inicie el deber reglamentario que hoy me corresponde cumplir con unos párrafos previos dedicados al recuerdo y comentario de los trabajos de aquellos académicos que ya pasaron a mejor vida y que más directamente influyeron en el despertar de mi vocación hacia los estudios matemáticos, a saber: **Don Lauro Clariana Ricart**, **don Santiago Mundi y Giró** y **don José Doménech Estapá**. Y esa limitación, en cierto modo natural, de mí glosa a la obra científico académica de aquellos tres Profesores, no supone en modo alguno, mengua del interés y trascendencia de la de otros académicos también fallecidos, y cuyos trabajos datan de los últimos cincuenta años; ella es consecuencia de la necesidad de abreviar lo más posible estos párrafos preliminares y, ¿por qué ocultarlo?, en buena parte también, por la necesidad de soslayar algunos pasajes enojosos, sobre los cuales me hubiese visto obligado, en otro caso, a pasar como sobre ascuas, e incluso a guardar un piadoso silencio[3]

[3] Exceptuando la referencia a los trabajos del señor Doménech y Estapá que figura en la Memoria necrológica al mismo dedicada y que fue redactada por el Dr. Fontseré. en las actas en que se da noticia de los fallecimientos de los señores Mundi y Clariana, no aparece la menor alusión a sus trabajos académicos de carácter matemático, lo cual constituye un motivo más que justifica el comentario que les dedicamos en las páginas que siguen, y que si bien es de índole meramente expositiva, ha exigido, como es lógico, la previa lectura de aquellos trabajos, a fin de que la glosa no quedara reducida a una simple relación de títulos de Memorias, a guisa de catálogo.

Con lo que advertido queda, lo poco ambicioso de mi proyecto que, como es lógico y natural, no alcanza a penetrar en terrenos para mí vedados, como también, y esto precisa subrayarlo en evitación de posibles equívocos, que el examen de los trabajos académicos que a continuación se expone. ha sido efectuado, no a la luz de nuestros días, sino a la de su época. y teniendo en cuenta el ambiente matemático de aquel tiempo. es decir, con la perspectiva a que obliga la lejanía de los años.

☼ ☼ ☼ ☼

Según datos que constan en los Boletines de esta Corporación. el primero de los tres académicos antes citados, que aparece en orden de antigüedad, es el Sr. Mundi, a quien sigue el Sr. Doménech, figurando en tercer lugar el Sr. Clariana; por tanto, ateniéndonos a. ese orden, que suele ser el principio determinante de jerarquía y autoridad en instituciones de gran prestigio y abolengo, iniciaré mi comentario refiriéndome a los trabajos académicos de don Santiago Mundi, a quien sucedió en el uso de la Medalla académica número 22, nuestro querido amigo y compañero don Manuel Álvarez Castrillón.

Conocí a don Santiago Mundi, al propio tiempo que a don Miguel Marzal - académico “electo” que, por motivos que ignoro, no llegó a tomar posesión de su cargo -, el primer día que traspuse los umbrales de la Universidad para comenzar mis estudios en la Facultad de Ciencias.

El tránsito del Bachillerato a las aulas universitarias, era, en aquella época, un tanto brusco, y así no es de extrañar que aquel reducido grupo de muchachos del que yo formaba parte, y que en conjunto no llegaríamos a unos treinta — (¡qué diferencia con los actuales tiempos!) — nos hallásemos algo sobrecogidos al encontrarnos frente a aquellos graves varones de chaqué y sombrero de media copa, (ya que no de toga y birrete como acontecía en otras Facultades), entre los que desentonaba el Sr. Mundi por su indumento más democrático, en consonancia con las ideas políticas que sustentaba, y que hubieron de conducirle a puestos de responsabilidad en la política municipal.

Actividades al margen de sus funciones de Catedrático, que no impedían que nos obligase a estudiar de firme sobre aquellos textos suyos de Geometría Métrica y Analítica, cuyas exiguas dimensiones harían sin duda sonreír a cualquier estudiante de hoy, a pesar de lo cual acabábamos el curso, sabiendo quizás, pocas cosas, pero sabiéndolas bien.

Un buen caudal de anécdotas podría yo interpolar aquí, que harían rememorar en algunos de los que me escuchan, los recuerdos de sus años jóvenes en que fueron alumnos del Sr. Mundi, cuyo carácter un poco quisquilloso — consecuencia de su ya avanzada edad — quedaba compensado con creces por aquellos rasgos tan frecuentes de su corazón generoso.

Ningún dato ni referencia he logrado hallar, lo que, claro es, no significan que no existan, sobre el tema desarrollado por el Sr. Mundi en su discurso de ingreso en la Academia.[4]

El primero de sus trabajos que aparece en el Catálogo General de Publicaciones de la misma, es una Memoria titulada: “Influjo de Desargues en la constitución de la Geometría moderna”, estudio muy documentado, a la par que de carácter polémico, en el que se hacen patentes las divergencias (le los puntos de vista del autor respecto a los de Doménech — compartidos por Clariana — en torno al concepto de infinito, y a las consecuencias que del mismo se deducen en el terreno de la Geometría; divergencias cuyo origen radica en la Memoria de Doménech y Estapá acerca de los “Absurdos geométricos que engendran ciertas interpretaciones del infinito matemático’, y que se mantuvieron durante algún tiempo, llegando incluso a adquirir en ciertos momentos un tono algo vivo, aunque siempre dentro de la corrección más extrema. Esas polémicas, sobre las que habré de volver más tarde, motivaron interesantes comunicaciones, que señalan una de las principales direcciones de los trabajos académicos de la Sección primera, durante el último decenio del pasado siglo.

---

[4] Ya en curso de impresión este trabajo, nos comunica nuestro estimado compañero don José R. Bataller Calatayud, Bibliotecario de la Academia, que el discurso de ingreso del señor Mundi Giró, versó sobre “.Teoría general de la numeración”.

Un año más tarde— en 1900—presenta Mundi una Nota “sobre el teorema de Pappus, su correlativo y corolarios que pueden deducirse”, en colaboración con el Dr. Amat, Profesor que fue de la Facultad de Ciencias. y que dio también lugar a controversia entre los tres citados académicos.

Mas esas discrepancias en el orden científico, se trocaban en plausibles afinidades en las esferas del arte: me refiero a las aficiones musicales de Mundi, compartidas y tal vez superadas por Clariana. Baste citar, como ejemplo la comunicación del primero acerca de “Importancia de los sistemas armónicos en la constitución de la matemática”, en la que examina las consecuencias a que conducen las dos leyes o principios sobre los que la escuela pitagórica fundamentaba la teoría musical, considerada — al igual que la Geometría, la Aritmética o la Astronomía — como una de tantas ramas de la Matemática; así como la reforma de las “gammas” musicales debida a Ptolomeo, de acuerdo con el principio físico del número de vibraciones por segundo, para concluir haciendo resaltar el interés de los sistemas armónicos en la teoría de la polaridad y en la geometría proyectiva.

