Espíritu Matemático
de los
Tiempos Modernos

1886

A presentarme ante vosotros para leer esta memoria como trabajo de turno, siento contrastar una vez más mi pequeñez al parangonar mis reducidos conocimientos con vuestro claro saber y reconocida ilustración; empero al tomar la palabra me alienta la esperanza de que vais a concederme vuestra proverbial indulgencia, la cual juzgo indispensable para aquietar mi ánimo poco sereno en los momentos actuales.

En este concepto me permito, pues, someter a vuestra consideración el presente trabajo que puede formularse:

Espíritu matemático de los tiempos modernos

La ciencia aunque basada en principios sólidos e incontrovertibles, puede manifestarse bajo formas diferentes y complicadas, que cual ondas que se cruzan y entrelazan, envuelven ciertos puntos que constituyen los axiomas y postulados de la misma.

La Matemática, se halla en este caso más que otra ciencia alguna; sus formas son tan varias y complejas, que procuran en ciertos momentos aun el desaliento de quien las cultivara, sobre todo si se pretende seguir a los matemáticos modernos, los cuales no cesan en inventar nuevos métodos, así como signos y algoritmos propios y caprichosos.

Cual río impetuoso que sale de madre, así se extiende la ciencia por toda la faz de la tierra desde su renacimiento; y al tiempo que los genios se ocupan de ella, forma patrimonio también de ciertas medianías que procuran sistemas y métodos sin cuento; unos perjudiciales y aun ridículos; otros sin importancia alguna, los cuales moviéndose todos por la corteza de ese árbol frondoso y gigantesco del humano saber, no llegan a alcanzar jamás su médula.

Urge, pues, investigar la red de caminos que se ofrecen a la vista del científico, a fin de armonizarlos en algún modo, y evitar que se ande por donde la verdad puede correr el inminente peligro de perderse.

En la Matemática, se presentan dos ramas principales: la del análisis y la geometría; en cuanto la primera, recordaremos a Montucla cuando dice: «*El lujo del análisis se ha hecho horroroso y cuanto más aumenta, más deja ver su pobreza real en todo lo que tiende a los métodos inversos, que son los únicos que la física puede al presente darnos ventajas*». Las palabras del docto historiador aseveran que la rama predilecta de nuestros tiempos modernos no debe buscarse en el análisis, a pesar de su lujo; ~ objeto de esta memoria ~ empero antes de probar este principio, es de todo punto indispensable anticipar algunos conceptos, que a modo de piedras miliares indiquen de una manera precisa la dirección que hemos de seguir constantemente en las investigaciones, por cierto harto comprometidas, de una ciencia que por antonomasia se designa bajo el nombre de exacta.

I

Permitidme, Sres. Académicos, que al principiar este trabajo descienda a las nociones más fundamentales de la ciencia de la cantidad, inspirándome en las doctrinas de los más insignes matemáticos, a fin de que éstas sirvan de medida para aquilatar las diferentes y variadas escuelas de nuestros tiempos modernos.

Comienzo, pues, por la definición más general que puede concederse a la Matemática, en el concepto de ser una serie de conocimientos científicos relativos a la cantidad, unidos estrechamente entre sí, y cuyas nociones se fundan en verdades potísimas que la razón es capaz de descubrir sin necesidad del mundo externo, pero que pueden confirmarse por él en los límites que la experimentación permite. Dicho se está que la verificación empírica de una ley matemática puede ser rigurosa o aproximada; en efecto, si se trata de comprobar que las medianas de un triángulo se encuentran en un mismo punto, resulta una verificación empírica aproximada; si se propone afirmar el principio de Euler, respecto a los poliedros regulares convexos, la verificación empírica será completamente rigurosa.

En la Matemática hállanse ideas fundamentales que constituyen su parte filosófica; tales son las nociones de cantidades negativas, imaginarias, infinitesimales etc. Negar la existencia de esas cantidades porque no podamos hacerlas descender de la altura en que se hallan, o porque no las podamos sujetar al *experimentum crucis* de Bacon, equivale a no creer en la belleza de las artes porque no la podemos tocar.

El objeto principal de esta parte elevada de la Matemática consiste en distinguir el orden y la dependencia racional de ciertas verdades abstractas, en que el espíritu contempla el cuadro perfecto de la ciencia, de modo que al aceptar tal o cual encadenamiento de proposiciones a otra marcha, aunque lógica, menos conveniente, decide del *esquema* para la construcción de la misma en cuanto obedece a su mayor orden y conexión.

Con todo no debe confundirse jamás la filosofía Matemática con la ciencia que podríamos designar quizá bajo el nombre de positiva; esta tiene por objeto, en general, el establecer demostraciones lógicas comprobadas por la experiencia; definición más que suficiente para convencerse del error en que se halla Vico, cuando dice: «*Demostramos las verdades geométricas porque las hacemos*»

El doble concepto que hemos asignado a la ciencia Matemática, nos salva de ataques semejantes. En ella debe atenderse al modo de ser de las cosas reales, además de lo que podríamos llamar el *organum* formado, con anterioridad, por nuestro espíritu. Y en verdad que esta condición le procura un lugar preferente entre todas las demás ciencias; y si bien en las físicas y naturales por medio de la inducción generalizamos los resultados de la experiencia, recabando conocimientos ciertos; bien sabéis que nunca esta certeza alcanza jamás el grado de la de un simple teorema de Geometría.

