Varias consideraciones filosófico – matemáticas con relación a los entes infinitos

1884

Escasos merecimientos me abonan para tener el alto honor de colocarme entre tantos distinguidos e insignes varones, como en los momentos presentes me rodean. Solo vuestro levantado y noble deseo en estimular a los que aspiran al bello ideal de la ciencia, podía moveros a nombrar académico, a quién, después de estudios muy prolijos y no pocas vigilias, ha adquirido el conocimiento de su corta suficiencia. Permitidme, pues, que en momento tan solemne, exprese mi gratitud hacia la secular Academia que hoy se digna recibirme en su seno, dirigiéndola mi más ardiente y sincera protesta de adhesión, para corresponder así, siquiera sea débilmente, a su generosidad, la cual pesa tanto sobre mi, que ha sido bastante para decidirme a aceptar un cargo que de otra suerte jamás habría tenido valor para admitir. Duélome a par del alma que los Estatutos me obliguen a leer un discurso, porque estoy persuadido ha de llamar poco vuestra atención, ante el recuerdo de los notables trabajos que estáis acostumbrados a escuchar del brillante plantel de varones doctos encanecidos en la ciencia que cobija este centro del saber; y si he de hablaros con ingenuidad, confesaré que vacilé a la vista de tal condición ineludible, mas como al declinar el cargo de académico con que deseabais honrarme, no habría correspondido a vuestra dignación, ante la alternativa de pasar plaza de ingrato o de poner a prueba vuestra proverbial indulgencia, opté por lo último, seguro de que vuestra tolerancia estaría a la altura de vuestra sabiduría.

Largo tiempo anduve indeciso acerca del punto que debía desarrollar. Mas al fin plugo a Dios que tropezase con aquella hermosa afirmación de Chateaubriand: "*Despreciar lo que no se puede comprender es mal modo de discurrir*" y que a la par recordase aquel elevado pensamiento de Balmes: "*Estamos entre dos infinitos, y el débil hombre que no alcanza ni el uno ni el otro, debe contentarse con sentirlos, esperando que una nueva existencia le aclare los arcanos en que ahora no divisa sino profundas tinieblas*"

Inspirado en la verdad de estos pensamientos, cesaron todas mis vacilaciones, y resolví desarrollar este trabajo, que someto gustoso a vuestra consideración.

Señores: Cuando el hombre tiende su vista por la bóveda celeste, en una de esas noches tranquilas en que la atmósfera pura y diáfana sirve como de cristal a los abismos sin fondo, donde gravitan los astros en brillantes escuadrones; su corazón experimenta una suave complacencia, y al propio tiempo una curiosidad, que le mueve a escudriñar los misterios que la naturaleza encierra en medio de sus pliegues: el sentimiento de lo bello, de lo grande y de lo sublime, agita entonces su alma hasta perderle por entre las regiones de lo infinito. Mas si la imaginación del hombre se anonada ante la magnitud de lo infinitamente grande, sube de punto su asombro al querer fijarse en esos seres infinitamente pequeños que le rodean por todas partes, y que a pesar de su pequeñez, no dejan de sujetarse a leyes invariables, muchas de las cuales permanecen cubiertas por el velo del misterio; por esto sostiene Plinio, que la majestad de la naturaleza, nunca se nos manifiesta tan grande y maravillosa, como cuando la contemplamos reducida a sus pequeñísimos elementos; a lo cual podríamos nosotros agregar:

¿Quién sabe si las leyes de Kepler y Newton, solo son corolarios, o leyes particulares de otras mas generales, correspondientes a los mundos infinitamente pequeños? ¿Quién sabe si el microscopio debía preceder al telescopio para recabar mayores avances de los mundos infinitamente grandes?.

Sea como quiera, lo cierto es que todos estos conceptos procedentes del mundo material, contribuyen para promover en nosotros la verdadera noción de los entes infinitos, base de todas nuestras conquistas científicas; idea colosal, que a pesar de alumbrar nuestra inteligencia y de alentarnos en todas nuestras investigaciones, nos confunde tan pronto como osamos analizar su esencia. No obstante, si locura fuera pretender descifrar por completo el infinito que nos acosa y rodea por todas partes, digno de censura sería el dejar dormir esa grandiosa idea en el letargo de la indiferencia. Y puesto que en la Matemática la idea de ese infinito tiene tal importancia, que viene a constituir la base de sus estudios más trascendentales; ya que de su descuido pueden originarse grandes conflictos, sobre todo si la Filosofía no se hermana debidamente con la Matemática, yo tengo para mí, que es del caso ocuparme en este ligero discurso de ***varias consideraciones filosófico-matemáticas con relación a la idea de los entes infinitos*; no ciertamente con la pretensión ridícula de descifrar todos los arcanos que envuelven este punto, sino para contribuir al fomento de esta clase de estudios, y manifestar la imperiosa necesidad que tenemos de una luz superior, para avanzar con paso firme hacia los dilatados horizontes de la ciencia.

I

La unidad en la variedad es la ley que rige la naturaleza; ley que resplandece y brilla por todos los ámbitos del Universo: ella constituye la expresión compendiada de las estrechas relaciones que se van descubriendo cada día, entre las diferentes fuerzas de la naturaleza; no ya en los seres minerales solamente, sino entre los seres orgánicos, entre los vegetales y animales, resumiéndose todos, podríamos decir, en el hombre, que sintiendo alumbrada su inteligencia por los resplandores de la luz divina, viene a ser el compendio de toda la creación, la lira viviente del mundo, el lazo de unión entre lo visible y lo que no se ve, lo material y lo espiritual, lo deleznable y perecedero y lo inmutable y eterno. Esta sublime unidad, en medio de la variedad, debió sentirla y comprenderla el hombre con toda su plenitud, antes de su prevaricación; mas tan pronto como el orgullo y la soberbia, soplando en él con aliento maléfico, le hicieron perder de vista la llama inefable del Ser Supremo; su inteligencia cubrióse de negras sombras, quedando muchas veces envuelto en oscuridad, y colocado en situación falsa y peligrosa. El sello de la Divinidad, no obstante, aun en medio de estas tinieblas, no pudo extinguirse del todo: la tendencia a la armonía, a la unidad en medio de lo vario, se descubre sino de una manera franca, siquiera más o menos velada por los hombres de los prístinos tiempos; así lo manifiestan Ferécides, Pitágoras y otros sabios de la antigüedad, hasta el punto de exclamar el divino Platón que Dios, el gran Arquitecto, el gran Geómetra, emplea toda su actividad en geometrizar el Universo. Mas el principio de unidad y concierto eternal no se presentaba aun al hombre con bastante claridad en los tiempos que precedieron a la Cruz.