El último trabajo del Dr. Mundi, “La curva lemniscata y sus relaciones con la circunferencia y la hipérbola equilátera”, constituye una síntesis de propiedades de aquella curva de la que — ¡nueva coincidencia! — también hubo de ocuparse años más tarde Clariana, bien que en dirección algo distinta, en un trabajo publicado en la Revista de la Sociedad Matemática Española.

☼ ☼ ☼ ☼

Ateniéndonos al orden de exposición. adoptado, corresponde en segundo 1ugar comentar rápidamente los trabajos académicos de carácter matemático puro de don José Doménech y Estapá, cuya recia personalidad como arquitecto, como académico y como Profesor universitario, aparece tan certeramente destacada en la semblanza que de él trazara a raíz de su muerte el Dr. Fontseré[5], y aunque la época en que yo conocí al Sr. Doménech siendo alumno de sus clases de Geometría de la posición— (así se denominaba entonces) — y de Geometría descriptiva, fue bastante posterior a la etapa de su actuación universitaria a que se alude en la mencionada reseña biográfico-académica, también yo pude apreciar bien de cerca y en más de una ocasión, todo el caudal de cualidades humanas que se ocultaban bajo aquel temperamento fuerte, e incluso a veces violento, que hacía saltar frecuentemente sobre la mesa de su cátedra, aquellos característicos quevedos, tan bien captados por los pinceles del ilustre artista Carlos Vázquez — como podéis comprobar en el retrato que figura en uno de los departamentos contiguos a este Salón de Actos —, cuando alguno de nosotros no acertaba a precisar entre el caos de líneas trazadas en la pizarra, la proyección horizontal de la intersección de un cono y un cilindro. ¡Y cuántas tardes nos pasábamos encorvados sobre aquellos pliegos de descriptiva, con el riesgo — muy probable — de que al día siguiente los viésemos rechazados, por un pequeño error en la posición de los puntos centrales de las generatrices del paso oblicuo o cuerno de vaca!

El discurso de ingreso en la Academia del Sr. Doménech, versó sobre “La Geometría proyectiva en el arte arquitectónico”. Ignoro si ese discurso llegó a publicarse integro, dado que no aparee incluido en el Catalogo de Publicaciones de la Academia; sin embargo, en el Acta de la Sesión inaugural del curso 1883-1884, de la que existe en la Biblioteca de esta casa un ejemplar — encuadernado por cierto en estilo algo barroco[6] —, aparece un extracto bastante amplio, debido sin duda al propio autor del discurso, a través del cual se colige el valor magistral de aquel trabajo que por su contenido y directrices, respondía al doble aspecto de las actividades del señor Doménech y Estapá como Arquitecto y como Catedrático universitario de Geometría, en aquella época, en que acababan de llegar a nuestras latitudes — gracias a don Eduardo Torroja — las ideas de Staudt que, con las de Poncelet, Steiner y Chasles, permitieron sistematizar las propiedades métricas y descriptivas de las formas geométricas.

---

5 Memorias de la RACAB., 3. época, vol. XVIII, 11.0 8, año 1924

6 En esa misma Acta (pág. 28), Consta precisamente el acuerdo de la Academia sobre la reforma de la fachada del edificio y la aprobación del correspondiente proyecto, que, según ya se ha indicado, fue obra del señor Doménech.

Los jalones principales de ese proceso de sistematización así como la deducción de los métodos de la perspectiva relieve y la Estática gráfica— de tanto interés en la técnica de la construcción — fueron las dos ideas centrales desarrolladas por el Sr. Doménech en su discurso de ingreso.

Su primer trabajo de turno, "Breves consideraciones acerca del progreso del Algebra en 1os tiempos modernos", inserto asimismo en las páginas finales del Acta antes mencionada, es una exposición de tipo doctrinal de aquella rama de la matemática, considerada — a juicio del autor — no como una simple generalización de la Aritmética, sino como un cuerpo de doctrina de mucho más alcance y contenido, a causa de sus conexiones de las teorías de funciones a través de las de tipo algebraico, definidas por una relación de esa índole entre dos variables complejas. Enfocado así el asunto, se comprende que en esa Memoria se haga referencia a temas un tanto dispares, como los desarrollos en serie de potencias; integrales en el campo complejo; funciones elípticas y abelianas (que actualmente se encuadran en el terreno de la teoría de funciones); teoría de formas, (tan en boga en aquel tiempo), con referencia a los trabajos de Cayley, Salmon, Sylvester, etc., sin que falte tampoco una ligerísima alusión a la teoría de Galois sobre las ecuaciones resolubles por radicales.

Desde la fecha de ese trabajo del Sr. Doménech, hasta nuestros días, el Algebra ha experimentado una evolución tan rápida y profunda en sus métodos y problemas, que, de todos aquellos capítulos que constituyen la denominada "Algebra clásica", apenas queda ya rastro en ese otro cuerpo (le doctrina integrado por la teoría de grupos abstractos, matrices, cuerpos de números algebraicos, redes (lattices), álgebras lineales y multilineales, etcétera, conocido con la denominación de "Algebra moderna", la cual, con la Topología, constituyen los sillares de la Matemática actual.

Años más tarde — en 1894 — presenta el Sr. Doménech y Estapá la Memoria "Absurdos geométricos que engendran ciertas interpretaciones del infinito matemático", de la que ya hicimos mención anteriormente, como punto inicial de la controversia con Mundi, en la cual se hacen ver las consecuencias erróneas en opinión del autor de la Memoria — a que conduce el manejo sin cautela de los elementos del infinito, y los peligros de la extrapolación a los mismos, de proposiciones cuya validez ha sido demostrada razonando sobre elementos finitos[7]

De carácter asimismo polémico, es su trabajo de turno de 1897, titulado "Los mecanismos no pueden oponerse a las verdades matemáticas", en el que se rebaten ciertas conclusiones que figuran en la Memoria del académico don Luis Canalda sobre Aplicaciones de la Geometría cinemática", como también lo es otro trabajo de Doménech acerca de las "Geometrías racionales y geometría real dentro de la finitud humana", magistral exposición de carácter histórico crítico, sobre la evolución de la geometría desde Euclides a Riemann, Klein y Poincaré, con amplias consideraciones en torno a las geometrías no euclidianas, que el autor aprovecha para romper una nueva lanza a favor de su posición acerca del alcance que debe darse a los elementos dei infinito[8]

☼ ☼ ☼ ☼

[7] De ese mismo tema se ocupó el señor Doménech y Estapá en una serie de conferencias dadas en el Paraninfo de la Universidad de Barcelona en el curso 1897-1898 y que fueron recogidas en un opúsculo titulado "Justa interpretación que debe darse al cero y al infinito matemático".

[8] Según ya hemos advertido al referirnos a los trabajos de Mundi, nos limitamos a glosar brevemente tan sólo los trabajos de carácter matemático puro, prescindiendo, por tanto, de los que se refieren a otros temas como Memorias necrológicas y discursos pronunciados con motivo de la recepción de nuevos académicos, entre los cuales figuran las de Font y Carrera, Tous y Biaggi, Terradas y Bartrina.

