Covariantes pares

de una forma binaria cualquiera

1886

Si consideramos una emanante: $P_0 x'^{\,m} + p\,P_1\, x'^{\,m-1} y' + ...$ de una forma binaria cualquiera, siendo $P_0\,, P_1 ....,$ funciones de las variables *x* e *y*: al constituir con los coeficientes $P_0\,, P_1 ....,$ considerados como constantes, una invariante, resulta una covariante de la forma primera.

Vamos a deducir de este procedimiento aplicado a casos particulares, una regla práctica y sencilla para obtener covariantes de un orden cualquiera.

El emanante general *Ep*, para cuando *p* = 2, es:

$$x'^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2x'\,y' \frac{d\,u^2}{dxdy} + y'^2 \frac{d^2u}{dy^2} \quad (1)$$

Para la invariante respecto a los coeficientes de esta expresión, considerando los valores *x* e *y*, como constantes, y atendiendo a la partición del número 2, en dos sumandos, se tiene:

$$Aa_0 a_2 + Ba_1^2\,,$$

Sábese que la invariante debe satisfacer a la expresión:

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} = 0\ ;$$

de donde:

$$a_0 \times 2Ba_1 + 2Aa_1 a_0 = 0$$

Si *A* = 1, se tiene *B* = -1; luego $Aa_0a_2 + Ba_1^2 = a_0a_2 - a_1^2$. Ahora como $a_0\,, a_1, a_2$ representan respectivamente las derivadas parciales:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2},$$

según las expresiones (1); en definitiva se obtiene la invariante de los coeficientes, esto es:

$$\frac{du^2}{dx^2}\frac{du^2}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$$

cuyo valor, que no es más que la Hessiana, puede considerarse como una covariante de la forma binaria dada, siempre que el orden lo permita.

Si en la emanante *Ep* suponemos $p = 4$; al formar la invariante de sus coeficientes, atendiendo a la partición del número 4, en dos sumandos, así como a las relaciones que se suponen existir entre a_0, a_1, a_2,.. y las derivadas parciales de la función, puede escribirse:

$$\varphi = Aa_0a_4 + Ba_1a_3 + Ca_2^2.$$

Esta expresión debe satisfacer a la condición siguiente:

$$a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + 4a_3\frac{d}{da_4} = 0$$

de donde: $(4A + B)a_0a_3 + (4C + 3B)a_1a_2 = 0$; para lo cual es preciso que $4A + B = 0$, $4C + 3B = 0$; y en el supuesto de ser $A = 1$, resulta: $B = -4$, $C = 3$; luego:

$$\varphi = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2.$$

Sustituyendo los valores respectivos, se tiene para la invariante de los coeficientes de la emanante, o sea la covariante de la forma binaria dada, la siguiente expresión:

$$\frac{d^4u}{dx^4}\frac{d^4u}{dy^4} - 4\frac{d^4u}{du^3dx}\frac{d^4u}{dxdy^3} + 3\left(\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\right)^2$$

Si consideramos $p = 6$; según las observaciones de los dos casos anteriores, y atendiendo a la participación del número 6 en dos sumandos, resulta:

$$\varphi = Aa_0a_6 + Ba_1a_5 + Ca_2a_4 + Da_3^2$$

Condición de la invariante:

$$a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + 4a_3\frac{d}{da_4} + 5a_4\frac{d}{da_5} + 6a_5\frac{d}{da_6} = 0$$

Aplicando esta fórmula a φ se tiene:

$$a_0Ba_5 + 2a_1Ca_4 + 3a_2Da_3 + 4a_3Ca_2 + 5a_4Ba_1 + 6a_5Aa_0 = 0$$

o sea

$$(6A + B)a_0a_5 + (2C + 5B)a_1a_4 + (6D + 4C)a_2a_3 = 0$$

de donde:

$$6A + B = 0, \qquad 2C + 5B = 0, \qquad 6D + 4C = 0$$

Si se supone A = 1, resulta:

B = 6, C =15, D = -10.