Para esto fue preciso que Dios, por su misericordia, enviara a la tierra a Aquel, en quien estaban vinculados los vivos tesoros que el primero de los mortales había perdido por su desobediencia; y con la sangre derramada por el Redentor desde el monte Gólgota, la inteligencia del mísero mortal adquirió nuevos fulgores, si bien jamás pudieron equipararse a los primitivos, es decir, a los que recibieron nuestros padres en el Edén por mano propia del Eterno.

Siente el hombre, como todos sabemos por experiencia propia, un vehemente deseo de adquirir la verdad; por ella, atraviesa de un confín a otro la tierra; por ella, sujeta la vida a una mortificación constante; por ella, lucha y muere, y sin embargo, ¡Oh misterios indescifrables del corazón humano! a veces desmaya en su tarea, y aun halla tedio en lo más noble a que puede dedicarse su espíritu, prefiriendo emplear toda su actividad en cosas baladíes y hasta impropias de su nobleza. Esas vacilaciones continuas de la inteligencia humana, proceden a no dudar, de la lucha que se establece en su espíritu entre la verdad y el error, entre la luz y las tinieblas, y en su empeño de conquistar esa verdad tal cual la siente, aunque no la descifre en toda su hermosura, vislumbra algunas ráfagas, y en medio de su delirio, toma por luz lo que son tinieblas, y en cambio cierra sus ojos a lo que está alumbrado por los verdaderos rayos de la Divinidad.

Al estudiar la marcha de la humanidad docente, sobre todo en el vasto campo de la filosofía, nótase como el hombre cae con frecuencia en alguno de los dos abismos que se abren a sus pies. Entre ellos, merecen especial mención las lucubraciones de las escuelas filosóficas del materialismo y del idealismo; ellas son, podríamos decir, los eslabones extremos de esa prolongada cadena constituida por una multitud de filósofos que vagan por entre las sombras del error, unas veces por efecto de sus inclinaciones, otras por su educación y sus estudios, que informando torcidamente su espíritu, les procuran en muchos casos, una dirección errónea y fatal.

La idea de unidad que domina constantemente en la inteligencia humana, ha influido grandemente, sin duda, en los muchos delirios que se notan en las diferentes escuelas filosóficas; y esto por haberlo llevado fuera de sus límites naturales: el filósofo al buscar el fundamento de nuestros conocimientos, se ha olvidado de que la relación cognitiva dada por la referencia entre el elemento cognoscible y el cognoscente, implica, además de una afirmación correspondiente a la identidad del ser como constitutiva de la verdadera unidad, una negación relativa como confirmación de lo vario; idea que aunque muy concreta, debiera bastar para destruir no solo la subjetividad de Fichte y la objetividad de Scheling, sino también la doctrina de Hegel, que se apoya en la identidad de la idea.

Es decir, que según el punto de vista relativo en que el hombre puede alcanzar la ciencia, bien podríamos sostener: que el ser y no ser, lo uno y lo vario, constituye la verdadera base de sus conocimientos, conforme al gran principio de contradicción; lo que en suma nos da a comprender la imperiosa necesidad que hay de atender al mundo real y al ideal para el desarrollo de una sana y juiciosa filosofía, adunándose lo subjetivo con lo objetivo dentro de la noción del ser, bien que siempre de una manera relativa.

Así pues, para las investigaciones filosóficas, fuerza será conceder tres momentos: el empírico, el abstractivo y el deductivo, tales como los considera el eminente Rdo. D. Antonio Comellas, a fin de poder averiguar con el escalpelo de la crítica más severa, los errores en que han caído muchos de los sistemas filosóficos. Mas no es mi propósito hacer un estudio de todos ellos, pues esto nos separaría demasiado del punto principal de este discurso; mi objeto solo es reseñar las escuelas que más principalmente han tomado carta de naturaleza en el estudio de la Matemática, permitiéndome antes, no obstante, la libertad de hacer algunas ligeras observaciones respecto a la tradición filosófica y a la duda de Descartes, por haber fomentado en parte y en parte también estorbado el desarrollo de la ciencia.

Sensible es en verdad que la tradición filosófica haya sido descuidada y hasta menospreciada por algunos notables filósofos, pues: ¿Quién puede negar la importancia de los insignes trabajos de Platón y Aristóteles, por ejemplo, cuyos nombres se han abierto paso al través de todos los siglos? Por esto no solo Bacon, sino Descartes, son dignos de censura por su tendencia al individualismo, confirmándolo así uno de los filósofos más notables en nuestros tiempos, el inmortal Leibnitz.

Mas si es injustificado negar la tradición filosófica, no lo es menos el llevar la duda fuera de sus límites naturales, tal como lo hace Descartes: este filósofo después de dudar de todo; después de renunciar a los conocimientos de la antigüedad acaba por sentar como único principio de la moderna ciencia: “*Yo pienso, luego existo*”. Empero, supuesto que de todo duda ¿porqué no dudar también de este principio? ¿qué razón tiene para aceptarlo y desechar los demás?. Ciertamente que en la duda de Descartes, se encuentran no pocas vaguedades y anomalías, ora al tomarlo en sentido limitado, ora al confundirla hasta con la duda universal y por ello paréceme justificadas cuantas censuras le han dirigido varios filósofos.

En el criterio para el mayor desarrollo de una ciencia, no ha de pesar tanto la duda cuanto el verdadero y puro amor hacia aquella, porque si bien la duda moderada acompañada de una buena investigación, puede afirmar la certeza; una duda desmedida puede cortar de un solo hachazo el árbol frondoso que debía darnos óptimos frutos.

En gracia a la brevedad que debo imponerme en estas generalidades, me reduciré a indicar rápidamente como de las tres escuelas filosóficas que más se han ocupado de la Matemática: el Positivismo, el Krausismo y el Escolasticismo; solo esta última puede satisfacer cumplidamente las altas y nobles aspiraciones de nuestro espíritu; contra la opinión de aquellos que se esfuerzan en buscar en el Positivismo y en el Krausismo, la base de los estudios matemáticos.