Notables son los conceptos que de la Matemática forman los insignes Descartes y Leibnitz, brillantemente expuestos por M. Poinsot; oigámosle:

«*La idea de orden bajo la cual se subordinan las específicas de situación, de configuración, de forma, de combinación, debe ser la predominante, seguida luego de la de grandor, que implica la de cantidad, de proporción y medida. De suerte que la Matemática considerada del modo más general, puede ser definida como la ciencia que tiene por objeto el orden y la medida*»[1]

Bien podríamos decir, pues, que el orden y la medida forman sus categorías fundamentales: dualidad que si apretáremos el argumento podría reducirse a la unidad según Leibnitz; cuando indica que el orden de los fenómenos simultáneos está en el espacio; así como en el tiempo, el orden de los fenómenos sucesivos; resultando que toda especulación matemática, se reduce a la única idea de orden, si el espacio y tiempo son sus factores: unidad sistemática dentro de su génesis. Sigamos a Poinsot:

«*Si consideráis el álgebra, descubriréis dos partes muy distintas. De momento, el álgebra ordinaria que puede muy bien llamarse aritmética universal.*
Esta álgebra, en efecto, no es más que una aritmética generalizada, es decir, extendida de números particulares a números cualesquiera, y por consiguiente de operaciones actualmente ejecutables a operaciones que no se haga más que indicar por signos. Mas hay otra álgebra superior que descansa toda entera en la teoría del orden y de las combinaciones, que se ocupa de la naturaleza y de la composición de las fórmulas consideradas en sí mismas, como puros símbolos y sin ninguna idea de valor o cantidad.
A esta parte es la que debe llevarse la teoría profunda de las ecuaciones, la de las expresiones imaginarias, y todo el arte de las transformaciones algebraicas; solo esta parte elevada de la ciencia, es la que merece propiamente hablando el nombre de álgebra»

Estas bellísimas consideraciones de Poinsot deben recordarnos al célebre Wronski cuando ataca a varios autores por haber llevado a la categoría de cantidades, los símbolos: $-1, \sqrt{-1}$ en los cuales no debe entrar para nada el *quantum*.

En vista de esos preliminares cabe deducir por fin el cuerpo de doctrina a que ha de obedecer el verdadero ideal de la ciencia matemática, para que se desarrolle bajo base sólida e imperecedera:

1º.- *Que los grandores representados por las letras o los símbolos algebraicos, sean susceptibles de crecer o decrecer con continuidad.*
2º.- *Que los signos + y -, sean tratados como signos de dos operaciones o combinaciones perfectamente simétricas.*

[1] *Poinsot - Reflexions sur les principes fundamentaux de la theorie des nombres - p.5*

Para la realización de los precitados principios, requiérese que las cantidades representadas por los símbolos algebraicos, y afectados de los signos de operaciones, entren no solamente en la categoría de grandores continuos, o a unidad arbitraria,[2] sino en la clase de grandores continuos a origen también arbitrario[3].

En este supuesto, la distinción de valores reales en positivos y negativos, no se debe al álgebra, puesto que tiene su fundamento en la naturaleza de los grandores a origen arbitrario: no sucede lo propio respecto a las cantidades imaginarias, pues la consideración esencial de esta clase de valores es puramente algebraica, en tanto que ella procede de la teoría abstracta de la combinación y del orden; pues de lo contrario, las teorías algebraicas pierden su regularidad, su simetría, su generalidad, que como ya hemos dicho, es el diapasón normal de todas las demás notas y tonos que se refieren al espacio y tiempo.

Después de estas ligeras nociones científicas bajo las cuales se basa el desarrollo del presente trabajo, fuerza es abrir el gran libro de la historia para que del estudio de sus principales páginas, quepa el deducir todos los extremos que van consignados en el mismo.

El movimiento matemático, se inaugura, podríamos decir, en tiempo de los filósofos griegos, aunque solo con carácter geométrico. Fuerza es confesar, no obstante, que en tiempo de los griegos o sea en el primer período, realizáronse trabajos que han contribuido poderosamente al desarrollo de la Matemática moderna. En efecto, hállanse ya simples consecuencias de geometría plana, por medio de figuras a tres dimensiones; Pappus, partiendo de una superficie helizoidal, y como proyecciones de ciertas curvas alabeadas, describe la espiral de Arquímedes, y la cuadratriz de Dinostrato. Arquímedes establece los fundamentos del cálculo infinitesimal, que tan fecundos resultados debían dar luego en manos de Newton, Leibnitz y Euler. Apolonio sienta los principios de la geometría de proyección; y aun la preciosa idea de Descartes, de que la Matemática tiene por objeto el orden y la proporción, asoma ya en los labios de Aristóteles.

Pasado el período primero, sigue otro bastante largo el cual habría sido quizá suficiente para que se perdieran, en medio del torbellino de guerras crueles que separan los siglos antiguos de los modernos, todos los trabajos de la antigüedad, si los árabes no cuidaran de trasmitir al Occidente, los conocimientos orientales por medio de traducciones al árabe de diferentes obras griegas y latinas, aunando así los descubrimientos de la India con los de la Grecia. De una manera lánguida, continua el movimiento matemático, hasta el siglo XV, que señala la época del renacimiento de las letras y la civilización en Europa, inaugurándose el tercero, y luego el cuarto período de las ciencias exactas, los cuales juntos con el siglo actual, podemos designar bajo el nombre de período de la Matemática moderna.