Cúmpleme por último aludir a los trabajos académicos de don **Lauro Clariana Ricart**, cuya medalla académica hubo de corresponder a nuestro querido y dignísimo Presidente, Dr. D. Isidro Pólit.

Si tan vivos son los recuerdos que conservo de Mundi y de Doménech, todavía están más indeleblemente grabados en mi corazón y en mi memoria, los que guardo de Don Lauro Clariana, a cuyas indicaciones hubo de obedecer la desviación de mi primitiva trayectoria de los estudios universitarios.

Sé muy bien, por propia y triste experiencia, lo que supone la pérdida de un Padre en los primeros años de la infancia, y conozco también lo que significa la muerte del Profesor más querido, en esos momentos decisivos en el orden profesional en que se presentan encrucijadas de varios caminos cuyas metas finales no se vislumbran; instantes en que son más necesarios el apoyo o el consejo de un Maestro en la elección de un sendero, que puede conducirnos al éxito o al fracaso, y cuya alternativa sólo suele decidirse a posteriori, cuando, desde la cúspide de los años, es posible contemplar todo el panorama recorrido, y puede comprobarse toda la verdad de aquel adagio que reza "Dios escribe siempre recto, con renglones a veces torcidos".

Reflexiones que saltan espontáneas desde las fibras sensibles a los puntos de la pluma, al evocar la memoria de don Lauro, tan destacada para mí entre las de todos los que fueron mis Profesores universitarios, y cuya figura venerable, que recordarán sin duda algunos de los aquí presentes que asistieron a su clase de Cálculo infinitesimal, culminaba en aquella noble cabeza de artista que tan bien rimaba con su pasión por la música a que antes he aludido y que le condujo a ser un verdadero virtuoso del violín.

¡Cuántas veces después de haber sido alumno suyo y con motivo de llevarle a su domicilio las pruebas corregidas de alguno de sus trabajos tuve ocasión de escuchar — (sin que él, naturalmente, lo supiera) — su magistral interpretación de alguna fuga de Bach! Yo estoy seguro de que entre un estudio de Mozart o un capítulo sobre las integrales abelianas[9], su elección se hubiese decidido, sin titubeos, a favor del primero.

Al igual que en el caso de Mundi, ignoro cuál fue el tema tratado por Clariana en su discurso de ingreso en la Academia[10]**,** ya que en el primer número del Boletín de la misma, que data de 1892, aparece ya incluido Clariana entre los miembros numerarios, y en ese mismo número se inserta un trabajo suyo acerca de la "Generalización de los polinomios de Legendre', que es el primero que de él consta en el catálogo de publicaciones. Sin embargo, entre los folletos y opúsculos de don Lauro, que conservo entre mis papeles, figura la Memoria o discurso inaugural del año académico 1888-1889, publicado, no por la Academia, sino a expensas de un grupo de amigos y alumnos del señor Clariana, entre los que figuraba el Dr. Fontseré, quien tal vez pudiera explicarnos la razón de esa anomalía.

A tono con la finalidad del acto a que respondía, aquella Memoria titulada "Importancia de las funciones en general", es de carácter esencialmente expositivo, y contiene una síntesis de los puntos principales que se destacan en el desarrollo de la teoría de funciones, durante los siglos XVIII y XIX. A este discurso sigue en orden cronológico, el trabajo, ya citado, sobre los polinomios de Legendre, que si bien de tipo formal — (téngase en cuenta que las cuestiones de convergencia no eran motivo de preferente atención en aquella época) —, constituye uno de los primeros esbozos de las varias extensiones a que han dado origen tales polinomios, a partir de las correspondientes funciones generatrices, y en particular las estudiadas por Pincherle, Humbert y Gegenbauer, y que sirvieron precisamente como punto de partida en el tema desarrollado por el Profesor de la Facultad de Ciencias, don Lorenzo Ferrer, en su tesis de Doctorado.

**9** Para cuanto concierne a la actuación de don Lauro Clariana como Profesor universitario. véase la nota publicada a raíz de su fallecimiento n la Revista de la Sociedad Matemática Española (tomo VI, año 1917, pág. 58), en la cual aparece la lista de sus trabajos científicos**.**

10 El ingreso del Sr. Clariana en la Academia, tuvo lugar en 1882, y su discurso responde al siguiente título: "Varias consideraciones filosófico matemáticas con relación a la vida de los centros infinitos". Este dato, al igual que el que figura en la nota (4), lo debemos a la amabilidad del Académico, Sr. Bataller.

Un año después en 1893 — presenta Clariana, una Memoria de índole asimismo expositiva acerca de Euler y sus obras", en la que reseña los rasgos biográficos y la ingente labor científica de aquel coloso del siglo XVIII a quien se considera el matemático más prolífico, habiendo merecido por ello el sobrenombre de "La encarnación del análisis[11]

Ese mismo carácter, tiene también el discurso leído en la sesión inaugural del año académico 1899-1900, titulado "Breve estudio crítico acerca de la matemática en el siglo XIX, que viene a ser prolongación y complemento del mencionado en primer término, con interesantes consideraciones acerca del postulado de Euclides, que reflejan una vez más, la posición del autor en la controversia académica, tan reiteradamente aludida, en torno al infinito matemático.

De índole más técnica, son las tres Memorias que figuran a continuación en el catálogo de publicaciones de la Academia: la primera, de 1902, sobre Aplicación de la cantidad indefinidamente grande a las funciones elípticas', donde deduce las fórmulas que relacionan entre sí las tres funciones elípticas clásicas fundamentales, cuando el argumento o variable se aumenta en un semiperíodo, a partir de las correspondientes a la adición y argumentos, así como las que enlazan las funciones de Jacobi cuando la variable independiente se hace tender a infinito: la segunda, de 1904, en la que pone de relieve la "Importancia de ciertas funciones para obtener directa y fácilmente muchas integrales de aplicación a la Mecánica racional", entre las cuales figuran las que se presentan en el estudio de ciertos casos del movimiento de un cuerpo pesado; pequeñas oscilaciones del péndulo; centros de gravedad de áreas y volúmenes; atracción de masas (le forma especial, etc., etc. y la tercera, de 1909, en la que siguiendo a Hermite y Jordán expone los principios en que se basa el análisis de las curvas algebraicas del género cero, haciendo ver la importancia de las mismas, tanto en orden a sus singularidades, cuanto a sus aplicaciones a la integración de funciones racionales, ligadas a una curva unicursal, de tercero y cuarto orden, y cuyos ejemplos más sencillos son los foliums de Descartes.

El último trabajo del Sr. Clariana "Rápida excursión a las altas regiones del Análisis matemático", presentado en la sesión de 24 de abril de 1913, constituye una breve síntesis de los capítulos centrales de la teoría de funciones en aquella época — con especial mención de las funciones doblemente periódicas, y en particular las elípticas —, como también de las ecuaciones diferenciales, con algunas consideraciones acerca de las funciones armónicas, teoría del potencial y problema de Dirichlet.