Sustituyendo los valores hallados en φ se obtiene:

$$\varphi = a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15\, a_2 a_4 - 10\, a_3^2$$

y como:

$$a_0 = \frac{d^5 u}{dx^6}, \quad a_1 = \frac{d^6 u}{dx^5 dy}, \quad a_2 = \frac{d^6 u}{dx^4 dy^2}, \quad a_3 = \frac{d^6 u}{dx^3 dy^3},$$

$$a_4 = \frac{d^6 u}{dx^2 dy^4}, \quad a_5 = \frac{d^6 u}{dx dy^5}, \quad a_6 = \frac{d^6 u}{dy^6}$$

dedúcese:

$$\frac{d^6 u}{dx^6}\frac{d^6 u}{dy^6} - 6\frac{d^6 u}{dx^5 dy}\frac{d^5 u}{dx dy^5} + 15\frac{d^6 u}{dx^4 dy^2}\frac{d^6 u}{dx^2 dy^4} - 10\left(\frac{d^6 u}{dx^3 dy^3}\right)^2$$

Si consideramos, por fin, p = 8; procediendo de un modo análogo a los anteriores, se obtiene:

$$\varphi = A a_0 a_8 + B a_1 a_7 + C a_2 a_6 + D a_3 a_5 + 3 a_4^2$$

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + 4a_3 \frac{d}{da_4} + 5a_4 \frac{d}{da_5} + 6a_5 \frac{d}{da_6} + 7a_6 \frac{d}{da_7} + 8a_7 \frac{d}{da_8} = 0$$

de donde:

$$(8A + B) a_0 a_7 + (2C + 7B) a_1 a_6 + (3D + 6C) a_2 a_5 + (8E + 5D) a_3 a_4 = 0\,.$$

Siendo A = 1, resulta: B= -8, C = 28, D = -56, E = 35.

Atendiendo a la representación de: $a_0 a_1 a_2 \ldots.$ se deduce:

$$\frac{d^8 u}{dx^8}\frac{d^8 u}{dy^8} - 8\frac{d^8 u}{dx^7 dy}\frac{d^8 u}{dx dy^7} + 28\frac{d^8 u}{dx^6 dy^2}\frac{d^8 u}{dx^2 dy^6} - 56\frac{d^8 u}{dx^5 dy^3}\frac{d^8 u}{dx^3 dy^5} + 35\left(\frac{d^8 u}{dx^4 dy^6}\right)^2$$

A la vista de estos desarrollos por inducción puede darse la regla que sigue para obtener covariantes de órdenes superiores. *Tómese los coeficientes binomiales según el valor de p siendo par y tomados alternativamente con los signos + y -, hasta alcanzar el término medio del desarrollo, de cuyo coeficiente se tomará la mitad; multiplíquese luego estos coeficientes respectivamente por las derivadas parciales de x é y, dos a dos de los términos simétricos, tomando por fin el cuadrado del término medio del desarrollo binomial.*

Así, pues, cuando p = 10, resulta:

$$\frac{d^{10}u}{dx^{10}}\frac{d^{10}u}{dy^{10}} - 10\,\frac{d^{10}u}{dx^9 dy}\frac{d^{10}u}{dxdy^9} + 45\,\frac{d^{10}u}{dx^8 dy^2}\frac{d^{10}u}{dx^2 dy^8} - 120\,\frac{d^{10}u}{dx^7 dy^3}\frac{d^{10}u}{dx^3 dy^7} + 210\,\frac{d^{10}u}{dx^6 dy^4}\frac{d^{10}u}{dx^4 dy^6}$$
$$-126\left(\frac{d^{10}u}{dx^5 dy^5}\right)^2$$

Esta es la regla que nos habíamos propuesto dar a conocer, seguros de que ha de ser de utilidad en el estudio de las formas.

Barcelona, 25 de Febrero de 1886
Lauro Clariana Ricart