A raíz del tercer período, la tendencia a la generalización se acrece cada vez más, pero sin formar los nuevos descubrimientos cuerpo de doctrina hasta que Vieta, Fermat y Descartes, al originar una grande revolución dentro del terreno de la cantidad, sellan dicho tercer período.

---

[2] *Origen de cantidades inconmensurables.*
[3] *Origen de cantidades negativas.*

El álgebra y la geometría se desarrollan primero en Italia: Seipio, Ferrer, Tartaglia, Cardan, Bombelli, hallan la resolución de las ecuaciones de 3º y 4º grado; luego en Francia, Vieta perfecciona muchas ramas particulares del álgebra, enseñando a resolver gráficamente las ecuaciones de 3er. grado, de las cuales dependen las soluciones de los problemas famosos de la antigüedad. Descartes aplica el álgebra a la geometría, y forma la geometría analítica. Pascal y Fermat, constituyen los centinelas avanzados de los últimos adelantos en las teorías célebres de la geometría superior y la de los números. En Inglaterra el barón Neper inventa el cálculo de los logaritmos, y Harriot, da los principios fundamentales de la composición de ecuaciones.

Así llega el cuarto período, y realizase otra nueva revolución, originada por los descubrimientos nunca bastante ponderados de Newton y Leibnitz referentes a la cantidad infinitesimal.

En las dos revoluciones citadas es de ver que hay un género común: la variabilidad de la cantidad; bien que en la primera revolución conserva el quantum, y en la segunda llega a perderse; paso notabilísimo, atendido a que el gran secreto de la Matemática consiste en dejar la cantidad en su mayor grado de indeterminación: por esto los trabajos de Leibnitz y Newton, han sido tan fecundos en resultados científicos.

De esta suerte se resuelven problemas de toda especie, que habían resistido a la antigua Geometría, y aun al análisis de Descartes. Los célebres Bernoulli, partidarios acérrimos de la escuela de Leibnitz, se ocupan de soluciones referentes a los isoperímetros, preparando de lejos el método de las variaciones. En fin, los geómetras enriquecen todos los días la ciencia con sus descubrimientos y procuran extender indefinidamente sus horizontes, cuyos límites no tocan nunca a su término.

Si buscamos el espíritu científico de esta época, fuerza es reconocer que existe una como tendencia hacia la geometría, a pesar de su unión más o menos directa con el análisis.

Descartes ya indica como problema interesante la determinación de la tangente en un punto de una curva, y sus estudios producen opimos frutos, llevando una buena parte Fermat. Roverbal trabaja también en el problema de las tangentes, si bien con escaso mérito, logrando su orgullo que Cavallieri, alcanzara el derecho de prioridad en el método de los indivisibles, método que entusiasmó a muchos matemáticos de aquella época, declarándose prosélitos suyos, los distinguidos Pascal, Torricelli, Schooten[4].

Pascal y Desargues, tienden a cultivar la geometría bajo una nueva faz, formando, podríamos decir, el punto de unión entre la geometría antigua y moderna, o sea entre Apolonio y Poncelet.

[4] *Exercitaciones geometrica de Cavallieri: 6 libros*

Luego Maclaurin considera en la atracción de los elipsoides, superficies homofocales, las cuales consiguen transformaciones importantes para el análisis, y en particular para la resolución de un problema, que había constituido por un largo período de tiempo la desesperación de los matemáticos; por fin, Stewast, Poinsot, Cauchy y D´Alambert, continúan ese movimiento geométrico, hasta señalar Poncelet y Dupin las últimas conquistas en ese ramo del saber humano.

Fijados quedan mediante esa rápida reseña histórica los diferentes puntos de la ciencia matemática en los cuatro períodos de la misma, o sea desde su origen hasta principios del siglo actual; y ello es que bien puede considerarse suficiente para descubrirnos, después de una comparación adecuada, la tendencia del espíritu matemático en los tiempos modernos; tendencia geométrica, que se pronuncia aún más en nuestro siglo, inaugurándolo dos obras tan importantes como las de Monge y Carnot, las cuales procuran respectivamente notables desarrollos en la geometría infinitesimal y en la geometría proyectiva, que más tarde adquiere proporciones colosales en manos de Charles y Poncelet.

Sigue Inglaterra este movimiento, que no cede en métodos geométricos, dándose a conocer Hamilton, con su célebre teoría de los cuaternions, que es una de las teorías que priva hoy más entre los sabios.

Tampoco faltan en Alemania sus nuevos geómetras, que pretenden desarrollar la geometría bajo bases completamente distintas de los principios euclidianos.

Dejad, pues, Sres. Académicos, que hable un poco de nuestro siglo, de ese siglo cuyo movimiento científico parece tocar al pináculo de la perfección.

I I

El desequilibrio que se nota entre los procedimientos geométricos y los puramente analíticos, nos manifiesta de una manera incontrastable que el hombre tiene predilección por todo aquello que mejor se lo abonen los sentidos o la experiencia, siendo de suyo más fácil de adquirir.