Aparte los trabajos que, a grandes rasgos, acabamos de reseñar, don Lauro Clariana contribuyó también a las actividades académicas con diversos cursos de conferencias sobre "Matemáticas aplicadas a la Astronomía"; "Introducción a la teoría general de funciones según las ideas de Cauchy"; Funciones elípticas" ; Integrales curvilíneas" etc., completando de este modo, en el seno de la Academia, el programa de su curso de la Facultad de Ciencias, sobre "Elementos de cálculo diferencial e integral", dentro del que no podían tener cabida los indicados temas.

Reseñados rápidamente los trabajos académicos de aquellos tres Profesores, Mundi, Doménech y Clariana, es hora ya de enfocar el tema propio de este discurso. Permitidme sin embargo que, por excepción, intercale todavía unas breves líneas alusivas a los de mi antecesor en la Medalla que hubo de corresponderme a mi ingreso en esta Corporación, saldando así la deuda que entonces contraje. Me refiero a don Fernando Tallada, catedrático que fue de la Escuela de Ingenieros de esta Ciudad.

La obra científica de Tallada fue un tanto polifacética, consecuencia de aquella formación politécnica que privaba a principios de este siglo y que sin duda influyó en mentes privilegiadas corno la suya; y esa dispersión es también precisamente y reducida a sus justas proporciones, la nota característica de su contribución académica.

Si su discurso de ingreso "Consideraciones acerca del espacio", de escasas páginas, pero muy denso de contenido, y sobre todo de gran actualidad en aquella época —- 1914 — en que todavía se encontraban en estado embrionario las ideas einstenianas, parecía iniciar una ruta marcadamente orientada hacia el campo de la física matemática, bien pronto sus investigaciones se centran en el terreno de la matemática pura.

[11] E. T. Bell: "Los grandes matemáticos" (pág. 169).

Y en corroboración del aserto, ahí están sus trabajos de turno, el primero de los cuales “Sistema de curvas planas que por un cambio de posición en el plano se transforman en un sistema ortogonal”, constituye una aportación muy notable al problema de las trayectorias, a través de las ecuaciones diferenciales que traducen la traslación y rotación de un sistema de curvas; como también el que presentara cinco años más tarde, sobre “Distribución de las asíntotas en las curvas algebraicas”, en el que se establecen las condiciones para la existencia de asíntotas de dirección prefijada, así como el método para su determinación.

En 1929**,** y con escaso intervalo de dos meses—— caso quizás único en la historia de la Academia —, presenta Tallada otros dos trabajos: uno, sobre Resolución analítica de las ecuaciones algebraicas”, donde establece las fórmulas integrales que representan las raíces de una ecuación como determinación múltiple de la función inversa de un polinomio; otro, titulado “Ecuaciones diferenciales lineales”, en el que obtiene una expresión general de las integrales de la ecuación con segundo miembro, de forma más sencilla que la que suministra el método de Cauchy de la variación de las constantes. Un año más tarde, y en una Memoria más extensa, se ocupa de las “Integrales irregulares de las ecuaciones diferenciales lineales”, exponiendo un método original que permite obtener de modo uniforme, un sistema fundamental de integrales, tanto regulares como irregulares, según la clasificación de Fuchs. La contribución académica de Tallada, se cierra con la Memoria inaugural del curso 1929-1930**,** en la que se ocupa del “Método axiomático en las ciencias físicas”, trabajo que constituye, por decirlo así, un retorno al primitivo campo de sus estudios predilectos. En esa Memoria da el autor una visión del desarrollo que en aquella fecha habían alcanzado las tentativas para la síntesis y unificación de los fenómenos físicos, teniendo en cuenta la aparente contradicción entre los resultados de la dinámica del electrón, los de la mecánica ondulatoria y los de la teoría de los cuanta.

Autorizadme también para dar término a estos párrafos de introducción con una breve mención de una Memoria, que, sin llevar la firma de ningún miembro de la Academia, figura en el Catálogo de Publicaciones de la misma: la titulada “Contribución a la geometría pseudo conforme de u dimensiones”, tesis de doctorado de don José María Planas Corbella, Profesor auxiliar que fue de nuestra Facultad de Ciencias, en la que cursara brillantemente sus estudios, y posteriormente Catedrático de la de Zaragoza, cuya vida fue segada en flor y en trágicas circunstancias, cuando tan prometedores frutos hacían vislumbrar sus privilegiadas condiciones de trabajo e inteligencia. De ellas es buena muestra la mencionada Memoria en la que se encuentran importantes extensiones de ciertas transformaciones analíticas estudiadas por Severi sobre la variedad de Segre, al caso de n variables complejas. Yo he querido intercalar aquí esta concisa alusión en re cuerdo suyo. Descanse en paz.

☼ ☼ ☼ ☼

Prescindiendo de la glosa y comentario de otros trabajos matemáticos que aparecen incluidos en el Catálogo de publicaciones de la Academia, y cuyas fechas pertenecen al último medio siglo, la reseña que precede, hace patente, que una de las principales direcciones en que hubieron de polarizarse los estudios académicos de la Sección primera en los años finales de la pasada centuria y primeros de la presente, fue la cuestión del infinito matemático, tema que como es bien sabido ha sido fuente de continuas polémicas desde tiempos de Aristóteles y que se intensifican a partir del siglo XVII a raíz de la controversia entre Newton y Leibnitz[12] acrecentadas por las que hubieron de suscitarse a mediados del XVIII**,** en Francia e Inglaterra, a poco de aparecer el "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes", del Marqués de L'Hopital, y los "Eléments de la Géométrie de L'Infini", de Fontenelle[13] quien admite no sólo aquellas magnitudes que pueden llegar a ser o devenir infinitas, es decir, el infinito potencial o como límite, según la doctrina aristotélica, sino también aquellas otras que son "de facto" infinitas, esto es, el infinito actual, llegando incluso a establecer — bien que los razonamientos carezcan muchas veces de rigor —, las operaciones con infinitos de diversos órdenes, con lo que en cierto modo, puede considerarse a Fontenelle como un precursor de Cantor[14]

Frente a esta posición **-** compartida más tarde por D'Alambert[15] **-** , hubo de alzarse Maclaurin en su "Traité de Fluxions*",* en el que se refleja la influencia newtoniana, y cuya extensa introducción — de más de cincuenta páginas — constituye una crítica, un tanto incisiva, de las ideas de Fontenelle, rechazando la legitimidad de los principios de éste y, por ende, de sus conclusiones acerca de las cantidades infinitas tomadas en sentido actual[16]

Y este concepto de infinito actual, cuyos orígenes se remontan a las ideas de Eudoxo de Cnido y a las antinomias de Zenón de Elea, sobre la posibilidad de atribuir a la recta una estructura atomística, es precisamente el eje, por decir así, sobre el cual gira la teoría de conjuntos.

---

[12] Una exposición de carácter critico-histórico muy completa sobre la controversia entre Newton y Leibnitz, puede verse en la obra de Gino Loria "Storia delle Matematiche dall'alba della civiltá al tramonto del secolo XIX" **(**2**ª.** edición, 1950**.** cap. XXX, "La grande contesa").