Por lo que toca al Positivismo, cuyo jefe es A. Comte, nos bastará decir que a pesar de su aparente sencillez falsea por su base, pues dando una gran preponderancia al momento empírico descuida los momentos abstractivo y deductivo achicando así la aspiración natural del espíritu humano hacia lo ideal, razón por la cual se puede sostener que sus principios conducen hacia uno de los dos abismos que hemos señalado más arriba: el materialismo

En el Krausismo por el contrario, predomina el momento abstractivo, tiene por base la intuición del ***yo***: y por medio de la razón suficiente se eleva al conocimiento de Dios, para descender desde este punto como el más culminante, a las existencias y determinaciones de la naturaleza del espíritu y de la humanidad; mas desde luego se desprende que es una quimera, o más bien una ilusión el querer compenetrarse de la existencia y naturaleza de Dios, tomando por punto de partida una base tan estrecha como es nuestro ***yo***; pues, necesariamente ha de resultar un falso concepto del Ser Supremo, y por ende de todo lo demás; bien lo demuestran aquellas afirmaciones de que el mundo es necesario, increado, eterno e infinito: y aquí se abre el otro abismo de que hemos hablado anteriormente; el idealismo.

De suerte, que tanto el Positivismo como el Krausismo, no pueden ofrecer una verdadera base para los estudios filosófico-matemáticos, pues ambas escuelas pecan de falta de equilibrio entre los factores constitutivos de nuestros conocimientos, tendiendo al Panteísmo en sus dos fases, como hijos legítimos de las doctrinas de Spinoza.

Por esto el Escolasticismo, que no descuida ninguno de los tres momentos citados, puede mejor que otra escuela alguna ofrecer grandes y maravillosos resultados en las diferentes ramas del saber humano, relacionados con la filosofía; como lo corroboran magníficos y extraordinarios trabajos desarrollados en estos últimos tiempos por inteligencias privilegiadas.

Bajo este convencimiento adopto como norma de mis investigaciones matemáticas, los fundamentos de dicha escuela, sentado lo cual entro desde luego en materia.

I I

Al buscar los elementos fundamentales de la Matemática, encuéntranse la noción de ser y la extensión como factores de la misma; abarcándose en la primera, las ideas de tiempo y de los entes infinitos.

Si nos fijamos por el momento en la extensión, y la referimos a nosotros mismos, veremos que no es una sensación, sino una idea; y si bien nuestra imaginación nos la representa muchas veces bajo forma sensible, ello es que así no constituye la verdadera extensión, pues esta debe ser considerada a manera de un fondo inmenso que desde el punto en que se le limite da lugar a toda forma determinada; y en este concepto cabe asegurar que toda figura es resultado de dos ideas fundamentales: una extensión positiva y otra negativa; ideas suficientes para constituir con la extensión una de las ciencias más bellas la *Geometría*. Ciertamente que el poder de la extensión es grande, pues todo cuanto conocemos en la naturaleza corpórea redúcese a modificaciones o propiedades de la misma; y si bien en la Física, Mecánica y Astronomía, entran como elementos los cuerpos y el tiempo; todo ello puede ser referido a la base de la extensión, llegando la fecundidad de este concepto a expresar leyes de la naturaleza a que no alcanza la idea de número. Por otra parte, en la idea de extensión, hay algo real, pues de lo contrario de poco serviría el estudio de la Geometría.

Todas las ciencias físicas estriban en la suposición de que la extensión real esta sujeta a los mismos principios que la ideal; y la realidad es tan geométrica como nuestra idea; a este punto dice Balmes: "*¿Existe en la naturaleza algo que corresponda al punto geométrico que reúna todas sus condiciones con tanta exactitud como pueda desearlo la ciencia en su más puro idealismo? creo que sí*" y más adelante continua del siguiente modo: "*Enhorabuena que nuestra experiencia tenga un límite en la división pero la divisibilidad en si misma no lo tiene: un ser dotado de más medios que nosotros podría llevar la división más allá y en esta escala no hay límites pues que en último recurso nos hallamos con Dios, cuyo poder infinito puede llevar la división hasta lo infinito, cuya inteligencia infinita ve en un instante todas esas partes en que se haría la división".*

Con todo, en la extensión debemos siempre procurar no confundir jamás la idea con su representación: la idea de extensión es una, su representación múltiple; la primera es resultado de la razón, la segunda de la imaginación; y por esto el espacio no debe representarse infinito jamás, sino indefinido, palabra que indica impotencia para encontrar límites, y aunque ellos existan, no los podemos asignar, resultando para nosotros lo mismo que si no fueran.

Así pues, para salvar todas las dificultades que pudieran presentarse respecto a este punto, conviene distinguir la extensión-sensación de la extensión-idea cuyos conceptos dan origen a la Geometría científica y a la Geometría ideal o pura; las cuales deben convenir, salvo las diferencias de los entendimientos que las posean, esto es, según se trate de un espíritu puro, o de un espíritu sujeto al mundo sensible; mas como el hombre para alcanzar la Geometría científica necesita del mundo sensible, fuerza es conceder tres fases para la Geometría: la ideal, la científica y la empírica o representativa, división de todo punto indispensable para poder argüir debidamente en materia de suyo tan delicada e importante.

Mas si arduo y difícil es el estudio de la extensión, no lo es menos el del tiempo, pues según un notable filósofo podemos decir: "*Nada más fácil que contar el tiempo, pero nada más difícil que concebirle en su esencia. En lo primero no se distingue el rudo del sabio: ambos tienen ideas igualmente claras, lo segundo es sumamente difícil aun a los hombres más eminentes*".

Para convencerse de estas dificultades, basta notar, por ejemplo, el circulo vicioso en que parece caerse, cuando se relaciona la idea de tiempo con la de sucesión que le es inherente, o también cuando se analiza el principio de contradicción que esta íntimamente relacionado con la idea de tiempo. Afortunadamente la semejanza que existe en el fondo entre la idea de espacio y tiempo, permite establecer un cierto paralelo de bastante utilidad para su estudio, como se puede apreciar en muchas investigaciones de Mecánica. Pero, temiendo abusar de vuestra benévola atención si me permitiera otras consideraciones metafísicas a que ese punto nos conduciría, me concretaré tan solo a manifestar que la idea de tiempo no es una forma de la sensibilidad, sino del orden intelectual puro, y que cuando desciende a la experiencia, se realiza sujetándose a medida sensible.