Acaso este razonamiento explique la dificultad constante que han presentado las ecuaciones a ser resueltas. Después de los trabajos de Vieta y Harriot, creadores del álgebra moderna en la segunda mitad del siglo XVI, y principios del XVII, pocos adelantos se han realizado en este vasto campo del análisis, como no se tengan por tales, los procedimientos de Descartes, Newton, Lagrange, Fourier, Sturm y Gräffe; los cuales han modificado o reducido el mecanismo, pero sin salirse de los números, como así lo corrobora Lagrange, cuando Lacroix pone en boca del mismo, las siguientes palabras:

«*Se puede asegurar de momento que cuando se viene a resolver de un modo general una ecuación de 5º grado u otra de grado superior, se obtienen fórmulas algebraicas preciosas, pero muy poco útiles para la resolución efectiva y numérica de las ecuaciones, lo que no nos dispensa de tener que recurrir a métodos aritméticos* »

El bellísimo párrafo que inserta el distinguido matemático el Sr. Merino, en el prólogo de una traducción de la obra de Enke, demuestra también de una manera gráfica lo poco que se ha adelantado en esta parte del análisis; Hélo aquí:

«*El problema atacado por cien distintos puntos a la vez, y minado y socavado durante siglos, aguanta todavía el empuje tremendo de la perspicacia y curiosidad, sobreexcitados por tan tenaz resistencia, de multitud de sabios empeñados sin tregua ni descanso en derrumbarle. En algunos momentos parece, si, que vacila y se desmorona; y por algunos sitios diríase también que amenaza inmediata y completa ruina; pero en conjunto, la inmensa mole continua gravitando sin conmoverse sobre el pobre entendimiento humano, y aplastándole con la irresistible pesadumbre de los misterios y dificultades que encierra* »

Este párrafo es más que suficiente para probarnos los esfuerzos hercúleos que debe realizar la inteligencia humana, cuando pretende adelantar por el vasto campo del análisis puro. Empero si dejando la resolución de las ecuaciones, pasamos al estudio del análisis infinitesimal, bajo la base de las funciones complejas, al instante descubrimos como el análisis se ampara de su compañera o sea de la geometría, para poder desarrollarse fácilmente y de una manera fecunda: así lo corroboran los bellísimos conceptos de Cauchy aplicados a las funciones doblemente periódicas, bien como en las formas de Cayley y Sylvester respecto a las determinantes, covariantes e incovariantes etc., cuyas últimas conquistas todas, muestran de una manera clara y evidente su fisonomía geométrica.

Por esto solo me propongo hablar de los métodos geométricos de nuestro siglo, en cuanto ellos expresan en realidad de verdad el espíritu matemático de nuestros tiempos modernos. Comencemos pues el estudio crítico del siglo actual por las obras notables de Monge y Carnot. En las investigaciones de Monge, nótanse dos direcciones muy diferentes:

1º.- Las aplicaciones del cálculo diferencial e integral a los altos problemas de geometría.
2º.- El desarrollo de su Geometría Descriptiva, que tiene por objeto ordenar y sistematizar según base científica, los conocimientos artísticos de Stereotomía, sombras y perspectiva, conforme a relaciones constantes de posición.

La primera parte, o sea el análisis aplicado descansa sobre el empleo de las coordenadas de Descartes. Al estudiar Monge, las grandes cuestiones de curvatura de las superficies, se halla en el caso de enlazar los más bellos conceptos de la geometría superior con las teorías más arduas del cálculo integral[5].

[5] *Feuilles d´Analyse appliquée a la Geometrie*

Muchos célebres matemáticos siguen el movimiento de Monge: Meusnier, reduce los radios de curvatura de sección oblicua a los de sección normales; Lancret, estudia las líneas alabeadas en su doble concepto de curvatura, rectas polares, superficies polares, esfera osculatriz y otras ramas relacionadas con las anteriores. Dupin y Malús, trabajan también en el mismo sentido. O. Rodríguez, pretende deducir las líneas y radios de curvatura de superficies en función de los cosenos de los ángulos que la normal forma con los ejes coordenados, simplificando así los resultados de Monge. Bahillier halla una curva notable que se designa: polar de un punto. Binet, trabaja en las curvas cuya evoluta es la misma curva.

Empero si notables son esos trabajos, quizá lo sean más los realizados luego por Monge, respecto de las superficies en que todas las líneas de curvatura son planas o esféricas, contribuyendo a esta clase de investigaciones los distinguidos M.M. Ossiam, Bonet, Joachimistal, Serret y Picart; empero nadie como M. Bonet, lleva a mayor altura estos estudios, sobre todo cuando trata de sustituir las coordenadas cartesianas por otras variables, de modo que queden dichas nuevas variables más ligadas a la forma de la superficie dada. Fecundísimo concepto que sirvió de hincapié para la investigación de las superficies isotermas en el desarrollo de las coordenadas curvilíneas de Lamé, las cuales pueden luego transformarse por medio de tres superficies de 2º grado homofocales, en coordenadas elípticas; pasando así de éstas a las polares, como resultado de tres nuevas superficies, constituidas por un plano, un cono y una esfera, hasta llegar a la consideración de superficies planas, origen de las coordenadas de Monge.

Mas dejemos esta primera parte para entrar de llano a la Geometría Descriptiva, que sin duda debe procurar un nombre imperecedero en la historia de la Matemática a quien la fundara.

La descripción gráfica de los cuerpos es la más importante para dicha Geometría Descriptiva, dice Olivier: y en verdad que estos métodos deben servir, no solo para establecer teorías puramente especulativas, sino para efectuar operaciones reales que ofrezcan una precisión completa. En la geometría ordinaria hay cierta indeterminación que no existe en la Geometría Descriptiva; esta es la ventaja del método de proyecciones.

En estos últimos tiempos parece que se trata de asociar esta Geometría con la superior a fin de darle forma científica, y evitar que se pueda decir de ella, lo que dijo Charles en cierta ocasión.

