# Triángulo Cónico

# de igual parámetro

1887

En geometría analítica generalmente se determina la curva función en el supuesto de que la variable independiente siga solo la dirección del eje *x*; empero según las notables teorías de Cauchy, dichas curvas adquieren formas muy diferentes si a la variable se le atribuyen movimientos curvilíneos. Vamos a ocuparnos de las cónicas que tengan el mismo parámetro, y en el concepto de que la variable describa una circunferencia; es de ver que así alcanzaremos un triángulo curvilíneo en que la elipse, hipérbola y parábola vendrán representados respectivamente por cada uno de los lados de dicho triángulo

Sea la ecuación de la elipse:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

para que la variable describa una circunferencia de radio *a*, supondremos: $x=ae^{wi}$ .

Así pues, resulta:

$$a^2y^2+b^2a^2e^{2wi}=a^2b^2$$

de donde:

$$y=b\left(1-e^{2wi}\right)^{\frac{1}{2}}=b\left(1-\cos 2w-i\operatorname{sen}2w\right)^{\frac{1}{2}}=b\left(2\operatorname{sen}^2 w-i2\operatorname{sen}w\cos w\right)^{\frac{1}{2}}\quad (x)$$

Aplicando la fórmula general:

$$\sqrt{x-bi}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+b^2}-x}{2}}i$$

para la expresión que está dentro del paréntesis, se obtiene:

$$\sqrt{2\operatorname{sen}^2 w-i2\operatorname{sen}w\cos w}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\operatorname{sen}^2 w+\sqrt{4\operatorname{sen}^4 w+4\operatorname{sen}^2 w\cos^2 w}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{4\operatorname{sen}^4 w+4\operatorname{sen}^2 w\cos^2 w}-2\operatorname{sen}^2 w}{2}}i$$

cuyo valor simplificado y sustituido en (*x*) da:

$$y=b\left\{\sqrt{\operatorname{sen}w\left(\operatorname{sen}w+1\right)}-\sqrt{\operatorname{sen}w\left(1-\operatorname{sen}w\right)}\,i\right\}$$

Si tomamos la ecuación de la hipérbola, $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ siendo también $x=ae^{wi}$, resulta:

$$a^2y^2 - b^2a^2e^{2wi} = -a^2b^2$$

de donde:

$$y = b\left(e^{2wi} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = b\left(\cos 2w + i \operatorname{sen} 2w - \operatorname{sen}^2 w - \cos^2 w\right)^{\frac{1}{2}} = b\left(2i \operatorname{sen} w \cos w - 2\operatorname{sen}^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \quad (b)$$

Por un procedimiento análogo al anterior, se tiene:

$$\sqrt{-2\operatorname{sen}^2 w + 2i \operatorname{sen} w \cos w} =$$

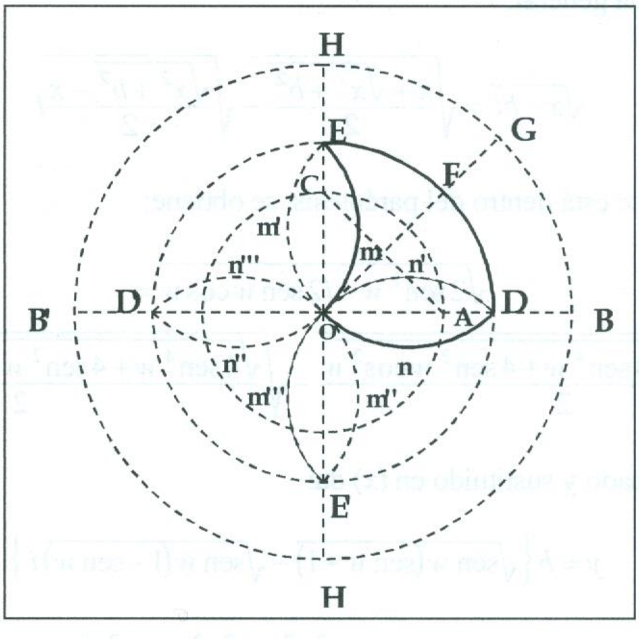
$$\sqrt{\frac{-2\operatorname{sen}^2 w + \sqrt{4\operatorname{sen}^4 w + 4\operatorname{sen}^2 w \cos^2 w}}{2}} + \sqrt{\frac{4\operatorname{sen}^4 w + 4\operatorname{sen}^2 w \cos^2 w + 2\operatorname{sen}^2 w}{2}}$$

lo que después de toda simplificación, (b) se reduce a:

$$y = b\left\{\sqrt{\operatorname{sen} w(1 - \operatorname{sen} w)} + \sqrt{\operatorname{sen} w(1 + \operatorname{sen} w)}\, i\right\}$$