Dejando ya estas generalidades acerca de la extensión y el tiempo, factores principales de la Matemática, pasaré con mejor base al estudio de los entes infinitos, que es el punto culminante a donde se dirige este trabajo, y en el cual con facilidad el hombre se desvanece, demostrándose con ello que se halla en las últimas regiones a que puede aspirar la ciencia humana. El horizonte es en efecto tan dilatado que no es posible señalar la línea divisoria; ella va a perderse en las altas regiones del Eterno.

En conformidad con la base admitida para nuestras investigaciones científicas, débese dividir el infinito en actual y potencial, o lo que es lo mismo: en categoremático y sincategoremático; siendo el primero el infinito simpliciter, que contiene todas las perfecciones posibles absolutas y el segundo el infinito secundum quid, el potencial, el correspondiente a lo indefinido que puede aumentar o multiplicarse sin llegar nunca a un límite actual. Hay que advertir que dentro del escolasticismo, admítese la posibilidad de un infinito creado o existente fuera de Dios, en el sentido de infinito potencial, pues Dios puede aumentar indefinidamente una extensión, o multiplicar un número de objetos sin alcanzar jamás su término absoluto, siendo esto imposible con el infinito actual. No falta, sin embargo, quien admite la posibilidad de la existencia de este infinito en orden a la extensión y al número: Balmes es uno de los que lo aceptan en orden a la extensión, si bien se deja ver en todos sus argumentos que la duda invade su mente. Si pasamos a la escuela de Krause, con asombro veremos que además de la infinidad de la extensión, sostiene la del número, considerando no solo la posibilidad de su existencia sino su propia realidad. Mas esto es a todas luces imposible, como lo demuestra el Ángel de las escuelas, y con él cuantos hagan recto uso de su razón. Ya no vacilo en llamar funesta en sus consecuencias a una doctrina, que se permite extender la esencia de Dios, o sea el infinito actual, a todas las cosas de la Naturaleza.

A este punto podríamos decir con un gran pensador: "*El ateísmo de los modernos filósofos se aviene con lo infinito, no rechaza esas grandes ideas que vagaban por el mundo antiguo como restos de una tradición primitiva y que luego fueron fijados, aclarados y elevados por la superior enseñanza del Cristianismo. La filosofía del siglo pasado, se había sentado en las tinieblas y sombras de la muerte, y se declaraba a si propia en posesión de la luz y de la vida. La filosofía actual está todavía en la oscuridad, pero no se contenta con ella, anda a tientas en busca de una salida a las regiones de la luz. De aquí estos esfuerzos desesperados por fijarse no en la materia, sino en el foco de la inteligencia, en el* ***yo****, es decir, en el espíritu; de aquí ese continuo empleo de las palabras absoluto, incondicionado, infinito, palabras que si bien las más veces la conducen a un absurdo, indican sin embargo una aspiración sublime*".

No obstante, hoy que la ciencia tiende a desarrollar su espíritu filosófico, causa honda satisfacción el contemplar como algunos pensadores tienden a aproximarse a la escuela de Santo Tomás, para resolver seriamente todas las cuestiones metafísicas de la cantidad, y en particular las que se relacionan con el infinito. Divídenlo tales filósofos en absoluto y relativo, en el supuesto de que este último sea el único que pueda tener alguna representación en el estudio de la Matemática, correspondiendo al infinito potencial o ***secundum quid*** de los escolásticos.

De todo lo dicho resulta, que mientras Descartes sostiene que la extensión del mundo es indefinida; Leibnitz la supone infinita, fundado en su malhadado optimismo; mientras Balmes acepta la posibilidad de la existencia infinita de la extensión, la niega para el número; mientras los Krausistas suponen la posibilidad y realidad de la existencia infinita de la extensión y del número, los escolásticos niegan la posibilidad y existencia del infinito actual, tanto en la extensión como en el número.

Si yo hubiese de optar entre tan opuestos pareceres, entiendo, después de un maduro examen, que a pasar de las restricciones de los escolásticos, son éstos los que mejor que nadie resuelven la cuestión, por atender perfectamente a los tres momentos de la actividad humana, como ya tuve ocasión de expresar en otro lugar. No permitiéndome la latitud de mi trabajo traer aquí todos los argumentos de esa escuela, invito a los aficionados a tales estudios a consultar la inmortal filosofía del Excmo. Sr. Zeferino González, así como los " Esplendores de la Fe " del sabio P. Moigno; mas por si alguna sombra quedara todavía en nuestro espíritu, no olvidemos que siguiendo las huellas de tantos Maestros del saber, podemos abrigar la esperanza de no ser sorprendidos en ninguna inconsecuencia, como diariamente acontece a las demás escuelas filosóficas. No se olvide tampoco, dispensadme os lo repita, que los rayos de la ciencia se presentan indecisos y vacilantes, mientras el alma aprisionada por el cuerpo, sigue el breve trecho que media entre el nacer y el morir.

Partiendo pues del principio de que el infinito matemático no es más que el infinito en potencia de los escolásticos tendremos la mejor base para sostener todos nuestros asertos, y en particular para interpretar lo que impropiamente se vienen llamando infinitos de diferentes órdenes en las Matemáticas sublimes.

Veamos como se suele probar la existencia de estos infinitos de diferentes órdenes. Si por la parte superior del eje de las $\underline{x}$, trazamos dos rectas paralelas, puede suponerse que se alcance una extensión infinita relativa; mas prolongando las dos paralelas anteriores por la parte inferior de dicho eje, se obtiene una superficie igual a la primera; si prescindimos del citado eje, tomando la faja entera formada por las dos paralelas prolongadas indefinidamente, resulta una nueva faja que se considera doble que la primera, y procediendo del mismo modo respecto otras fajas, y en el concepto de designar por ∞ la faja primitiva, se deducen las expresiones $2\ \infty$, $3\ \infty$ .... a fin de alcanzar los nuevos valores $\infty^2, \infty^3 \ldots$ correspondientes a los diferentes órdenes de infinito.