Nótese como en la excelente obra "*Traité de Geometrie Descriptive par Jules de la Gournerie*" habla ya de la homología de Poncelet; y si bien Elizalde, considera los métodos axonométricos y planos acotados como parte secundaria; en cambio los trabajos realizados en Alemania y Bélgica son muy notables para ensanchar los principios de Monge al objeto de formar un cuerpo de doctrina completo.

La proyección cónica, fundamento de la perspectiva, debe constituir la base de esta ciencia, sintetizada en la gavilla, que es una de las formas geométricas fundamentales correspondiente a las de 2ª especie, o doblemente infinita, como se acostumbra a decir.

También entran en esas teorías modernas los principios de correlación, por ser de más alcance en las aplicaciones que la teoría homográfica, y de ellos se vale el Dr. Fiedler, amén de la razón anarmónica, que constituye la base de la homografía según Charles.

El célebre Staud en su obra "*Geometría der Lage*" parte sencillamente de la forma armónica derivada del cuadrilátero completo, obteniendo solo así, resultados sorprendentes.

En suma, diremos que las proyecciones de Monge se deducen de superficies cilíndricas o paralelas; mientras que las que acabamos de reseñar, se refieren en tesis general, a proyecciones cónicas o centrales.

Muy conocidas son las ventajas que ofrece hoy el estudio de la Axonometría o Perspectiva axonométrica, como aplicación de las proyecciones cónicas, para que tenga aquí que recordarlas. Al atender a un cuarto plano de proyección, resulta, conforme indica muy acertadamente el distinguido catedrático de Geometría Descriptiva en la Universidad Central, que: «*la superabundancia de elementos, complicada en la apariencia, presta gran simetría a las construcciones y tiende a simplificar la resolución de algunos problemas, sucediendo aquí una cosa análoga a lo que pasa en Geometría Analítica, con las coordenadas tetraédricas, comparadas con las cartesianas*. »

Esto nos lleva de la mano a hablar algún tanto de esta geometría de posición, según otros llamada superior, general, proyectiva, derivada etc., ya que tiende hoy a unirse estrechamente con la Geometría Descriptiva.

Al investigar las primeras obras, fuerza es empezar por la Geometría de posición de Carnot, origen de las teorías que profesan hoy los más respetables geómetras.

Para penetrarse del espíritu de la geometría de Carnot basta leer su disertación preliminar, en la cual veráse de momento la importancia que da a la idea de análisis de situación, concebida por el inmortal Leibnitz y que magistralmente expresa D'Alambert, cuando dice:

«*Ciertamente que el análisis de situación es una cosa que falta al álgebra ordinaria; es el defecto de este análisis que hace que un problema parece a menudo tener más soluciones de las que debe tener en las circunstancias limitadas en que se considera. Esta superabundancia del álgebra que da lo que no se pide, es admirable bajo todos puntos de vista; pero también resulta que un problema que no tiene realmente sino una solución, tomando su enunciado con todo rigor, se encuentra encerrado en una ecuación de muchas dimensiones, y por esto no puede en algún modo ser resuelto. Es muy conveniente atender a la situación en el cálculo de los problemas, esto los simplificará en muchos casos, pero el estado y naturaleza del análisis algebraico, parecen no permitirlo*»

Estos pensamientos bellísimos, explican perfectamente el objetivo de Carnot, cuando pretende reducir la diversidad de posiciones de una figura por una simple mutación de signos; así como su Geometría de posición a la verdadera doctrina de cantidades positivas y negativas.

A este propósito indican tanto Carnot como D'Alambert, los abusos que se cometen al querer generalizar la idea ingeniosa de Descartes, respecto de las mismas cantidades; y por más que se hayan salvado las grandes cuestiones suscitadas entre Leibnitz y Bernoulli, Euler y D'Alambert, quedan aun algunos enigmas que descifrar referentes a las cantidades negativas aisladas, que con gran acopio de datos presenta Carnot, acabando por sentar los principios siguientes:

1º.- Que toda cantidad negativa aislada, es un ser de razón, y que las que se encuentran en el cálculo son simples formas algebraicas, incapaces de representar cantidad alguna real y efectiva.
2º.- Que cada una de estas formas algebraicas no es más que la diferencia de dos cantidades absolutas en que la mayor, en el caso de ser la diferencia positiva, pasa a ocupar el lugar de la menor, y ésta el de la mayor.

Bajo este supuesto cambia las palabras de cantidades positivas y negativas en cantidades directas o inversas, y por medio de estas consideraciones generales alcanza el estudio de una figura primitiva relacionada con otras que llama correlativas, y que por simple mutación de signos, se puede pasar de unas a otras; concepto que forma un gran semillero de investigaciones científicas, que procuran según el decir de algún eminente Matemático, métodos fecundos y poderosos para salvar algunas cuestiones de los porismos de Euclides.

¡Quién sabe si las cantidades imaginarias de Charles, en su geometría superior, responden a la lectura de la obra inmortal de Carnot!

Así se abre en nuestro siglo una nueva era para la Geometría proyectiva, dándose a conocer Brianchon, que completa el principio de Pascal, luego Möbius, Bellavitis, Cremona, Culmann, Reye; y por fin Zech, Gaskin, Pondra, Fiedler y Staud.

