Nociones

de

Trigonometría General

1884

Sin duda que los notables trabajos de Lobatchefsky, Gauss, Bolyai, Riemann, Helmholtz, Beltrami, Cayley, Cassani, König, contribuyeron mucho a que M. Tilly desarrollara la geometría general, la cual, según frase de M. Hoüel, constituye la alfa y omega de la Geometría.

Vamos, pues, a dar algunas nociones de Trigonometría, fundándonos en esa geometría general, para cooperar al conocimiento del espíritu matemático que domina en los tiempos modernos; y para ello, seguiremos las huellas de M. Tilly, esperando hacer algunas aclaraciones, o detallar algunas fórmulas de la teoría, para su mayor inteligencia.

Al buscar, este distinguido matemático, los fundamentos de la geometría, considera la noción de distancia como el axioma primordial de la misma, y como divida la distancia en ideal, racional y física, halla en la racional el origen o la confirmación de los tres sistemas posibles de la geometría, correspondientes a las tres funciones analíticas siguientes:

$$(1)\quad F_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$(2)\quad F_{12}=\frac{A}{\pi}\,arc.ch\,\frac{1-th\frac{\pi x_1}{A}\,th\frac{\pi x_2}{A}-th\frac{\pi y_1}{A}\,th\frac{\pi y_2}{A}-th\frac{\pi z_1}{A}\,th\frac{\pi z_2}{A}}{\sqrt{\left(1-th^2\frac{\pi x_1}{A}-th^2\frac{\pi y_1}{A}-th^2\frac{\pi z_1}{A}\right)\times\left(1-th^2\frac{\pi x_2}{A}-th^2\frac{\pi y_2}{A}-th^2\frac{\pi z_2}{A}\right)}}$$

$$(3)\quad F_{12}=\frac{D}{\pi}\,arc.\cos\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x_1}{D}\operatorname{tg}\frac{\pi x_2}{D}+\operatorname{tg}\frac{\pi y_1}{D}\operatorname{tg}\frac{\pi y_2}{D}+\operatorname{tg}\frac{\pi z_1}{D}\operatorname{tg}\frac{\pi z_2}{D}}{\sqrt{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_1}{D}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi y_1}{D}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi z_1}{D}\right)\times\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_2}{D}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi y_2}{D}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi z_2}{D}\right)}}$$

(1), correspondiente a la geometría de Euclides, o sea la usual; (2) y (3) referidas a la simple y doblemente abstracta, según los conceptos de Gauss y Riemann.

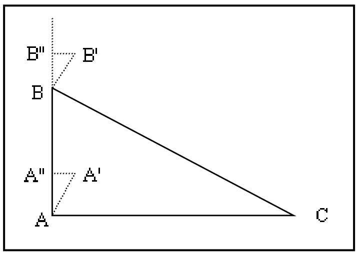
Así, pues, la trigonometría cabe considerarla también en el triple concepto de usual, simplemente abstracta y doblemente abstracta, para cuyo desarrollo conviene antes manifestar algunos principios generales.

La equidistante de una recta, llamada base, es una línea situada en el plano que contiene dicha base, y cuyos puntos distan de ésta la misma cantidad, llamada altura. En la geometría usual la equidistante de una recta es otra recta; en la geometría simplemente abstracta, constituye una curva especial; y en la geometría doblemente abstracta es un círculo.

Se conviene en representar por *eq.a*, la relación de la longitud de una porción de equidistante de altura *a*, a su base.

Pasemos ahora, al estudio de las propiedades de los triángulos.

***Primera propiedad de los triángulos rectángulos*:**



Sea el triángulo ABC, rectángulo en *A*: si éste gira alrededor del punto C, de modo que el punto A, se mueva en el sentido *AB*, llega en *A*', cuando el punto B, alcanza B': Proyectemos AA' y BB' , sobre AB, según AA' y BB'. Al suponer un movimiento indefinidamente pequeño, se tiene:

$$AA'' = AA', \qquad BB'' = BB' \operatorname{sen} B,$$

De donde

$$lim\frac{BB''}{AA''} = lim\frac{BB'}{AA'}\operatorname{sen} B$$

Pero el límite de la relación de las cuerdas BB' y AA', es igual a la de los arcos; y estos últimos es igual a la de las circunferencias completas. Así, pues,