Aquí creo del caso señores, detenerme algunos momentos para hacer algunas observaciones muy importantes, a fin de evitar toda clase de duda o confusión en materia tan difícil. En realidad de verdad, si se procede con rigurosa lógica, la idea de infinito matemático debe resolverse en la idea de variabilidad, como sostiene el distinguido Catedrático D. Pedro Marcer Pbro., en su precioso discurso acerca del infinito dentro del escolasticismo; idea notable que aun cabe referir a la de indeterminación o ilimitación respecto al quantum, para hacerla más comprensible y eficaz. Para vigorizar este aserto, bastará considerar el mismo ejemplo anterior, o sea, las dos paralelas antes mencionadas, pues fácilmente se comprende que al decir que alcanzan una extensión infinita es porque tácitamente se supone (dada la unidad superficial) no ser posible fijar el ***quantum*** como valor de la superficie que se trata de medir, puesto que ignoramos cuales son los límites de ésta.

En este concepto se dice que es infinito; de manera que la indeterminación de medida, por ser esta mayor que cualquiera otra por grande que sea, da origen a la palabra infinito. Mas como muchos toman el infinito como representante de un todo, y por tanto de un límite, último de todas los límites imaginables, y en el supuesto erróneo de poderlo alcanzar; de ahí esas confusiones y absurdos, que suben de punto al sujetar el infinito a la marcha de los algoritmos aritméticos. Legendre, por ejemplo, cuando sostiene que toda recta indefinida situada en un plano, divide a éste en dos partes iguales, nos prueba de una manera evidente que es víctima de semejantes ofuscaciones y errores, los cuales por desgracia han ido minando desde lejanos tiempos toda la ciencia matemática.

Así, para evitar semejantes anomalías y confusiones, sería de desear que en vez de usar la palabra infinito se introdujera la de cantidad indeterminada o ilimitadamente grande; con ello es seguro que se habrían evitado muchas discusiones y vencido no pocas dificultades. No sin motivo sostiene el célebre Balmes, que las palabras en muchos casos son origen de disputas y controversias entre los hombres.

Modificada la palabra, debiera modificarse también el algoritmo, a fin de que desapareciera la noción de límite: el signo ∞, debiera sustituirse por una *I,* inicial de cantidad ilimitada: y así al pasar a la generación de los diferentes ordenes, fuera menester, también, hacer desaparecer la forma aritmética, bajo la cual va desenvolviéndose el signo ∞, pues al escribir $2\ \infty$ suele verse la igualdad siguiente: $2\ \infty = \infty + \infty$, lo mismo que si se tratase de $2\ a = a + a$, cuando en $2\ \infty$ no debe verse la duplicación de la extensión expresada por ∞, sino una doble indeterminación; y según estas consideraciones podríamos sustituir a los algoritmos $2\ \infty\ 3\ \infty$ **...** por los siguientes: $I_2\ I_3$ .... y a los diferentes ordenes, $\infty^2, \infty^3,...$ las nuevas expresiones: ${}_2I,\ {}_3I,.....$

Estas consideraciones llevan la ventaja de poder pasar a la expresión de los infinitamente pequeños, sin necesidad de hacerlos dependientes de los infinitamente grandes, con tal que se conserve la idea de indeterminación, fuera de todo quantum; pues así como la idea de infinitamente grande solo se concibe en el supuesto de ensancharse indefinidamente los límites de una figura, en el caso contrario, esto es, de que los límites se estrechen hasta perderse el quantum, debe dar lo que vulgarmente se llama un infinitamente pequeño.

Con estas consideraciones se pueden evitar las vacilaciones deplorables que se notan entre los matemáticos más notables, cuando, por ejemplo, pretenden descifrar si lo finito resulta o no de lo infinito, pues mientras Leibnitz sostiene la afirmativa, Gauss y Bertrand, optan por la negativa; y Duhamel oscila entre la afirmativa y la negativa. De lo dicho se infiere que solo Leibnitz, está en lo cierto, pues así como considerando la extensión como un fondo común por restricción o limitación se obtiene toda clase de figura, a la par partiendo de las cantidades ilimitadamente pequeñas, o sea, de los infinitamente pequeños, no por restricción, sino por multiplicidad indefinida, pueden ellos dar origen a una figura también limitada y finita. Notorio es que el ignorar los límites de estos indefinidamente pequeños no es negarlos, siendo su carácter distintivo solamente la indeterminación; idea primera y única que nos queda de la cantidad referida a la extensión, para mayor claridad, y después que haya perdido el quantum, restándonos solo la idea de extensión indefinidamente pequeña, sin límites asignables.

Formado ya el concepto y cambiada la denominación de infinitamente pequeño, solo falta modificar el algoritmo, creyendo para el caso suficiente cambiar la I en i, con todas las modificaciones inherentes a la cantidad indefinidamente grande respecto a sus órdenes, conforme se ha explicado ya.

Con esto doy por terminado el estudio del ente infinito en sus dos conceptos, y si bien es verdad que cabría el extenderse acerca de estas últimas consideraciones, no puedo olvidar que me dirijo a vosotros, cuya superior ilustración solo necesita apuntar la idea para que la abarquéis inmediatamente en su conjunto y para que sepáis apreciar mi pensamiento en su justo valor. No obstante, como quiera que el infinitamente pequeño es de suma trascendencia para el análisis, creo indispensable manifestar antes de poner fin a estas investigaciones filosófico-matemáticas, las varias controversias a que ha dado lugar su estudio.

Aquí hemos de ver confirmadas las premisas sentadas en la primera parte del discurso con los encontrados pareceres de los filósofos matemáticos.

El conflicto en el método infinitesimal, parece tener su origen en la paradoja que resulta de que de un método de aproximación puedan resultar cálculos exactos: esta es la razón porque A. Comte, supone dicho conflicto insuperable entre la teoría y la práctica del cálculo trascendental, sosteniendo además éste que se resiente del espíritu metafísico de la época en que se desarrolló. D´Alembert para justificar el método de Leibnitz dice: "*Id adelante y la fe os vendrá*", principio que Fleury ataca fuertemente.

En algunas obras, no obstante, se sostiene que se ha llegado a la solución definitiva de la metafísica del cálculo infinitesimal; citaré entre los más notables "La teoría de las funciones analíticas" por Lagrange; las "Reflexiones sobre la Metafísica del Cálculo infinitesimal" por Carnot; el "Estudio sobre la metafísica del alto cálculo" por Freycinet; "El cálculo infinitesimal" por Fleury etc.; empero, preciso es confesar que ninguno alcanza a resolver debidamente el problema. Veámoslo.