Adviértase que en general, las doctrinas sostenidas por esos geómetras, hállanse íntimamente relacionadas con la Geometría de Riemann, discípulo de Gauss, perteneciente a la escuela de los pseudo geómetras, última etapa de los pangeómetras; escuela de la cual he de hablar un poco, puesto que se halla en discordancia con los principios que quedan sentados como fundamento de la Ciencia Matemática.

Permítaseme pues, que, sin carácter de empecer a nadie, emita de una manera franca y sin aherrojar el pensamiento, mi parecer en cuestión de tanta importancia, pues mucho temo que si no andamos con moderación en aceptar los principios de esas nuevas escuelas, van a originarse graves perjuicios en una ciencia que se ha considerado hasta hoy como modelo de exacta y basada en sana y verdadera lógica.

Los nuevos geómetras correspondientes a la escuela trascedentalista o sean los pangeómetras, a pesar de partir de lo empírico, alcanzan el espacio meta geométrico de los pseudo geómetras, donde ni los conceptos ni la imaginación humana pueden cosa alguna, ni mucho menos la experimentación: consecuencia de suyo bastante anómala.

Los pangeómetras representan los sensualistas de la ciencia; afirman la limitación absoluta del Universo material, como consecuencia directa de que lo que es real es absoluto; para ellos, la suposición de un máximo absoluto de existencia material, es el complemento de un mínimo absoluto, o sea el átomo.

Gauss, Riemann y Lobatschewsky, según estos principios tratan de crear un sistema geométrico independiente de los axiomas de Euclides sobre las paralelas. Las publicaciones se suceden; son arduas, y se abren entusiastas controversias.

Notables son los párrafos que copia Stallo, de esos geómetras, para lo cual bastará que recuerde algunos de ellos, a fin de ver cual es la fe de los nuevos sacerdotes en la ciencia Matemática.

«*Nuestro espacio ordinario Euclidiano a tres dimensiones y homoloidal, dicen, no es sino una de las formas posibles del mismo. La preeminencia de este espacio Euclidiano sobre las otras formas, no puede ser sostenida sino por razones empíricas; según los dogmas lógicos y psicológicos de la escuela sensualista, ella simplemente es debida a la asociación accidental de nociones que pueden ser desunidas. Esta desunión se realiza porque se han descubierto nuevas dimensiones en el espacio, afirmadas como una consecuencia necesaria de ciertos hechos de experiencia imposibles de explicar de otro modo. El espacio verdadero y real, no puede solo tener tres dimensiones, sino cuatro o aún más. El espacio en el que nos movemos es o puede ser no solo homoloidal o plano; si no también curvo, esférico o pseudo esférico, resultando que toda línea considerada hasta aquí como recta, podrá, siendo suficientemente extensa, constituir una curva cerrada en razón de la curvatura inherente al espacio.*
Por otra parte, la medida de la curvatura del espacio, así como el número de sus dimensiones, es probablemente diferente, según las regiones del mismo: de modo que nuestras observaciones respecto a los puntos que habitamos, nada indican de la curvatura y dimensiones de otras regiones del espacio »

He aquí las doctrinas de los pangeómetras más entusiastas, y digo, entusiastas, porque entre ellos hay quien le repugna tomar en cuenta todos los extremos que van consignados. Omito el entrar en explicaciones acerca de los medios de que se valen algunos soñadores de lo imposible, para garantizar sus afirmaciones por medio de la experiencia: notables son, no obstante, los estudios de Beltrami, encaneciendo la importancia del espacio a cuatro dimensiones, para la mayor simetría de ciertas fórmulas matemáticas, conforme a las observaciones de Boole[6]; Beltrami considera el espacio de tres dimensiones como una proyección de la figura situada en el de cuatro, a la par como la de dos dimensiones se considera como proyección de una figura de tres. En fin, hay quien afirma que los teoremas de Lobatschewsky, Riemann, Helmoltz y Beltrami, forman la única base de la teoría completa y exacta del paralelismo: el entusiasmo llega hasta el punto de exclamar Cliford: que Lobatschewsky es respecto de Euclides lo que Copérnico de Ptolomeo.

[6] *Laws of Thought*

Al comparar a los geómetras fácilmente se ve que una línea bien notable distingue a los nuevos de los antiguos o euclidianos: los modernos parten de lo empírico para remontarse a lo más trascendental; mientras que los geómetras ordinarios, parten a priori de axiomas que luego llevan al terreno de la realidad: marcha contraria la una de la otra.

Conforme a los principios sentados según nuestra tesis, débese entender que el paso a la realidad no es sino por vía de comprobación mas o menos exacta, a fin de que los principios que en nuestra mente formamos, se sujeten a la experiencia; de lo contrario nos viéramos obligados a aceptar la tesis de Vico, cuando dice que demostramos las verdades geométricas porque las hacemos; pues bien cabe aceptar consecuencias evidentes de principios erróneos, mayormente cuando no buscamos en el mundo real, cual piedra de toque, la comprobación debida. Así se explica que algunos admitan que la suma de los ángulos interiores de un triángulo plano, no sea igual a dos rectos, y por ende que la recta sea una circunferencia, lo que andando el tiempo muy posible es que se llegue a sostener que la recta es una línea de forma acaracolada. Quizá por esto Alambert, dice: «*La definición y propiedades de la línea recta, así como las líneas paralelas, son el escollo y el escándalo de los elementos de la Geometría*». No cabe duda que así pueden formarse varias geometrías, tales como indica ya Tilly, en el supuesto de poderse trazar a una recta desde un punto: muchas paralelas, una o ninguna; geometrías que se designan respectivamente bajo los nombres de Gauss, de Euclides y de Riemann; siendo esta última la base de la Geometría de posición en nuestros tiempos. Riemann, se adelanta aun más, y da a conocer su espacio metagométrico, el cual supone como un agregado triplemente extenso, cuyas dimensiones se van desarrollando indefinidamente, considerando que la posibilidad conceptual del espacio, coincide, como extensión, con su posibilidad empírica, aunque no corresponda con su realidad empírica.