[13] La segunda edición de la obra de Fontenelle, de la que existe en el Seminario Matemático un ejemplar procedente de la Biblioteca de <u>don Lauro Clariana</u>, data de 1727**,** en tanto la versión francesa del Tratado de fluxiones de Maclaurin — debida al P. Pezena, S. J., Profesor de Hidrografía de Marsella —, apareció en 1749 es decir, veintidós años más tarde, siendo curioso observar, que ni en la portada de los elementos de la Geometría del infinito de Fontenelle, ni a lo largo del curso de ese libro, aparece el nombre de su autor, lo que explica el carácter anónimo de la alusión que aparece en la extensa nota del Tratado de Maclaurin.

[14] Otro de los precursores de Cantor en las ideas sobre los números transfinitos, anterior a Fontenelle, es Bradswardine (véase Loria "Storia delle Matematiche", pág. 243).

[15] d'Alembert: Encyclopédie Méthodique. Artículo sobre el infinito.

[16] He aqui como se expresa Maclaurin en su alusión a las ideas de Fontenelle: Dans un traité attribué a un célebre Auteur, qui s'est acquis beaucoup de réputation par la variété de ses Ouvrages, on propose plusieurs arguments pour prouver l'existence d'une grandeur actuellement infinie: non pas celle qui n'a point de bornes, qui renferme tout. & qui ne peut recevoir aucune augmentation, & qu'il appelle infini métaphysique; mais celle qu'il conçoit comme plus grande que aucune grandeur finie, & qu'il distingue de la première ne la nommant infini géométrique. Puisque la grandeur est susceptible d'augmentation sans fin, on la peut concevoir ou supposer argumenté une infinité de Luis, c'est-à-dire, qu'elle sera devenue infinie. Et en effet, il est impossible que la grandeur susceptible d'augmentation sans fin, soit dans le même cas que si elle n'en ¿toit pas susceptible sans fin. Or, si elle ne l'étroit pas, elle demeurerait toujours finie; donc étant susceptible sans fin, elle peut ne demeurer pas toujours finie, ou, ce qui est le même, devenir infinie." ("Traité des fluxiones", pág. Xi j).

Pues bien; los debates entre nuestros académicos, a los que acabamos de aludir, son, a nuestro entender, eco de aquellas antiguas polémicas, que llegaron a nuestras latitudes a través de la frontera, o mejor *barrera* de los Pirineos con la Historia de la Matemática de Montucla; reflejo que, no obstante, presenta características propias, tanto por su tono geométrico, en el que se observa también la influencia de las ideas de Desargues y de Poncelet, cuanto por sus conexiones con el tema de las geometrías no euclidianas[17].

Según se desprende del examen de los trabajos académicos en que se manifiestan las divergencias entre Mundi por una parte, y Doménech y Clariana por otra, acerca de la cuestión del infinito[18], la discrepancia radica fundamentalmente, en el distinto alcance que para unos y otros debe darse Geometría a los elementos del infinito, denominación inadecuada en opinión de algunos autores[19], y que es causa de que se confundan ciertas propiedades cualitativas con otras de carácter cuantitativo. Y así, mientras Mundi siguiendo a Fontenelle, admite el infinito actual y considera que los enunciados y propiedades aplicables a cada uno de los elementos de una sucesión de entes o figuras geométricas que dependen de elementos o parámetros susceptibles de tomar valores tan grandes como se quiera, son asimismo válidas para el elemento límite de aquella sucesión, es decir, para el que corresponde al valor infinito del parámetro, Doménech y Clariana, fieles a las ideas de Maclaurin, consideran el infinito — (o indefinido, según la denominación por ellos adoptada) — como algo inaccesible, y no admiten la validez a priori de las conclusiones que se deducen por extrapolación o paso al límite, lo cual conduce, a su juicio, a paradojas y absurdos inadmisibles.

Y si bien es cierto que esta posición mantenida en términos radicales puede implicar a un principio de limitación, igualmente rechazable, está en cierto modo justificada por el hecho de que existen propiedades de carácter aritmético, geométrico o funcional, que no se conservan en el paso al límite; y de aquí nace precisamente una de las cuestiones centrales dentro del terreno del Análisis: la determinación de las condiciones mínimas que permiten afirmar la invertibilidad de una determinada operación o propiedad con el paso al límite[20]; problema que, en el caso concreto de la integración, dio origen precisamente a una de las más importantes teorías: la de las funciones denominadas de Baire,

---

[17] Otra de las direcciones más destacadas en los trabajos académicos en el curso de los últimos cincuenta años, es la que se refiere a las geometrías no euclidianas, tema al que contribuyó con importantísimas Memorias el Académico don José María Bartrina y Capella, Catedrático que fue del instituto de segunda enseñanza de esta Ciudad. Entre esos trabajos merece citarse en primer lugar, su magistral Tratado didáctico de geometrías no euclídeas", voluminosa Memoria de casi trescientas páginas, premiada por la Academia, y que fue, sin duda, la que hubo de abrirle las puertas de esta Corporación, como miembro numerario de la misma, habiendo dejado en, ella profundas huellas de sus estudios de carácter métrico y analítico sobre el mencionado tema, y entre los cuales se destacan los trabajos titulados Las leyes gráficas de los espacios no euclideos" La métrica de las figuras ficticias de la Geometría pseudo-esférica" Estudios de Geometría analítica no euclídea", y tantos otros más. Aparte de Bartrina, el tema de las geometrías no euclídeas, tuvo especial atractivo para otros académicos, entre ellos el R. P'. Marcer y Oliver, Catedrático que fue del Seminario Conciliar, al cual substituyó precisamente el señor Doménech y Estapá, en el sillón presidencial de la Academia. De las dos comunicaciones que presentó el P. Marcer sobre el asunto, uno de ellos titulado "Origen de las dudas acerca del postulado de Euclides", fue motivo do comentario, un tanto incisivo, en las páginas de la Revista Matemática Española. Otro de los Académicos que se ocuparon del mismo tema fue el señor Tous Biaggi, autor de una Memoria Acerca del principio de contradicción en la Geometría no euclídea", de carácter más bien metafísico que matemático.

[18] El resumen de las polémicas entre Mundi, Doménech y Clariana, consta en el Acta de la sesión del 25 de noviembre de 1899 (Boletín T. 1., Págs. 563-566). Hay que hacer notar, que a esos debates contribuyeron, también, los trabajos antes citados del Académico don Luis Canalda sobre Geometría cinemática, y en particular la Memoria El infinito matemático en la cadena cinemática cilíndrica", cuyas conclusiones impugnó Doménech en su trabajo "Los mecanismos no pueden oponerse a las verdades matemáticas. También hay que recordar que no fueron los Académicos ya mencionados, los únicos que sintieron el atractivo del infinito. En el Catálogo de publicaciones figura otra Memoria titulada simplemente Del infinito, del Académico don Luis Rouviere, bien que su contenido y alcance no sean genuinamente matemático.