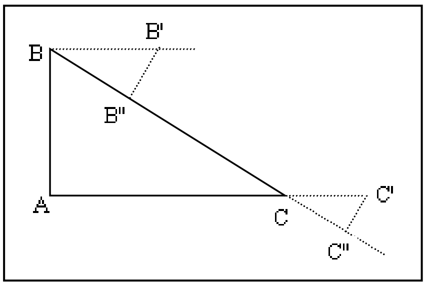
$$lim\frac{BB''}{AA''} = \frac{circ\,\mathrm{a}}{circ\,\mathrm{b}}\operatorname{sen} B$$

Por otra parte debe suceder que: $lim\left(\frac{BB''}{AA''}\right) = 1$

luego

$$\frac{circ\,\mathrm{a}}{circ\,\mathrm{b}}\operatorname{sen} B = 1 \qquad \text{ó} \qquad circ\,\mathrm{b} = circ\,\mathrm{a}.\operatorname{sen} B$$

***Segunda Propiedad*:**



Si se hace resbalar el triángulo a lo largo de su base AC, de tal modo que el punto C se mueva hacia el exterior del triángulo, llegará en C', cuando el punto B llegue en B', sobre la línea equidistante BB': proyéctese BB' y CC' en BC, resultando BB'' y CC''. Al límite se tendrá:

$$BB'' = BB' \operatorname{sen} B, \qquad CC'' = CC' \cos C$$

$lim\frac{CC''}{BB''} = lim\left(\frac{CC'}{BB'}\right)\frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$; y como se supone $\frac{BB'}{CC'} = eq.c$, se tiene: $lim\frac{CC'}{BB'} = \frac{1}{eq.c}$

De donde $lim\frac{CC''}{BB''}=\frac{1}{eq.c}\frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$, pero $lim\frac{CC''}{BB''}=1$, luego $\frac{1}{eq.c}\frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}=1$, o sea $eq.c=\frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$.

De esta segunda propiedad pueden deducirse relaciones importantes entre las circunferencias y las equidistantes. De lo anterior resulta:

$$\operatorname{sen} B=\frac{circ.b}{cic.a},\quad \operatorname{sen} C=\frac{circ.c}{cic.a}$$
$$\cos B=eq.b\operatorname{sen} C=\frac{eq.b.circ.c}{cir.a},\quad \cos C=eq.c\operatorname{sen} B=\frac{eq.c.circ.b}{circ.a}$$

y como

$$\operatorname{sen}^2 B+\cos^2 B=\operatorname{sen}^2 C+\cos^2 C$$

se tiene

$$\frac{circ^2 b}{circ^2 a}+\frac{eq^2 b\, circ^2 c}{circ^2 a}=\frac{circ^2 c}{circ^2 a}+\frac{eq^2 c\, circ^2 b}{circ^2 a}$$

luego

$$\frac{circ^2 b}{1-eq^2 b}=\frac{circ^2 c}{1-eq^2 c}$$

cuya relación se puede igualar a una constante M, resultando para un valor x cualquiera,

$$eqx=\sqrt{1-\frac{circ^2 x}{\mathrm{M}}}\quad \text{ó}\quad circ\, x=\sqrt{\mathrm{M}\left(1-eq^2 x\right)}\quad (1)$$

Tercera y cuarta propiedad de los triángulos rectángulos.

Sea la relación $circ.b=circ.a\operatorname{sen} B$: ahora de la fórmula (1) resulta $circ.a=\sqrt{\mathrm{M}\left(1-eq^2 a\right)}$ sustituyendo este valor en la expresión anterior, se tiene:

$$circ^2 b=M\left(1-eq^2 a\right)\operatorname{sen}^2 B$$

y como

$$M=\frac{circ^2 b}{1-eq^2 b},$$

se obtiene:

$$1-eq^2 b=\left(1-eq^2 a\right)\operatorname{sen}^2 B.$$

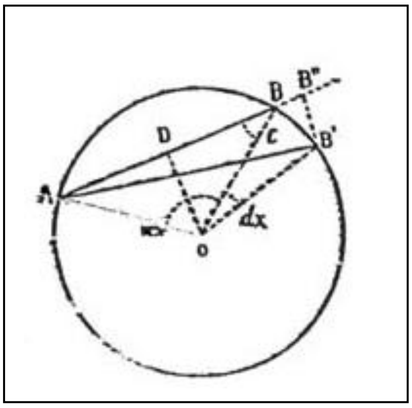
o sea

$$1-\frac{\cos^2 B}{\operatorname{sen}^2 C}=\left(1-eq^2 a\right)\operatorname{sen}^2 B$$

de donde:

$$eq.a = \cot B \cot C = eqb.eqc\,.$$

De esta consecuencia resulta con facilidad la relación general entre la circunferencia y su radio.



Consideremos un punto B sobre una circunferencia de radio R, en que A, sea otro punto cualquiera. Supongamos que el punto A, permanezca fijo, y que el punto B, se traslade en B' si AB = φ, resulta;

AB' = φ + dφ

Proyéctese ahora B' en B" sobre la recta AB, y en su límite el triángulo BB'B", dará: BB" = BB' senC, porque el ángulo B', tiende a C.

Atendiendo, luego, a las cantidades que difieren entre sí infinitamente poco, llevando el valor a su límite, se deduce:

$$BB' = dx\frac{circR}{2\pi} \quad \text{y} \quad d\varphi = BB'' = dx\frac{circR}{2\pi}\operatorname{sen}C$$

Ahora, el triángulo AOD, da: $eq\,R = \cot C \cot\frac{x}{2}$; y si $eq\,R = R'$, se tiene $R' = \cot C \cot\frac{x}{2}$, o $\cot C = R' \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: y como $\operatorname{sen}C = \dfrac{1}{\sqrt{1 + R'^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$, resulta;

$$d\varphi = \frac{dx\,circ.R}{2\pi\sqrt{1 + R'^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{circ.R}{\pi}\frac{d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1 + R'^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} \quad (\pi)$$

Para determinar la integral de esta expresión, basta modificar ésta del modo siguiente:

$$d\varphi = \frac{circ.R}{\pi} \times \frac{\cos\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2} + R'^2 \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}} = \frac{circ.R}{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \left(R'^2 - 1\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{circ.R}{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \left(R'^2 - 1\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}} = \frac{circ.R}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R'^2 - 1}}\frac{\sqrt{R'^2 - 1}\cos\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \left(R'^2 - 1\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}}$$

Ahora si $\sqrt{R'^2 - 1}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = r,$ resulta: $d\varphi = \dfrac{circ\,R}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{R'^2 - 1}}\dfrac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$

y como

$$\mathrm{S}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = l\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+C\,,$$

luego:

$$\varphi = \frac{circ.R}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R'^2-1}}\,l\left(\sqrt{1+\left(R'^2-1\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}+\sqrt{\left(R'^2-1\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\right)\right]+C$$

Podríamos determinar esta integral bajo otra forma, pues tomando la expresión:

$$(\pi)\quad d\varphi = \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1+R'^2\,\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\,\frac{circ.R}{\pi}$$

resulta:

$$d\varphi = \frac{circ.R}{\pi}\,\frac{\cos\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(1-R'^2\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}} = \frac{circ.R}{\pi\sqrt{1-R'^2}}\,\frac{\sqrt{1-R'^2}\,d\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(1-R'^2\right)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}}$$

luego

$$\varphi = \frac{circ.R}{\pi}\times\frac{\operatorname{arc.sen}\sqrt{1-R'^2}\,\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\sqrt{1-R'^2}}+C$$

Tomando en las dos integrales, límites entre 0 y 2*R*, se tiene:

$$2R = \frac{circ.R}{\pi\sqrt{R'^2-1}}\,l\left(R'+\sqrt{R'^2-1}\right)\quad \text{ó}\quad 2R = \frac{circ.R}{\pi}\,\frac{\operatorname{arc.sen}\sqrt{1-R'^2}}{\sqrt{1-R'^2}}$$

de donde

$$circ.R = \frac{2\pi R\sqrt{R'^2-1}}{l\left(R'+\sqrt{R'^2-1}\right)}\quad \text{o bien}\quad circ.R = \frac{2\pi R\sqrt{1-R'^2}}{\operatorname{arc.sen}\sqrt{1-R'^2}}$$