Así pues siempre resultan nuevas bases para la Geometría, que aumentan a compás de las dimensiones que se vayan suponiendo.

Creo, Sres. Académicos, que lo dicho debe ser suficiente para comprender que si en nuestros conceptos matemáticos, perdemos la comprobación del mundo real, trabajamos a ciegas, llevando la ciencia por sendas tortuosas y extraviadas, que no ofrecen más que ráfagas luminosas a manera de efectos de fantasmagoría que se pierden en medio de noche oscura y tenebrosa. En las ciencias exactas a la par que en las bellas artes, debemos procurar siempre situarnos en la línea de intersección, como si dijéramos de las dos esferas representantes del mundo real y el de las ideas; de lo contrario cabe decir con Stallo, y con el cual daré por terminado el estudio rápido de los nuevos geómetras que: *las superficies pseudo-esféricas, por ejemplo, solo deben ser imaginadas por seres pseudo-esféricos, con órganos de los sentidos pseudo-esféricos, con inteligencia pseudo-esférica, en un espacio pseudo-esférico, y aun en el supuesto de que dichas condiciones de existencia puedan realizarse*.

Voy a hablar, por fin, de la última adquisición en el vasto campo de la ciencia Matemática; de la teoría de los cuaternions, inaugurada, podríamos decir, por la célebre obra de Bellavitis[7].

[7] *Essai d´aplication d´une nouvelle methode de Geometrie analitique.*

De todos los conceptos ideados hasta hoy, acaso éste, sea el más fecundo y más digno de aplauso, pues atiende a los dos elementos que hemos señalado en un principio, o sea: la situación, y medida de la cantidad: algoritmo sintético.

El cálculo de los cuaternions consiste en establecer dos especies de grandores reales. Uno de ellos constituido por las cantidades numéricas ordinarias; el otro, formado por grandores, que reúnen los dos atributos de longitud rectilínea y de dirección definida, formando un vector.

Tait, al desarrollar su bellísima obra, sigue los consejos de su maestro Hamilton, que fue el primero que dio a conocer la teoría de los cuaternions de una manera completa, inspirado quizá por la teoría de las equipolantes de Bellavitis.

Iniciado el movimiento, lo siguen otros célebres matemáticos, tales como Hankel, Romer, Keland, Hoüel, Wood, Scheffler, Cliford, Laisant, Lovell, Stringam etc.

Reservado, no obstante, estaba a Hamilton el descubrimiento del empleo de $\sqrt{-1}$ como a realidad geométrica, apta para representar una dirección cualquiera en el espacio, y al adquirir los resultados del cálculo una generalidad inmensa a la par que notable, el método de los cuaternions se hace independiente del empleo de ejes coordenados.

El gran principio de esta teoría consiste en que todas las rectas iguales, paralelas y dirigidas en el mismo sentido, son susceptibles de ser representadas por un mismo símbolo, que depende de tres elementos numéricos, conforme a la diferencia de las tres coordenadas respectivas de los puntos extremos de la recta dada, la recta así dirigida constituye un vector, el cual constituye el fundamento de la verdadera igualdad en esta nueva Matemática, cuyas notaciones varían desgraciadamente más de lo que debieran para la buena unificación de la ciencia.

La teoría mecánica del polígono de fuerzas o de velocidades para determinar la resultante, se une con la teoría de la suma, en esa geometría de situación, dando ello origen a la verdadera idea de cantidad negativa; de suerte que el signo *menos* aplicado a un vector, produce el efecto de invertir el sentido dentro de su dirección.

En esta célebre teoría no solo puede estudiarse la variable de Descartes, sino la cantidad infinitesimal al estilo de Newton; también pueden hallarse los fundamentos de la geometría superior en sus relaciones anarmónicas[8]; y en cuanto a sus aplicaciones, no cabe duda que son innumerables en la rectificación de curvas, cuadratura de superficies, cubatura de cuerpos y sobretodo en la hidrodinámica, teoría de la electricidad, cálculo del potencial, etc.

Hamilton, prueba que su método comprende como casos particulares del mismo, los procedimientos de Grassmann y los de Möbius en el cálculo bar y céntrico.