Lagrange se propone evitar con su teoría de las funciones analíticas toda consideración de infinitamente pequeño, de cantidades que nacen y se desvanecen, de límites y de fluxiones. En el método de Lagrange, toda función es reemplazada por un desarrollo en forma de serie como consecuencia natural del famoso teorema de Taylor, pero contra este procedimiento se levanta Fleury, manifestando que si bien queda demostrado el desarrollo en serie para cierta clase de funciones, no lo queda para una función cualquiera. Todavía cabe otra observación: al despreciar Lagrange los restos en la serie, esto dado caso que sea convergente, tiende a su pesar a los infinitamente pequeños, haciéndose así tributario del método de Leibnitz.

¿Que diremos ahora, de la metafísica del cálculo en el sistema de Carnot? ¿Qué diremos de ese libro que por mucho tiempo ha pasado hasta para los hombres más notables como el *desideratum*, como la solución única y definitiva de todas las indecisiones y vaguedades acerca de los infinitamente pequeños?

Digna de encomio y consideración es la obra de Carnot, por su originalidad y por el modo como presenta las diferentes cuestiones de los indivisibles, de los coeficientes indeterminados, de los límites, de las derivadas, cual ramas desprendidas del tronco común, o sea del método de Leibnitz. Por esto ha merecido los más cumplidos elogios de parte de Lagrange y Freycinet. Sin embargo, cosa singular, Carnot se ve precisado a exclamar: *"...jamás me he podido formar más que una idea imperfecta de estos elementos, especie de seres singulares que tan pronto juegan el papel de verdaderas cantidades, tan pronto deben ser considerados como absolutamente nulos, y semejantes por sus propiedades equívocas, tienen el medio entre la magnitud y el cero, entre la existencia y la nada. Yo creo que jamás ha sido posible a nadie adquirir otra cosa que ideas imperfectas de estos elementos, que tienen el medio entre lo muy pequeño y cero*".

Con todo, Carnot piensa desatar el nudo gordiano por medio de una compensación de errores; mas a esta solución opone juiciosamente Fleury que los resultados que se obtienen como por encantamiento, proceden de haber supuesto Carnot errores que en realidad no existen, no cabiendo por lo tanto la compensación; y continua Fleury "*¿Cuando los infinitamente pequeños no se reduzcan a cero, existirá verdaderamente la compensación? ¿En dónde existe esa demostración general*?". Esta objeción terrible es hermana de la que opone Lagrange, cuando a pesar de los elogios que tributa a Carnot dice: "*Es muy difícil dar una demostración general de la metafísica del cálculo infinitesimal*".

Si pasamos ahora, al alto cálculo de Freycinet, encontraremos que en uno de sus párrafos más importantes, se expresa en los términos siguientes: "*Se tiene no solamente el derecho, sino aun el deber de suprimir el infinitamente pequeño en las relaciones, a fin de restablecer la realidad de las cosas"*. ¿Que entiende empero M. Freycinet, con lo de restablecer la realidad de las cosas? ¿Cuantos misterios no encierran estas palabras? ¿Por qué después de prodigar tantos elogios a Carnot, no le sigue en su metafísica del cálculo?

En realidad de verdad, es muy poco lo que se adelanta en el estudio de este llamado alto y sublime cálculo infinitesimal.

Por fin, si nos fijamos en la obra de Fleury, obra que parece salvar todas las dificultades de cuantos procedimientos se acaban de explicar, se encontrará que si bien orilla alguna dificultad, cae en insondable abismo, por suponer el infinito matemático como una cantidad finita. Este matemático divide el infinito en dos clases: absoluto y relativo, admitiendo a la par dos infinitamente pequeños, uno como incremento de variable independiente, que puede alcanzar el valor cero; y otro que se expresa por $y = \frac{1}{x}$, en el supuesto de aumentar $\underline{x}$ indefinidamente pudiendo acercarse y al valor cero tanto como se quiera, sin alcanzarlo jamás, pues supone absurda la expresión $\frac{1}{\infty} = 0$, que no obstante admiten tantos pensadores.

Considera en su consecuencia la vaguedad y confusión de muchos autores, por no haber atendido debidamente a las dos clases de infinitamente pequeños ya expresados, y fijándose en Duhamel, recuerda que éste define el infinitamente pequeño: "*Toda cantidad variable que tiene por límite cero*", después de cuya definición continua Duhamel manifestando que el infinitamente pequeño, puede considerarse como límite de variable independiente, y que por lo tanto puede adquirir el valor cero; y como este sea el sentido en que generalmente lo toma, resulta según Fleury, la contradicción palmaria de que el infinitamente pequeño que se considera casi nunca lo es.

Bien podríamos decir que Fleury es de los pensadores que más han escudriñado el modo de ser de los infinitamente pequeños; sin embargo, al suponer el infinito relativo como cantidad finita, revela sus tendencias materialistas. Vanos son sus esfuerzos por explicar esa noción fundamental de los matemáticos fuera de la metafísica y de la buena filosofía; y con verdad podría afirmarse de él que al arrancarse los ojos para ver más que los otros, ha quedado sumido en la más profunda oscuridad.

Para comprender la anomalía de ese infinito relativo como finito, bastará atender a la idea fundamental de lo infinito, esto es, a su variabilidad o límites indeterminados; y fuerza es confesar que solo así se concibe como dicho infinito se halla fuera de todas las leyes de la cantidad finita por grande que esta sea; y claro es que si ese infinito es finito, es un contrasentido la palabra infinito. Como es consiguiente, de esta mala base deben originarse indefectiblemente grandes errores; así resulta cuando Fleury afirma que si dos infinitos son iguales su diferencia debe ser cero, lo mismo que si se tratara de dos cantidades finitas: de ello dimanan las tristes cuestiones que sostiene dicho Fleury con el distinguido Gerono, como efecto sin duda del concepto equivocado que aquel tiene del infinito matemático.