[19] Entre ellos don Eduardo Torroja. Véase su obra 'Geometría de la posición", pág. 17. o las "Questioni riguardanti le matematiche elementari", de F. Enriques. .T. 1, pág. 284.

[20] La inversión de una determinada operación aritmética o funcional con la del paso al limite, se reduce frecuentemente en último término a la de un doble paso al limite, efectuado mediante dos operaciones de este tipo sucesivas pero no simultáneas. (Véase, por ejemplo, la monografía de Borel (Leçons sur les functions de variables reelles", pág. 36).

cuya construcción se fundamenta sobre la de los números transfinitos, que han dado origen a interesantes polémicas que, en cierto modo, recuerdan las que hubieron de suscitarse entre Clariana, Mundi y Doménech, en una época en que todavía se encontraba en sus albores la teoría de conjuntos, y, por tanto, no había llegado a nuestra patria el eco de las ideas de Cantor; circunstancia ésta, que merece destacarse, por cuanto permite afirmar la independencia e incluso, en ciertos aspectos, la prioridad de aquellas controversias entre nuestros académicos, respecto a las que años más tarde hubieron de entablarse entre los más eminentes matemáticos.

Lejos también de nuestro propósito adentramos en la exposición, y mucho menos el análisis de las discusiones de carácter filosófico matemático entre lógicos e intuicionistas, idealistas y empiristas o realistas, en torno a los números transfinitos, iniciadas al comienzo de este siglo en la Revista de Metafísica y de Moral, y que han motivado toda una serie de trabajos y monografías, suficientes por si solas para colmar una voluminosa biblioteca[21]. Como tampoco trazaremos el bosquejo de todas las tentativas encaminadas a eliminar las antinomias y paradojas que hubieron de surgir a raíz de la difusión de las ideas de Cantor, mediante la revisión crítica de los conceptos y principios de la teoría de conjuntos; antinomias que en el fondo reproducen las que servían como tema a los sofistas de la escuela de Megara en sus discusiones con los filósofos de la escuela de Atenas, y que han proseguido en tiempos modernos con las de Bolzano, Richard, Burali-Forti Zermelo, Skolem, por no citar sino las de carácter matemático. Y ello tanto menos, cuanto que el tema hubo ya de ser magistralmente tratado, hace ya bastantes años, por el Profesor Rey Pastor, en su brillante discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias de Madrid[22]

Con lo que al propio tiempo evitaremos extraviarnos — y de rechazo extraviar a los no especialistas que en este auditorio figuran — en toda la red de direcciones que se observan dentro de la fundamentación lógica de aquella teoría, la cual constituye, como es bien sabido, una de las piedras angulares de la Matemática moderna[23] que a partir de su encuadramiento en el sistema general de los “Principia Mathematicae” de Rusell, ha abierto el cauce a un gran número de trabajos de sistematización formal[24].

Séanos sólo permitida una rápida incursión en una de las fases culminantes que aparecen en la etapa constructiva de la teoría de conjuntos, y en la cual se destacan contribuciones muy importantes de fechas muy posteriores a la del citado discurso: me refiero a los trabajos enfocados hacia la aplicación del método axiomático a la teoría de conjuntos- iniciada por Zermelo con vistas a la eliminación de las antinomias a que antes he aludido; sistema que, no obstante, y a juicio de algunos autores, presenta ciertas fisuras en parte suprimidas por Skolem mediante la aplicación de los métodos de la lógica simbólica, y posteriormente por Fraenkel, quien fiel a las ideas de Cantor sostiene la independencia de la teoría de conjuntos de la lógica formal. Construcciones axiomáticas a las que hay que agregar las de Neumann, Hilbert y Kuratowski, así como las más recientes de Bernays y Robinson, orientadas en la dirección del primero[25]

---

[21] Un resumen de esas polémicas que primitivamente aparecieron en las páginas de la “Revue philosophique” y de la ‘Revue de Métaphysique et de Morale” puede verse en el apéndice IV de la monografía de Borel, “Leçons sur la teorie des fonctions’, 2ª edición, 1914, página 135.

[22] En ese discurso acerca del “Ultracontinuo” introduce el autor un sistema de números en cierto modo análogos a los transfinitos de Cantor que ofrecen la ventaja sobre éstos de satisfacer las leyes fundamentales de la Aritmética. Conviene observar que el discurso del Profesor Rey Pastor es de 1920, fecha en la que precisamente se inició la publicación de “Fundamenta Mathematicae”, que tanto ha contribuido a la fundamentación y desarrollo de la teoría de conjuntos. A más de las monografías de Sierpinski “Leçons sur les nombres - transfinis”, y Lusin “Leçon sur les ensenmbles analytiques”, especialmente dedicadas a la teoría de conjuntos y que forman parte de la colección Borel, el estudio a fondo de los problemas centrales de esa teoría se encuentra en diversas Memorias y trabajos originales publicados en “Fundamenta Mathematicae”.

[23] La Topología que, con el Algebra, constituyen los sillares de la Matemática moderna.. se fundamenta en su aspecto conjuntista. en la citada teoría. Véase, por ejemplo: Bourbaki “Les structures fondamentales de l’Analyse”. Livre 1, Theorie des ensembles”, Introducción, pág. 4-5.

[24] Entre esos trabajos se destacan los más recientes de Quine y Aekermann, basados en el empleo de los recursos de la metalógica. Véase E. XV. Beth “Les fondements logiques des Mathematiques” pág. 153.

[25] E. W. Beth (loc. cit., pág. *29).*

Entre los axiomas de la construcción de Zermelo[26], se destaca el denominado postulado de la libre elección, enunciado por su autor en 1904 y que dice así:

"Si *C* es un conjunto cuyos elementos son conjuntos *E* no vacíos y sin elementos comunes, existe en conjunto *C*, que contiene un elemento y uno solo de cada uno de los conjuntos *E".*

Este axioma de enunciado, tan sencillo, en apariencia, sirve de base al llamado "Principio general de la libre elección", según el cual, si C es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos no vacíos - con o sin elementos comunes -, existe siempre una ley que hace corresponder a todo conjunto *E* de *C*, un elemento *e* de $E^t$.

Aplicando ese principio al caso particular en que *C* es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado, resulta la importante proposición conocida con el nombre de teorema de Zermelo que afirma que para todo conjunto *C*, existe una ley que hace corresponder a todo subconjunto no vacío *E* de *C*, un elemento *e* de *E* (elemento distinguido de *E)*.

El análisis de las posiciones más o menos radicales adoptadas por los matemáticos idealistas o realistas frente al principio de elección de Zermelo, a causa de la distinta significación que la noción de existencia tiene para unos y otros, nos llevaría demasiado lejos[27], y por ello nos limitaremos a señalar algunas consecuencias que de tal principio se deducen.

Para cualquier alumno de los cursos de Análisis, es bien familiar la clasificación de los conjuntos en finitos e infinitos; clasificación que, como es lógico, exige una previa definición de ellos de tal modo que resulte de carácter disyuntivo.