[8] *Elements of quaternions d´Hamilton*

Una de las cuestiones más importantes de esta teoría, consiste en hallar la relación de dos vectores que tienen el mismo origen; esta relación depende:

1º.- *Del cociente de las longitudes de los vectores.*
2º.- *Del ángulo que forma el plano de los dos vectores con los ejes coordenados, además de la cantidad angular necesaria para que un radio vector se aplique sobre el otro.*

A este cociente de dos vectores se llama cuaternion, porque depende de cuatro valores, o sea de una relación de dos rectas y de tres ángulos: Luisant llama a este cociente *biradial*. Muchos matemáticos expresan un cuaternion por un producto de dos factores, que toman respectivamente los nombres de tensor y vector[9];

Hamilton, lo designa por dos sumandos que prescindiendo del giro de nuestra lengua, podemos designarlos respectivamente por escalar y vector.[10]

Notables son además los trabajos realizados en los cuaternions recíprocos, en los conjugados, en el triángulo esférico correspondiente a la esfera unidad. Pero a todo esto supera el estudio de los versores cuadrantes, o sea de cuaternions cuyo tensor es la unidad, operándose la rotación de un ángulo recto en el plano del cuaternion o del versor cuadrante; bien como el del vector unidad, cuando juega el papel de factor, considerándose como un versor cuadrante cuyo plano es perpendicular al vector; conocimientos que forman la base de las ecuaciones de primer grado respecto la diferencial del cuaternion, y del operador de funciones referidas a la misma clase de cantidades; empero creo del caso dejar esos detalles, Sres. Académicos, para no fatigar por más tiempo vuestro ánimo en materia tan ardua y abstracta; dando aquí fin a la excursión científica.

I I I

Muy rápido ha sido el viaje que hemos realizado por el vasto campo de la Matemática moderna; los estrechos límites de una simple memoria, no han permitido decirlo todo, ni siquiera desarrollar como se debieran las teorías principales; empero no me cabe la menor duda que lo expuesto será suficiente para que hayáis descubierto en el desenvolvimiento de la ciencia que nos ocupa, la tendencia del espíritu humano hacia la Geometría, como si por este camino creyera el hombre ser más asequible el poder asirse a ese fantasma que persigue de continuo, y que siempre se le escapa de las manos.

[9] $q = TqUq = UqTq$
[10] $q = Sq + Vq$

Notorio es que los conocimientos matemáticos aumentan de día en día, generalizándose bajo las verdaderas bases del orden y la medida, a cuyo movimiento responde la notable teoría de los cuaternions; más la falta de conmutabilidad en los factores, aparte del cúmulo de signos caprichosamente adoptados en las diferentes obras, influye poderosamente para que dicha teoría no se acepte sin alguna desconfianza; y si bien grandes son ya sus aplicaciones en la física matemática, cabe sospechar que esa vía no sea la más expedita ni la más perfecta para la consecución del fin propuesto en la ciencia de la cantidad.

La ciencia que necesita muchas palabras o muchos signos para darla a conocer, prueba que, o lo que sostenemos no es verdad, o que no hemos dado con el verdadero camino que debe procurar su desarrollo.

En la Matemática existe un cómo ser misterioso, que impulsa al hombre a buscar el mayor grado de indeterminación en las cuestiones; pero desgraciadamente los medios con que cuenta no responden a sus ideales; la palabra discontinua, digámoslo así, debe servir para expresar la continuidad del pensamiento; los signos y algoritmos de suyo hartos vagos y pesados, no siempre siguen los altos vuelos del concepto, todo lo cual detiene la mano del que escribe, no pocas veces, obligándole a dejar la obra emprendida, como así resultó en la magnífica concepción de Lagrange respecto a la teoría de las variaciones.

El vértigo, no obstante, que se nota en los tiempos modernos, corrobora que se desea ardientemente recabar ese procedimiento único y verdadero que debe conducir con seguridad y sencillez, tanto alrededor de los puntos dó están situados los axiomas, cuanto los puntos más lejanos de los diferentes círculos que envuelven los primitivos.

Los trabajos de Alemania, Inglaterra y Francia, señalan las últimas conquistas de nuestros días, pero mientras el espíritu metafísico dormite, como así parece, no hay que esperar jamás verdaderos adelantamientos en la ciencia de la cantidad.

Al buscar la base solo en el mundo real o en el ideal es entorpecer el verdadero progreso de la misma. Los científicos que se basan en una sana filosofía, son los únicos que nos sirven de guía cuando deseamos sacar provechosos frutos de la Matemática: éstos son los que generalmente manifiestan la imperiosa necesidad que hay de aunar los dos mundos precitados, convencidos como están de que solo en la línea única de intersección, puedan germinar los fundamentos de las ciencias exactas: los que así no piensan, en verdad que es muy posible que el mundo docente les confunda con uno u otro de los dos tipos célebres tan hábilmente descritos por el manco de Lepanto.

Interesa pues, aproximarnos a esa línea media de investigación, fomentando nuestro estudio en principios razonables, y siempre dentro de las leyes naturales en que puede desarrollarse la inteligencia humana, estudiando en particular los algoritmos que mejor deben servir para adunar lo material de la forma con lo ideal del concepto de nuestras investigaciones científicas; y a este punto recordaremos que no falta quien animado más por su buen deseo que por una rigurosa lógica, mereció ocupar un lugar envidiable en la historia, proclamando principios que quizá alguno de nosotros rechazara cien mil veces con toda su alma.

En fin, Sres. Académicos, aparte del respeto y admiración que me merecen los verdaderos adelantos, fuerza es confesar, que las vaguedades y delirios que se notan entre varias escuelas dedicadas al estudio de la cantidad, nos prueba de una manera fehaciente, que dicha ciencia no ha adelantado lo que debiera desde los primitivos tiempos, pues aún estamos luchando en la resolución de ciertos principios, que deben constituir el zócalo de ese templo que pretendemos levantar al Señor, cual digno ofrecimiento a los beneficios que nos dispensa en dejarnos entrever la sublimidad de su sabiduría infinita al formar ese todo armónico y admirable de la Creación.

Barcelona, 17 de Abril de 1.886
Lauro Clariana Ricart