Los que quieren separar el infinito de la metafísica, tomándolo como cantidad finita, deben meditar un poco en el siguiente raciocinio. Ya que se considera el infinito relativo como finito, finito debe ser el infinitamente pequeño, por considerarse éste como cantidad recíproca de la anterior; y ya que estos infinitamente pequeños deben darnos la noción de toda curva, conforme a la ley de continuidad, ¿se nos podría decir si este elemento que se considera recto forma parte de la curva? Si se contesta afirmativamente, resultará que la línea deja de ser curva; si se niega, será porque se podrá llevar la división más allá, y si bien las partes de la curva se irán estrechando, permanecerán finitas las distancias de punto a punto, mientras estos no coincidan, hallándose constantemente en el primer caso. Si por salvar esta dificultad, se llega a conceder que los puntos coinciden, entonces la curva toda no será más que un punto, resultando en todos los casos verdadera imposibilidad de restablecer la noción de línea curva. Para resolver este enigma, son impotentes los partidarios de lo sensible y positivo, y solo elevándose a la Geometría ideal, donde la ley de continuidad puede considerarse en toda su pureza, fuera del quantum, es posible dar algún paso seguro, ya que no con aquella claridad que fuera de desear, al menos con la seguridad de no caer en contradicciones flagrantes.

Bien podría ahora apuntar al menos las vaguedades y contradicciones en que caen otras celebridades matemáticas, tales como Bertrand, Ampere, Poisson, Liouville, Euler, D´Alembert, Cournat, etc., pero ¿a que citar más pareceres, señores, si con ello no lograría otro resultado que fatigar y abusar en demasía de vuestra benévola atención? creo suficiente lo dicho para dejar probada la poca estabilidad que existe en esta clase de conocimientos.

Permitidme, pues, y dispensadme la osadía, que ofrezca a grandes rasgos mi humilde parecer respecto este particular, y con ello voy a terminar.

Tengo por muy acertada la división del infinitamente pequeño, o mejor dicho, de la variable que va decreciendo indefinidamente, en dos clases, conforme supone Fleury; pero rechazo con toda mi alma la finitud del infinito relativo: el primer infinitamente pequeño, o variable, puede alcanzar hasta el valor cero, como en el método de Lagrange, razón por la cual no debe admitirse la noción de derivada, en el concepto de ser el límite de la relación entre el incremento de la función y la variable independiente. El segundo infinitamente pequeño, es aquel que no puede admitir nunca el valor cero, resolviéndose esta idea en el infinito *secundum quid* de los escolásticos, y no en el relativo de Fleury, correspondiendo este infinitamente pequeño al del método Leibnitziano.

De esta suerte queda cada método en su verdadero lugar, sin confusiones ni errores. Sin embrago, falta vencer una dificultad que parece insuperable, no solo en el sistema de Fleury, sino en los de otros respetables autores: Tal es la igualdad $x + a = x$, en la cual $\underline{x}$ es indefinida- mente grande. Mas ella queda satisfecha, bajo la idea de indeterminación, puesto que siendo $\underline{x}$ una cantidad indeterminada, la suma debe resolverse en la misma indeterminación. Del propio modo se puede suponer $x + a = a$, en el concepto de ser $\underline{x}$ una cantidad indefinidamente pequeña, resolviéndose dicha suma en la cantidad finita a, y esto considerando que $\underline{x}$ no conserve ningún quantum, quedándole tan solo la noción de ser extensión, a que puede reducirse toda cantidad, en esa Geometría pura, que se halla despojada de toda representación y consideración sensible. En efecto, si la ley de continuidad nos es indispensable para alcanzar la noción de curva, y ésta no puede desenvolverse de una manera finita respecto a sus elementos sin dejar de ser curva, fuerza es conceder algo de extensión fuera del quantum para estar en lo cierto, y esto aunque se nos haga muy difícil de concebir, acostumbrados como estamos a sensibilizarlo todo. Esta última expresión de la extensión, será quizá la que verdaderamente merezca el dictado de elemento de una línea, debiendo él estar contenido en la curva para que nos dé la ley de continuidad. A mi ver es esto uno de los misterios más grandes que encierra la Geometría, pues si bien conocemos las condiciones que debe reunir una línea para su existencia, como son: la multiplicidad y la ley de continuidad; a pesar de comprender perfectamente uno de esos dos factores o sea la multiplicidad, ignoramos desgraciadamente como puede desarrollarse el segundo, o sea la ley de continuidad, pues para ello fuera preciso que alcanzáramos ver la Geometría, no partiendo de lo sensible, sino descendiendo de lo ideal, no de otro modo que los espíritus puros.

Quizá estas oscuridades casi indescifrables para el hombre, expliquen esas extravagancias de que dan muestra algunas celebridades matemáticas; por ejemplo, cuando vemos a Newton, pasarse muchos años sin querer hablar de Matemáticas; a M. Gibbon, sosteniendo que las ciencias exactas nos acostumbran a despreciar la evidencia moral; al distinguido Descartes, calificando de "bagatelas" a las Matemáticas, formando coro con estos el P. Castel, Buffon, Condillach, Hobbes y otros, cuyos propósitos parecen encaminados a rebajar dicha ciencia mas bien que a profundizarla.

Y como de la ciencia puede afirmarse lo que diríamos del arte: "*ars longa, vita brevis*"; y ya que después de haber recorrido un largo camino nos encontramos con estos dejos del alma ¿será oportuno aplicar aquí aquel pensamiento del inmortal Calderón:

Pues que la vida es tan corta
Soñemos, alma, soñemos...?

No, mil veces no: el fuego divino que arde dentro de nosotros, nos impulsa hacia la verdad; mas para adquirirla hemos de afianzarnos sobre base sólida. De ello me ocuparé en esta última parte de mi trabajo.

I I I

En el orden metafísico lo propio que en el sensible, el origen y la esencia de las cosas están fuera de nuestros alcances, no podemos comprender mas que sus relaciones, sus cualidades y efectos sensibles. "*Nihil est in intelectu quod prius non fuerit in sensu"*. Los sentidos preparan las ideas, mas luego el entendimiento las forma, la imaginación las pinta, la memoria las conserva, la atención las fija, la reflexión las remueve y compara, el juicio las distingue o las confunde, las separa o las une, en fin, el raciocinio deduce las unas de las otras, y así se eslabonan todos los anillos de la cadena, garantizando la solidaridad común. Mas el hombre no se satisface con los conocimientos que le puede proporcionar la ciencia natural; en su interior existe un anhelo vivísimo, comunicado por el soplo de Dios que le impulsa a extender los estrechos límites de su razón; pretende elevarse a nuevas y desconocidas regiones, como sucede al querer escudriñar los misterios que encierran los infinitamente pequeños. Esta aspiración es justa, mas yo afirmo que nada logrará descifrar, si no se auxilia de una luz superior que le permita avanzar en esos amplísimos y dilatados horizontes hacia esa Geometría ideal, propia solo de los espíritus elevados y religiosos.