Si R' = 1, que es la condición necesaria para la geometría usual, las dos integrales anteriores se reducen a circ.R = 2πR. (α)

Apliquemos de una manera breve estos principios a las tres trigonometrías

TRIGONOMETRÍA DE EUCLIDES, O USUAL

Condición precisa: *eq R* = 1, luego la ecuación: $eq.R = \sqrt{1 - \frac{circ^2 R}{M}}$, corresponde a M = ∞

Además por lo dicho en (α), se tiene *circ R* = 2πR. Y las tres fórmulas generales halladas:

$$circ.b = circ.a \operatorname{sen} B, \quad eqb = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}, \quad eqa = \cot B \cot C = eqb.eqc$$

se transforman en:

$$2\pi b = 2\pi a.\operatorname{sen} B, \quad 1 = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}, \quad 1 = \cot B \cot C$$

o sea:

$$b = a.\operatorname{sen} B, \quad 1 = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}, \quad 1 = \cot B \cot C$$

de cuyas dos últimas resulta:

$$\operatorname{sen} C = \cos C, \quad \cot C = \operatorname{tg} B$$

de donde

$$B + C = \frac{\pi}{2}$$

TRIGONOMETRÍA SIMPLEMENTE ABSTRACTA CORRESPONDIENTE A LA GEOMETRÍA DE GAUSS

Condición precisa: *eq. R* = *R´* > 1, luego la ecuación $eq\,R = \sqrt{1 - \frac{circ^2 R}{M}}$, prueba que *M* es negativa: supóngase $M = -4A^2$, y se tendrá:

$$R' = \sqrt{1 + \frac{circ^2 R}{4A^2}};$$

combinando ahora esta igualdad con:

$$circ\,R = 2\pi R \frac{\sqrt{R'^2 - 1}}{l\left(R' + \sqrt{R'^2 - 1}\right)}$$

se obtiene:

$$circ\,R = 2\pi R \frac{\frac{circ\,R}{2A}}{l\left(\sqrt{1+\frac{circ^2 R}{4A^2}}+\frac{circ\,R}{2A}\right)}$$

o sea

$$\frac{\pi R}{A} = l\left(\sqrt{1+\frac{circ^2 R}{4A^2}}+\frac{circ\,R}{2A}\right)$$

de donde

$$e^{\frac{\pi R}{A}} = \sqrt{1+\frac{circ^2 R}{4A^2}}+\frac{circ\,R}{2A}$$

o también

$$e^{\frac{\pi R}{A}} - \frac{circ\,R}{2A} = \sqrt{1+\frac{circ^2 R}{4A^2}}$$

elevando ahora al cuadrado:

$$e^{\frac{2\pi R}{A}} - 2e^{\frac{\pi R}{A}}\frac{circ\,R}{2A}+\frac{circ^2\,R}{4A^2} = 1+\frac{circ^2 R}{4A^2}$$

luego:

$$circ\,R = A\left(e^{\frac{\pi R}{A}} - e^{-\frac{\pi R}{A}}\right)$$

En cuanto *R*', resulta:

$$R' = eq\,R = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi R}{A}} + e^{-\frac{\pi R}{A}}\right)$$

Fórmulas que se reducen a *circ*R = 2πR, *eq*R = 1, cuando R, se considera indefinidamente pequeño ó A = ∞, pues tomando la fórmula:

$$R = A\left(e^{\frac{\pi R}{A}} - e^{-\frac{\pi R}{A}}\right)$$

por $A = \infty$ resulta $\infty \times 0$, cuyo valor determinaremos considerando las derivadas respecto A :

$$\lim. \frac{e^{\frac{\pi R}{A}} - e^{-\frac{\pi R}{A}}}{\frac{1}{A}} = \frac{-\frac{\pi R}{A^2} e^{\frac{\pi R}{A}} - \frac{\pi R}{A^2} e^{-\frac{\pi R}{A}}}{-\frac{1}{A^2}} = \frac{\pi R e^{\frac{\pi R}{A}} + \pi R e^{-\frac{\pi R}{A}}}{1}$$

y si A = ∞, se obtiene circ.R = 2 π R; y por el mismo valor de A = ∞ también se obtiene;

$$eq\, R = R' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi R}{A}} + e^{-\frac{\pi R}{A}}\right) = 1$$