Por fin si consideramos la ecuación de la parábola $y^2 = 2px$, siendo como siempre $x = ae^{wi}$, y además $p = \dfrac{b^2}{a}$, se halla: $y^2 = \dfrac{2b^2}{a}ae^{wi}$, de donde:

$$y = b\sqrt{2}e^{\frac{w}{2}i} = b\sqrt{2}\left(\cos\frac{w}{2} + i \operatorname{sen}\frac{w}{2}\right)$$




De suerte que las tres cónicas vienen representadas por:

$$y = b\left[\sqrt{\operatorname{sen} w(1+\operatorname{sen} w)} - \sqrt{\operatorname{sen} w(1-\operatorname{sen} w)}\,i\right] \ldots\ldots \text{Elipse} \qquad (A)$$

$$y = b\left[\sqrt{\operatorname{sen} w(1-\operatorname{sen} w)} + \sqrt{\operatorname{sen} w(1+\operatorname{sen} w)}\,i\right] \ldots\ldots \text{Hipérbola} \qquad (B)$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{b}\sqrt{2}\left(\cos\frac{w}{2}\,i\operatorname{sen}\frac{w}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Parábola} \qquad (C)$$

Estas tres fórmulas nos manifiestan que según los valores de *w* las tres cónicas se resuelven respectivamente en las tres curvas *OnD, OmE y DFE,* correspondientes a los tres lados del triángulo curvilíneo de la adjunta figura, siendo de advertir que los lados *OnD* y *OmE* son idénticos, salvo la posición: mientras que el tercer lado *DFE* es un arco de circunferencia de radio $b\sqrt{2}$ . Digno de estudio es la línea representante de la elipse e hipérbola.

Esta curva tiene una tangente paralela al eje, para cuando w = 30°. En efecto, para ello basta suponer en la expresión (A).

$$Dw\left(\sqrt{\operatorname{sen} w - \operatorname{sen}^2 w}\right) = 0$$

o sea

$$\cos w - 2\operatorname{sen} w \cos w = 0$$

de donde

$$1 - 2\operatorname{sen} w = 0$$

igualdad que se satisface siendo w = 30° conforme nos habíamos propuesto probar.

Además para estudiar mejor el modo de ser de la línea *OnD* correspondiente a (A) que es igual a la *OmE*, después de dar un cuarto de revolución, será conveniente referirla a ejes rectangulares, y para ello supondremos:

$$x_1 = \sqrt{\operatorname{sen} w(1+\operatorname{sen} w)}, \qquad y_1 = \sqrt{\operatorname{sen} w(1-\operatorname{sen} w)},$$

luego

$$x_1^2 = \operatorname{sen} w + \operatorname{sen}^2 w, \qquad y_1^2 = \operatorname{sen} w - \operatorname{sen}^2 w$$

de cuyas igualdades, se deduce respectivamente:

$$\operatorname{sen} w = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2} \qquad \operatorname{sen} w = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y_1^2}$$

igualando los segundos miembros y simplificando, se obtiene:

$$y_1^4 + 2y_1^2\left(x_1^2 + 1\right) + x_1^2\left(x_1^2 - 2\right) = 0$$

de donde

$$y_1 = \pm\sqrt{-\left(x_1^2+1\right)\pm\sqrt{4x_1^4+1}}$$

De estos cuatro valores solo dos son aceptables dentro de las coordenadas cartesianas, por ser los otros dos imaginarios; y como quiera que es posible atribuir a *x* valores negativos sin que altere la fórmula $y_1$ se tiene en totalidad cuatro ramas:

$$OnOD, n'D, O'n''D', On'''D'$$

tal como se expresa en la figura, que son las que saldrían directamente de la expresión (A), si atendiéramos a los dobles signos que pueden suponerse en los radicales. Si cambiamos luego $y_1$ por $x_1$ y $x_1$ por $y_1$ resultará una ecuación correspondiente a (B), dando un lazo de cuatro ramas de curva como en el caso anterior, después de haber descrito un cuarto de revolución.

De todo lo dicho se infiere que si *OA* = *b*, *OB* = *a* cuando *w* = O, se tendrá el punto común O para la elipse y la hipérbola, y *D* para la parábola, si *OD* = *AC*; cuando $w = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, el punto de la parábola estará en *F*, el correspondiente de la elipse en *D*, y el de la hipérbola en *E*, todo en el supuesto de ser *OD* = *OE* = *AC*; desde $w = \frac{\pi}{2}$ a $w = \pi$, el movimiento parabólico continuará describiendo la rama *FE*, que es un arco de circunferencia, como ya hemos manifestado, mientras que los movimientos elíptico e hiperbólico, puede suponerse que recorran las mismas curvas anteriores, bien que en sentido contrario, completándose así el triángulo cónico. Si continuáramos el movimiento de la variable según los valores de *w*, fácil es deducir las diferentes combinaciones de movimientos que podríamos suponer a la vista de la figura, tomando las fórmulas (A), (B), (C) en su mayor grado de generalidad, resultando en su virtud varios triángulos cónicos.

Barcelona 25 Febrero 1897
Lauro Clariana Ricart