Y esta es precisamente la primera cuestión que aparece en el desarrollo de la teoría de conjuntos, en la dirección trazada por Dedekind, en su célebre obra "Was sind und was sollen die Zahlen", en la que precisa recurrir a la axioma de Zermelo, cuando, partiendo del concepto de conjunto finito, como consecuencia de la noción de número natural considerada "como producto libre del espíritu humano, independiente de las ideas de espacio y tiempo", y definido el conjunto infinito, como aquel que es coordinable con alguna de sus partes o subconjuntos, se trata de probar que todo conjunto *no finito,* es necesariamente infinito[28]

Sabido es también, que entre los conjuntos infinitos de números reales, existen dos tipos especialmente importantes, a saber: los numerables, cuya potencia o número cardinal es la misma que la del conjunto de los números naturales — supuesto dado a priori — y los que tienen la potencia del continuo, es decir, la del conjunto de todos los números reales.

Dejando de lado cuanto se refiere a la discriminación dentro de la clase de los conjuntos numerables de los que lo son efectivamente, es decir, de aquellos en los que puede establecerse, de facto, la correspondencia biunivoca de sus elementos con los de la sucesión de los números naturales[29], haremos tan sólo observar, que así como en la demostración de que la potencia de un conjunto no altera al sustraer del mismo un subconjunto numerable, parece necesario acudir al axioma de Zermelo[30] la intervención de este axioma no es necesaria — como ha demostrado Sierpinski — cuando se trata de establecer el importante teorema de Cantor - Bendixson, según el cual todo conjunto cerrado no numerable, puede escindirse en- suma de un conjunto perfecto y otro numerable, (o, en particular, finito)[31]

---

[26] La construcción axiomática de Zermelo se encuentra expuesta en la página 129 de la obra de Beth anteriormente citada.

[27] Un análisis completo del axioma de elección en relación con las diferentes posiciones que frente a su admisión o no admisión han adoptado los matemáticos más eminentes, puede verse en el capitulo VI de la monografía de Sierpinski anteriormente citada. Por lo que concierne a la intervención del mencionado axioma en las cuestiones centrales de la teoría de conjuntos, véase la Memoria del propio Sierpinski "Les exemples effectifs et l'axiome du choix" ("Fundamenta Mathematicae", t. II, pág. 212).

[28] Con el fin de eliminar esta dificultad, algunos autores, siguiendo a Zermelo, adoptan una definición de conjunto finito basada en la idea de orden. (Véase la monografía de Sierpinski sobre los números transfinitos, pág. 57.) Otras definiciones de conjunto finito propuestas por Sierpinski y Kuratowski. pueden verse en el trabajo de este último "Sur la notion de l'ensenble fini" ("Fundamenta Mathematicae", t. 1, pág. 530).

[29] Sierpinski" Leçons sur les nombres transfinis", pág. 42 y 125.

[30] Ibid., pág. 115.

[31] La primitiva demostración del teorema de Cantor - Bendixson, se apoyaba en el empleo de los números transfinitos. Posteriormente, Lindelöf, apoyándose en el concepto de punto de condensación, logró demostrar

Por otra parte, si el análisis de las propiedades métricas de los conjuntos de puntos condujo a Borel a la construcción de la teoría de los conjuntos medibles con vistas a su aplicación a las funciones de Baire, (que constituyen una justificación de los números transfinitos de Cantor), fue Lebesgue quien, en su tesis acerca de las funciones representables analíticamente, publicada hace ahora medio siglo, y al plantear el problema de la Integración con toda generalidad, logró edificar una nueva teoría de la medida de conjuntos que comprende como casos particulares las de Borel y Jordan.

Pues bien; al igual que existen conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue, que no lo son borelianamente, es lógico y natural preguntar: ¿Existen conjuntos no medibles (L) o en el sentido de Lebesgue?

La respuesta es afirmativa según hace ver un razonamiento en el que interviene el principio de elección de Zermelo, aunque — y esto precisa también subrayarlo —, no se conoce ningún ejemplo efectivo de conjunto no medible (L).

Esto conduce, lógicamente también, a otra de las cuestiones centrales de la teoría de conjuntos: la que se refiere a la discriminación de aquellos conjuntos que pueden definirse de modo preciso, es decir, sin ambigüedad, a partir de los conceptos primarios — (conjuntos nombrables o denominables) —respecto de aquellos otros que se obtienen mediante razonamientos de carácter puramente existencial y no constructivo, en los que aparece involucrado, de modo más o menos explícito, el axioma de elección, y que han sido objeto de estudios críticos importantísimos por Sierpinski y otros matemáticos[32]

De interés asimismo primordial en la teoría de conjuntos, es el capítulo relativo a la comparación de los números cardinales transfinitos o potencias de los conjuntos, en el que se destacan dos cuestiones a cuál más importante: el llamado "problema del continuo" y la que se refiere a la validez del principio de tricotomía, esto es, la posibilidad de decidir, frente a dos números cardinales, si uno de ellos es igual, mayor o menor que el otro.

La primera de estas dos cuestiones que todavía no ha sido resuelta — al menos que sepamos —, ni aun recurriendo al axioma de elección, ha dado origen a la llamada "hipótesis del continuo", que, en esencia, se reduce a admitir que no existe ningún número cardinal comprendido entre la potencia de los conjuntos numerables y la del conjunto de todos los números reales.

El segundo de los problemas mencionados — el de la tricotomía —, surge, como consecuencia inmediata de la existencia de números transfinitos superiores a los de cualquier sucesión creciente de ellos; principio de inducción transfinita que, a su vez, resulta como simple corolario del teorema que afirma que el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto es de potencia superior a la de éste[33].

Base para la solución del principio de tricotomía en los números transfinitos, es el teorema de Cantor Bernestein, que permite afirmar la igualdad de las potencias de dos conjuntos infinitos, cuando cada uno de ellos es coordinable con un subconjunto del otro; más donde el problema adquiere un interés, por así decir, culminante, y se hace patente su equivalencia con el principio de Zermelo, es en el estudio de los denominados números transfinitos de segunda clase o alefs de Cantor, que expresan las potencias de los conjuntos bien ordenados.

---

dicho teorema sin recurrir a los números transfinitos, mas en su razonamiento interviene el axioma de elección. Una nueva demostración que no utiliza el recurso de los números transfinitos, ni el axioma de elección. fue dada por Sierpinski en su trabajo "Une demostration du théoréme sur la structure des ensembles des points" ("Fundamenta Mathematicae", t. 1, pág. s). El teorema de Cantor - Bendixson puede considerarse como ejemplo representativo de la tendencia a eliminar los números transfinitos de los razonamientos matemáticos, tendencia que, se acusa sobre todo, en los trabajos de Lebesgue, Lindelöf y Sierpinski. Un estudio a fondo de esta cuestión se encuentra en una Memoria de Kuratowski " Une méthode delimination des nombres transfinis des raisonnements mathematiques" ("Fundamenta Mathematicae", t. 111, pág. 76).