Tomando, ahora, las fórmulas generales halladas:

$$circ\, b = circ\, a \operatorname{sen} B, \quad eq\, b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}, \quad eq\, a = \cot B \cot C = eq\, b . eq\, c$$

veremos que se transforman en:

$$e^{\frac{\pi b}{A}} - e^{-\frac{\pi b}{A}} = \left(e^{\frac{\pi a}{A}} - e^{-\frac{\pi a}{A}}\right) \operatorname{sen} B; \quad \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi b}{A}} + e^{-\frac{\pi b}{A}}\right) = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C},$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi a}{A}} - e^{-\frac{\pi a}{A}}\right) = \cot B \cot C = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi b}{A}} + e^{-\frac{\pi b}{A}}\right)\left(e^{\frac{\pi c}{A}} + e^{-\frac{\pi c}{A}}\right)$$

Por fin, aplicando las líneas hiperbólicas, se obtiene:

$$ch \frac{\pi b}{A} = sh \frac{\pi a}{A} \operatorname{sen} B, \quad ch \frac{\pi b}{A} = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$ch \frac{\pi a}{A} = \cot B \cot C = ch \frac{b\pi}{A} ch \frac{c\pi}{A}$$

TRIGONOMETRÍA DOBLEMENTE ABSTRACTA CORRESPONDIENTE A LA GEOMETRÍA DE RIEMANN

Condición precisa; *eq R* < 1; lo que según la fórmula general: $eq\, R = \sqrt{1 - \frac{circ^2 R}{M}}$, supone que *M* debe ser positiva. Sea, pues, $M = 4D^2$, de donde, $R' = eq\, R = \sqrt{1 - \frac{circ^2 R}{4D^2}}$.

Tomando la ecuación general; $circ\,R = 2\pi R \dfrac{\sqrt{1-R'^2}}{\operatorname{arcsen}\sqrt{1-R'^2}}$ y sustituyendo el valor anterior, resulta:

$$circ\,R = \pi R \frac{\dfrac{circ\,R}{D}}{\operatorname{arcsen}\dfrac{circ\,R}{2D}}$$

o sea,

$$circ\,R = 2D \operatorname{sen}\frac{\pi R}{D}$$

luego

$$eq\,R = R' = \sqrt{1 - \frac{4D^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi R}{D}}{4D^2}} = \cos\frac{\pi R}{D}$$

De un modo parecido al caso anterior, si se considera *D*, indefinidamente grande, se pasa a la geometría usual, pues resulta:

$$circ\,R = 2\pi R, \qquad eq\,R = 1$$

Ahora, tomando otra vez las fórmulas generales:

$$circ\,b = circ\,a.\operatorname{sen}B, \quad eq\,b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen}C}, \quad eq\,a = \cot B \cot C = eq\,b\,eq\,c$$

por las notaciones anteriores, se tiene:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi b}{D} = \operatorname{sen}\frac{\pi a}{D}\operatorname{sen}B; \quad \cos\frac{\pi b}{D} = \frac{\cos B}{\operatorname{sen}C}; \quad \cos\frac{\pi a}{D} = \cot B \cot C = \cos\frac{\pi b}{D}\cos\frac{\pi c}{D}$$

Conocidas las fórmulas de cada una de las tres trigonometrías, con facilidad podrían hacerse ahora aplicaciones a la Geometría general, así como podrían utilizarse dichas fórmulas para la determinación de las tres funciones analíticas, que dan la distancia de dos puntos, cuyas expresiones hemos escrito al principio de este artículo; pero temiendo extendernos demasiado, lo omitimos, pues de suyo son aplicaciones sencillas; esperando que será suficiente lo manifestado para que el lector pueda formarse idea, aunque sucinta, del desarrollo que se pretende hoy dar a la Trigonometría.

Barcelona a 10 de Julio de 1884

Lauro Clariana Ricart