No puedo resistir al deseo de citar aquí un bello y profundo pasaje de Chateaubriand: "*Hay una geometría material que ofusca los ojos del alma; se compone de líneas, de puntos, de A + B, y a fuerza de tiempo y perseverancia, un mediano entendimiento puede hacer en ella notables progresos. Esta especie de Geometría, viene a ser entonces como una máquina geométrica que ejecuta por si misma las operaciones mas complicadas, como la máquina aritmética de Pascal, geómetras adocenados que manifiestan a veces un desprecio ridículo de las artes de la imaginación. En cambio hay otra Geometría intelectual, la que formó a los discípulos de Sócrates y a la vez formó a Pascal, Leibnitz, Descartes y Newton verdaderos genios creadores y religiosos a la vez*".

Ciertamente que este pensamiento encierra una gran verdad, pues no cabe dudar que el hombre necesita de esa luz superior para no decaer, ante los muchos esfuerzos y prolongadas vigilias que debe arrostrar para conquistar la ciencia; solo así puede sostener la esperanza de cultivar los sentimientos más nobles de su espíritu, y solo así consigue los más preciados y valiosos tesoros en la escala indefinida de los conocimientos humanos, pues la razón por si sola, cuando pretende traspasar los límites naturales que Dios le ha señalado, suele caer en decepciones increíbles, llenándose de fantasmas que se pierden por entre las sombras tenebrosas de oscura noche.

Vosotros no ignoráis, en calidad de grandes maestros en el saber, que el pensar así no supone debilidad de espíritu ni preocupación alguna, ni conduce a aherrojar el pensamiento; muy al contrario, son vivo testimonio de mi aserto cien y cien nombres gloriosos, bien conocidos de todos: en la poesía, Tasso, Milton, Corneille, Racine, Fray Luis de León; en la elocuencia, historia y filosofía: Bossuet, Fenelón, Masillou, Bourdalou, Bacon, Pascal, Euler, Newton, Leibnitz, Balmes; en las bellas artes: Miguel Angel, Murillo, Leonardo de Vinci, Pergoleso, Stradella, y otros muchos que sería prolijo enumerar, todos los cuales buscaron su inspiración en la radiante luz sobrenatural.

No tengo porque añadir, que al sostener estos principios en que se inspira mi alma, no me divorcio de los progresos realizados en la ciencia, ni mucho menos pretendo establecer una hostilidad necesaria, ni un antagonismo fatal, entre la verdadera luz de la razón y las ciencias positivas: yo defiendo por el contrario, la unión íntima entre todos los elementos que contribuyen al puro y completo desarrollo del hombre, y que le aproximan a la perfección en cuanto es dable; ¿cómo no admirarse cuando se ve a un Newton sintetizar las leyes de gravitación de Kepler? ¿Cómo no sorprenderse al hallar por principios de dinámica universal esas correspondencias y relaciones numéricas entre le sonido y la luz, forcejeando la Química dentro de este dinamismo para salir del empirismo que la rodea? ¿Cómo no entusiasmarse al ver a Fermat deducir las leyes de refracción, partiendo del principio de economía en la naturaleza? ¿Cómo no sentir la belleza de la ciencia, cuando las grandes concepciones de Euler, Legendre, Jacobi, Abel y Gudermann acaban por dar a conocer una especie de Trigonometría, que constituye la clave de la que generalmente se conoce?

Sí; el hombre debe seguir este movimiento, y cruzar en todas direcciones ese mar sin límites que le rodea, hasta fijar en el mapa nuevos horizontes, y señalar nuevos puntos de las islas que se vayan descubriendo. Mas a pesar de este entusiasmo natural, a lo que yo entiendo, y dejad que lo repita por última vez, todas las investigaciones científicas deben realizarse siempre con el gobernalle en la mano y los ojos fijos en aquella luz intensísima, que debe evitarnos el ser víctimas de los muchos escollos que nos circundan, sobre todo cuando nos alejamos de la orilla.

En fin, permitidme que exprese al terminar una esperanza, que no por ser quizá demasiado exagerada por algunos, dejará de ser menos lisonjera para vosotros. Si las letras y las bellas artes preceden a la ciencia y a la filosofía como dice M. Portalis; si ya pasó el siglo de oro para España y las buenas letras, siglo de Calderón, Cervantes, Lope de Vega y demás esclarecidos literatos; si la armoniosa, pura y sonora lengua española nos convida a fijar con claridad nuestros más altos conceptos; si para el desarrollo del espíritu filosófico se necesita fe viva y sentimiento delicado, cuyo sentimiento delicado, fe viva y noble forma el blasón distintivo de nuestra ralea; paréceme que tenemos derecho a esperar un nuevo siglo de oro para nuestra amada Patria, siglo en que las ciencias en particular, llegarán a su mayor apogeo, después de tantos siglos de decadencia; pues la nación que sabe hablar, tener fe y sentir bien, más o menos tarde debe pensar mejor, elevándose por las altas regiones a donde solo espíritus privilegiados han podido alcanzar.

Alentemos, pues, a todos cuantos se sientan arrastrados por el poderoso atractivo de la ciencia; fomentemos el método de los principios y fundamentos verdaderos que deben seguirse en la investigación de la verdad; procuremos inclinar la juventud española al estudio, no por orgullo ni lucro, sino por puro amor, enderezando a la par sus sentimientos hacia el único foco del cual irradia todo género de inspiración noble y sublime; y entonces con placer hemos de ver como esta juventud se eleva por las altas regiones del infinito en alas de su inspiración, llenando el alma de ese ***quid divinum***, que hace despreciar todo lo terreno para recabar dichas anticipadas; y aproximándose los artistas a la belleza perfecta y los sabios a la verdad sin sombras, y los varones virtuosos a la bondad sin límites, uniranse todos en estrecho y cordial abrazo, para acercarse hacia Aquel centro, que es centro de todo lo creado, centro de toda belleza, bondad y verdad.

Barcelona 23 de Enero de 1884.

Lauro Clariana Ricart

Memoria leída en el Salón Doctoral de la Universidad Literaria el día 9 de Marzo de 1884 con motivo de su recepción en la Real Academia de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona.