Aplicación de las Integrales

Eulerianas

1885

La Integral,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x\right)^m \cos\left(nx\right) dx,$$

puede darse en función de las integrales eulerianas de primera y segunda especie: M.A. Serret, se ocupa con predilección de ella, mas la falta de ciertos desarrollos que se notan en sus cálculos, así como la importancia de la misma, nos impulsa a publicar este trabajo, a fin de vulgarizar en lo que sea posible los últimos adelantos de la ciencia. Las dos fórmulas eulerianas:

$$\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1} dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx,$$

se representan respectivamente por: $B\left(p,q\right)$ y $\Gamma(\mathrm{n})$, siendo $\Gamma(\mathrm{n}) = 1.2.3.....(\mathrm{n}-1)$; Si en vez de *x*, se considera *ax*, resulta:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma\left(n\right)}{a^n}, \qquad (\mathrm{A})$$

y si la *a* se transforma en: $a + b\sqrt{-1}$, se deduce:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)} x dx = \frac{\Gamma\left(n\right)}{\left(a+b\sqrt{-1}\right)^n}$$

Si hacemos:

$$a + b\sqrt{-1} = \rho\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\theta\right), \quad \rho = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2},$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}};$$

se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\left(\cos bx-\sqrt{-1}\operatorname{sen} bx\right)x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{\rho^n\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta\right)^n}=\frac{\Gamma(n)}{\rho^n}\left(\cos n\theta-\sqrt{-1}\operatorname{sen} n\theta\right)=$$

$$\frac{\Gamma(n)}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-n\theta\sqrt{-1}}=\frac{\Gamma(n)}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\left(n\sqrt{-1}\operatorname{arctg}=\frac{b}{a}\right)}\qquad(\alpha)$$

Así por analogía podremos escribir:

$$\int_0^\infty \theta^{p-1}e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)\theta}d\theta=\frac{\Gamma(p)}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{p}{2}}}e^{-\left(p\sqrt{-1}\operatorname{arctg}=\frac{b}{a}\right)}$$

de cuya ecuación puede deducirse otras dos, que fueron ya halladas directamente por M. Poisson.

Supongamos en la fórmula (A), $a=e^{x\sqrt{-1}}$ y luego $a=e^{-x\sqrt{-1}}$, de donde:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(p)e^{-px\sqrt{-1}}&=\int_0^\infty y^{p-1}e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}dx\\ \Gamma(q)e^{qx\sqrt{-1}}&=\int_0^\infty z^{q-1}e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}dx\end{aligned}\right\}$$

multiplicando entre si estas dos últimas ecuaciones, resulta:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)e^{(q-p)x\sqrt{-1}}=\int_0^\infty y^{p-1}e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}dy\int_0^\infty z^{q-1}e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}dz;$$

Ahora si en la segunda integral consideramos $z = yt$, ó $dz = ydt$, se puede escribir:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)e^{(q-p)x\sqrt{-1}}=\int_0^\infty t^{q-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y\left(e^{x\sqrt{-1}}+te^{-x\sqrt{-1}}\right)}dy=$$

$$\int_0^1 t^{q-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\operatorname{sen}x\right]}dy+\int_0^\infty t^{q-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\operatorname{sen}x\right]}dx$$

Supóngase $\frac{1}{t}$ en lugar de t en la segunda de estas integrales dobles. Luego:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)e^{(q-p)x\sqrt{-1}} = \int_0^1 t^{q-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right]}\,dy +$$

$$+\int_0^1 t^{-q-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y\left(\frac{1+t}{t}\cos x-\frac{1+t}{t}\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)}dy$$

Ahora en virtud de la fórmula general (α), se tiene:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}e^{(q-p)x\sqrt{-1}} = \int_0^1 t^{q-1}dt\frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tg}x\right)}}{\left[(1+t)^2\cos^2 x+(1-t)^2\operatorname{sen}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}+$$

$$+\int_0^1 t^{p-1}dt\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tg}x\right)}}{\left[(1+t)^2\cos^2 x+(1-t)^2\operatorname{sen}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}$$

Si se multiplican ambos miembros por: $(\cos x)^{p+q-2}dx$, y se integra entre: 0 y $\frac{\pi}{2}$, se obtiene:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}e^{(q-p)x\sqrt{-1}}dx = \int_0^1 t^{q-1}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tg}x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tg}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}$$

$$+\int_0^1 t^{-p-1}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tg}x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tg}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}$$

Supóngase: $\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\varphi$, o sea, $\frac{1-t}{1+t}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, y la fórmula ($\beta$), se transforma en:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}e^{(q-p)x\sqrt{-1}}dx = \int_0^1\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}d\varphi$$

$$+\int_0^1\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}d\varphi$$

igualando las partes reales, después de suponer: $\left.\begin{array}{l} p+q-2=m \\ q-p \quad\;\; =n \end{array}\right\}$ se tiene:

$$(\gamma)\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos nx dx=$$

$$=\int_0^1\frac{t^{\frac{m+n}{2}}+t^{\frac{m-n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi d\varphi$$

La integral relativa a *t*, es infinita, pero se puede evitar esta dificultad, suponiendo un nuevo valor tal como *n´* en vez de *n*, y si se representa por *F*(*n*) el primer miembro de (γ), después de restar respectivamente las dos funciones *F(n*) y *F*(*n´*), resulta:

$$F(n)-F(n')=\int_0^1\frac{\left(t^{\frac{m-n}{2}}+t^{\frac{m+n}{2}}\right)+\left(t^{\frac{m-n'}{2}}+t^{\frac{m+n'}{2}}\right)}{(1+t)^{m+1}(1-t)}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi d\varphi$$

En esta ecuación la integral relativa a *t*, no es generalmente infinita ni nula, de donde resulta que si por valores particulares de *n* y *n´*, salen las funciones *F(n*) y *F(n´*) respectivamente iguales, será porque el segundo miembro de la última ecuación sea cero; mas como la primera integral de dicho segundo miembro no sea cero ni infinita, se debe suponer que la segunda integral que depende de φ lo sea; y como quiera que no depende de *n* ni de *n´*, bien podemos admitir que sea cero por un valor cualquiera de *n* ó *n´*.

Bajo este supuesto, haciendo por ejemplo *n* = 0, *n´* = 1, en la ecuación γ , se obtiene:

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m xdx=F\quad(0);\qquad\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}xdx=F\quad(1)$$

Para determinar el valor de estas expresiones, basta atender a las fórmulas siguientes:

$$(\pi)\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}xdx=2^{m-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}.\qquad(\Delta)\quad\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2a-1}}$$

La primera expresión (π), puede deducirse de la fórmula general conocida:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x dx = \frac{2.4.6....(m-2)}{1.3.5....(m-1)}$$

Al multiplicar ambos términos del quebrado por la factorial 2.4.6....(m-2) se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x dx = \frac{2.2.4.4....(m-2)(m-2)}{1.2.3.4...............(m-1)} = 2^{m-2} \frac{1.2.3...\frac{m-2}{2}.1.2.3...\frac{m-2}{2}}{1.2.3.4......(m-1)} = 2^{m-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}$$

La segunda ecuación (Δ) se hallará fácilmente, recordando la fórmula euleriana de primera especie:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

Suponiendo $q = p$, de donde: $B(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1} dx,$ y si: $x = \frac{1}{2}(1+y)$:

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{p-1} dy, \text{ o sea, } B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^1 (1-y^2)^{p-1} dy.$$

Esta integral se modifica, siendo $y^2 = z, \quad dy = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$, luego:

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{p-1} dz = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right)$$

Ahora en virtud de la relación general: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, aplicada al caso particular que nos ocupa, resulta:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{2^{2p-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}$$

y como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, se tiene: $\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$, cuya expresión cambiando la *p* en *a* da definitivamente la fórmula (Δ) obtenida por M. Serret:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2a-1}}$$

Vamos a las aplicaciones de las dos fórmulas halladas para la determinación de las funciones *F*(0) y *F*(1). Para desarrollar la primera, supondremos en (π) que *m* - 1 se transforme en *m*, y así:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x dx=2^{m-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

sustituyendo este valor en *F*(0), resulta:

$$F(0)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}2^{m-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}=\frac{2^{m-1}}{m+1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m+1)}$$

comparando el último factor quebrado del segundo miembro con la expresión (Δ), se podrá escribir:

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m+1)}=\frac{\pi}{2^{2(m+1)-2}}=\frac{\pi}{2^{2m}}$$

sustituyendo este valor en *F*(0), resulta: $F(0)=\frac{\pi}{2^{m+1(m+1)}}$.

Si pasamos luego a la determinación de *F*(1); en la expresión (π), debe suponerse *m* - 1 transformado en *m* + 1, de donde:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1} x dx=2^{m}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación *F*(1), se deduce:

$$F(1)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}2^{m}\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}$$

y como:

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{m+1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

se obtiene:

$$F(1)=\frac{(m+1)\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)2^{m-1}\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{(m+1)\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)}=\frac{2^{m-1}}{m+1}\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma^{2}(m+1)}$$

Por lo que precede se sabe que:

$$\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma^{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma^{2}(m+1)}=\frac{\pi}{2^{2m}}$$

cuyo valor sustituido en F(1), da:

$$F(1)=\frac{2^{m-1}}{m+1}\frac{\pi}{2^{2m}}=\frac{\pi}{2^{m+1}(m+1)}$$

igual valor que F(o). Así, pues, en definitiva se tendrá: $F(\mathrm{o})=F(1)=\frac{\pi}{(m+1)2^{m+1}}$ y por consiguiente, en general: $F(n)=\frac{\pi}{(m+1)2^{m+1}}$ de donde, tomando el valor de *F(n)* de la expresión (γ) resulta:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m}x\cos nx\,dx=F(n)=\frac{\pi}{(m+1)2^{m+1}}$$

o sea:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m}x\cos nx\,dx=\frac{\pi\Gamma(m+2)}{(m+1)2^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{m+1}}\frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{(m+1)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}$$

luego en definitiva:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}$$

Esta es la fórmula final que nos habíamos propuesto desarrollar, dependiente de la integral euleriana de segunda especie. También puede darse la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx$$

en función de la integral euleriana de primera especie, recordando que:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

además de que:

$$p = \frac{m+n}{2}+1, \qquad q = \frac{m-n}{2}+1$$

estos valores sustituidos en la última expresión dan lugar a la siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx = \frac{\pi}{(m+1)2^{m+1} B\left(\frac{m+n}{2}+1, \frac{m-n}{2}+1\right)}$$

Con esto damos por terminado nuestro trabajo, en la seguridad de que será suficiente para que los verdaderos amantes de la ciencia admiren una vez más las bellas concepciones de Euler, que forman sin duda una palanca poderosísima para la resolución de muchas y variadas integrales de funciones trascendentes.

Barcelona a 10 de Septiembre de 1885
Lauro Clariana Ricart