[32] Véase el trabajo de Sierpinski citado en la nota (26). Por lo que se refiere a la diferenciación entre los conjuntos nombrables y no nombrables, en relación con los conjuntos medibles, son de especial interés las consideraciones expuestas en la monografía de Lusin "Leçons sur les ensembles analytiques" pág. 20-21, o el trabajo del propio autor sobre el mismo tema en "Fundamenta Mathematicae", t. X, pág. 80.

[33] Sierpinski" Leçons sur les nombres transfinis', pág. 84.

Admitida la noción de orden como primitiva, y la de conjunto ordenado como simple consecuencia de ella, la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos ordenados da origen a los tipos ordinales, como entes representantes de todos los conjuntos ordenados, en los que puede establecerse una correspondencia biunivoca entre sus elementos, abstracción hecha de la naturaleza de estos.

Dentro de los conjuntos ordenados, se destacan por su interés en la teoría, los bien ordenados, caracterizados por cumplir la condición de que todo subconjunto — no vacío de ellos, posee un - primer elemento. Tales conjuntos poseen propiedades muy importantes, entre las que puede considerarse corno característica, la validez en ellos del principio de inducción transfinita, a que antes hemos aludido.

Los tipos ordinales de los conjuntos bien ordenados, son los números ordinales, los cuales se clasifican atendiendo a la potencia del conjunto correspondiente, incluyendo en la primera clase, los números ordinales finitos, y en la segunda, los que corresponden a los conjuntos bien ordenados numerables, los cuales poseen esta propiedad notable: toda sucesión monótona creciente de números de la segunda clase define un número de la misma clase[34].

El estudio de las potencias de los conjuntos bien ordenados, ofrece un interés excepcional, no sólo por el hecho de ser válido para ellas el principio de tricotomía, sino también a causa de sus conexiones con el problema del continuo.

Designando por $x_0$ la potencia de los conjuntos numerables, y por $x_1$ la del conjunto de los números de la segunda clase, se demuestra que no existe ningún número cardinal transfinito entre ellos, como también — y aquí precisa la intervención del axioma Zermelo —, que es $x_1 \leq 2^{x_0}$ sin que pueda afirmarse cuál de los dos signos, menor, o igual, es el que debe excluirse. Mas como $2^{x_0}$ es precisamente la potencia del continuo, el mencionado problema resulta equivalente al de la decisión de esta alternativa, la cual según queda ya indicado no ha podido ser zanjada ni aun recurriendo al axioma de elección[35].

Esta dificultad es precisamente la que ha conducido a formular la llamada hipótesis del continuo a que antes hemos aludido, y que, en esencia, se reduce a afirmar la validez de la igualdad $x_1 = 2^{x_0}$ cuya verificación se traduciría en importantísimas simplificaciones en la teoría de conjuntos, ya que de ser cierta, resultaría como consecuencia inmediata, que todo conjunto no numerable de números reales, tiene necesariamente la potencia del continuo[36].

Por otra parte, la relación entre el axioma de elección y el principio de tricotomía, se evidencia al plantear la siguiente cuestión, de interés central dentro de la teoría de conjuntos: ¿Todo conjunto de números reales, y, en particular, el continuo, puede ser bien ordenado?

A este problema responde un teorema de Zermelo — basado en el axioma de elección —, que afirma que todo conjunto puede ser considerado corno conjunto de elementos de un conjunto bien ordenado, es decir, que todo conjunto, tiene la misma potencia que la de otro bien ordenado, lo cual no significa que, dado un conjunto cualquiera, se pueda efectivamente efectuar una tal ordenación; ello debe entenderse tan sólo, como una posibilidad en sentido idealista.

---

[34] La teoria de los números ordinales ha motivado importantísimos estudios entre los cuales aparecen los del Prof. Cuesta Dutari, de la Universidad de Salamanca, cuyos trabajos “Sobre la aritmetización del transfinito” (“Acta Salmanticensia” t. 1, núm. 2) y “Teoría decimal de los números de orden” (“Revista Matemática Hispano-Americana, t IV. pág. i86), constituyen una notable contribución al tema.

[35] Interesa recordar que no se conoce ningún ejemplo efectivo de conjunto de números reales cuya potencia sea efectivamente. (Véase la monografía de Sierpinski tan reiteradas veces citadas. Pág. 210). Entre los trabajos más recientes relacionados con la hipótesis del continuo, merece citarse el del Prof. Cuesta Dutari ”Una consecuencia de la hipótesis” (“Revista Matemática Hispano-Americana**”, t.** XVI, núm. 1-2**,** pág. II).

[36] Aparte de la monografía de Sierpinski, en la cual figuran sendos capítulos dedicados a la hipótesis del continuo en relación con las ciases de los números ordinales y los números transfinitos, el estudio a fondo de la mencionada hipótesis se encuentra en otra monografía del mismo autor “Hypothese du continu” (Warszawa-Lwöw).

Ahora bien; mediante un razonamiento que no exige la intervención del axioma de elección, se demuestra que la tricotomía implica que todo conjunto tiene la misma potencia que otro bien ordenado, de donde se sigue inmediatamente, la validez del teorema de Zermelo. Y como, inversamente, este teorema permite deducir la tricotomía, resulta como conclusión, que las tres proposiciones: axioma de elección, teorema de Zermelo y la tricotomía son entre si equivalentes[37]. Más tiempo, es ya, de dar fin a estos párrafos, cuya lectura ha soportado el auditorio con tanta paciencia.

Permitidme, sin embargo, todavía, dos palabras que cierren el ciclo de la idea inicial de mi trabajo.

Es un hecho comprobado por la experiencia, que el sentido peyorativo con que suele enjuiciarse la obra de nuestros antecesores, va con frecuencia ligado — como ya indiqué al principio —, a una supervaloración de la propia y personal. Y si ello constituye uno de tantos aspectos de las humanas vanidades, que suelen darse en ciertas esferas intelectuales, no lo es menos ese afán — a veces disimulado — que puede observarse en algunas figuras preeminentes en el campo de la cultura, de que su nombre quede vinculado a la posteridad. Afán de la gloria póstuma que, acaso responda a la necesidad de llenar un vacío espiritual, en orden a las creencias en la vida ultraterrena.

Yo tengo la convicción moral — adquirida desde hace ya algunos años —y reafirmada en la reciente lectura de sus trabajos académicos, que ninguno de aquellos tres Profesores, Doménech, Mundi y Clariana, alimentaron jamás esos complejos; se limitaron sencillamente y en esta sencillez radica precisamente su mayor mérito —. al cumplimiento d sus deberes, sin la menor preocupación por el juicio que su actuación pudiera merecer a sus sucesores. No obstante, y por las razones en un principio aducidas, he querido trazaros aquí un esbozo de su labor académica, como homenaje póstumo a su memoria, demostrando que, no obstante, esa indiferencia hacia el pasado, que domina a las nuevas generaciones, conservan plena validez aquellas palabras que Cauchy dirigiera en su lecho de muerte al Arzobispo de París: “*Los hombres pasan, pero sus obras quedan”*.

☼ ☼ ☼ ☼

[37] Sierpinski” Leçon sur les nombres transfinis”, pág. 233.