Cuaternions

1886

Considerando que la resistencia que se nota a la introducción de los cuaternions, sea debida en parte a la fuerza de síntesis de los algoritmos de Hamilton, impúlsanos a escribir este artículo para que se vea como partiendo de símbolos de Descartes, pueden alcanzarse las mismas soluciones, bien que con mayor claridad, y sin que quede duda alguna respecto a los resultados obtenidos.

Tomaremos por punto de partida una de las fórmulas más importantes dentro de la teoría de los cuaternions. Sea:

$$V(\alpha V\beta\gamma) = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma$$

$\alpha, \beta, \gamma,$ son vectores que podemos representar por:

$$\alpha = xi + yj + zk, \quad \beta = x'i + y'j + z'k, \quad \gamma = x''i + y''j + z''k.$$

V, representa un vector de la expresión que le sigue. S, representa un escalar de la expresión que le sigue. Además se sabe que:

$$ij = k, \quad ki = j, \quad jk = i, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i, \quad (1)$$

Al multiplicar los dos vectores β y $\gamma,$ se obtiene:

$$\beta\gamma = -(x'x'' + y'y'' + z'z'') + i(y'z'' - z'y'') + j(z'x'' - x'z'') + K(x'y'' - y'x'').$$

Este resultado permite suponer:

$$S\beta\gamma = -(x'x'' + y'y'' + z'z''), \quad V\beta\gamma = i(y'z'' - z'y'') + j(z'x'' - x'z'') + k(x'y'' - y'x'').$$

Luego:

$$\begin{gathered}\alpha V\beta\gamma = (xi + yi + zk)[i(y'z'' - z'y'') + j(z'x'' - x'z'') + k(x'y'' - y'x'')] = \\ -x(y'z'' - z'y'') - y(z'x'' - x'z'') - z(x'y'' - y'x'') + x(z'x'' - x'z'')ij + x(x'y'' - y'x'')ik + \\ + y(y'z'' - z'y'')ji + y(x'y'' - y'x'')jk + z(y'z'' - z'y'')ki + z(z'x'' - x'z'')kj.\end{gathered}$$

Tomando el vector solamente de este resultado, sin olvidar las igualdades (1), se tiene:

$$\begin{gathered}V\alpha V\beta\gamma = x(z'x'' - x'z'')k - x(x'y'' - y'x'')j - y(y'z'' - z'y'')k + y(x'y'' - y'x'')i + \\ z(y'z'' - z'y'')j - z(z'x'' - x'z'')i.\end{gathered}$$

Si se añade y quita al segundo miembro de esta igualdad las cantidades:

$$xx'x''i, \quad yy'y''j, \quad zz'z''k,$$

después de ordenar resulta:

$$V\alpha V\beta\gamma = xx''(x'i + y'j + z'k) + yy''(x'i + y'j + z'k) + zz''(x'i + y'j + z'k) - xx'(x''i + y''j + z''k) -$$
$$yy'(x''i + y''j + z''k) - zz'(x''i + y''j + z''k) =$$
$$(xx'' + yy'' + zz'')(x'i + y'j + z'k) - (x\,x' + y\,y' + z\,z')(x''i + y''j + z''k) =$$
$$-(x''i + y''j + z''k)(x\,x' + y\,y' + z\,z') - (x'i + y'j + z'k) - (x\,x'' + y\,y'' + z\,z'').$$

Ahora como: $S\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz')$, y $\mathrm{S}\alpha\gamma = -(x\,x'' + y\,y'' + z\,z'')$; al sustituir estos valores en (2), se deduce la fórmula primera:

$$V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

De esta fórmula suele deducirse otra, quizá de más aplicación que la anterior, tal es:

$$SV\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta.$$

Podemos convencernos de la verdad de esta expresión procediendo como antes. Sea el nuevo vector: $\beta = x'''i + y'''j + z'''k$. luego:

$$V\alpha\beta = i\,(yz' - zy') + j\,(zx' - xz') + k\,(x\,y' - y\,x')$$
$$V\gamma\delta = i\,(y''z''' - z''y''') + j\,(z''x''' - x''z''') + k\,(x''y''' - y''x''');$$

de donde al tomar el escalar del producto de estas dos expresiones, se obtiene:

$$SV\alpha\beta V\alpha\delta = -(yz' - zy')(y''z''' - z''y''') - (zx' - xz')(z''x''' - x''z''') - (xy' - yx')(x''y''' - y''x'''). \; (\mathrm{A})$$

Según los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ se tiene:

$$S\alpha\delta = -(xx''' + yy''' + zz''')$$
$$S\beta\gamma = -(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$
$$S\alpha\gamma = -(xx'' + yy'' + zz'')$$
$$S\beta\delta = -(x'x''' + y'y''' + z'z''')$$

de donde:

$$S\alpha\delta S\beta\gamma = xx'x''x''' + x'x''yy''' + x'x''zz''' + y'y''xx''' + y'y''yy''' + y'y''zz''' + z'z''x'x''' + z'z''y\,y''' + z'z''z\,z''',$$
$$S\alpha\gamma S\beta\delta = x\,x''x'x''' + y\,y''x'x''' + z\,z'x''x''' + y'y'''x\,x'' + y\,y'y''y''' + z\,z''y'y''' + z'z'''x\,x'' + y\,y''z'z''' + z\,z''z'z'''$$

o sea, después de toda reducción:

$$S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta = -(yz' - zy')(y''z''' - z''y''') - (zx' - xz')(z''x''' - x''z''') - (xy' - yx')(x''y''' - y''x''');$$

y como este segundo miembro es igual al de (A), resulta definitivamente:

$$SV\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta.$$

Creemos que lo dicho será suficiente para comprender que con la misma facilidad se demostrarían todas las demás fórmulas de los cuaternions; concepto bellísimo de Hamilton, que viene destinado a cambiar por completo la faz de la Matemática antigua, procurando, en lo que sea posible, una nueva base de investigaciones científicas.

Barcelona a 25 de Junio de 1886
Lauro Clariana Ricart