Integración

de una

Ecuación Diferencial

1887

En la página 593, del t. II de la obra de cálculo diferencial e integral de M. Serret, encuéntrase la ecuación diferencial $4\frac{d^2 y}{d\ x^2} + y = -x^{-\frac{3}{2}};\ (1)$ y si bien dicho distinguido matemático cree inútil indicar el medio que sigue para su integración, no dudamos nosotros, atendida la importancia de la fórmula, que no ha de faltar quien nos agradezca el trabajo que nos tomamos en deducirla.

Para ello partiremos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_{n-1} y = X,$$

en el concepto de que los valores $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$, satisfagan a la expresión:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots P_{n-1} y = 0$$

todo lo cual permite escribir: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n y_n$

En el caso particular que nos ocupa, bastará suponer: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, considerando c_1 y c_2 como funciones de *x*; así, pues, si designamos dichas cantidades por Y_1 y Y_2, resulta: $y = y_1 Y_1 + y_2 Y_2$.

Al derivar, ahora, dos veces esta ecuación, puesto que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, se tiene:

$$y' = y'_1 Y_1 + y'_2 Y_2 + y_1 Y'_1 + y_2 Y'_2$$
$$y'' = y''_1 Y_1 + y''_2 Y_2 + y'_1 Y'_1 + y_2 Y'_2$$

supondremos luego:

$$y_1 Y'_1 + y_2 Y'_2 = 0 \qquad y'_1 Y'_1 + y'_2 Y''_2 = X$$

para que resultando

$$y' = y'_1 Y_1 + y'_2 Y_2$$
$$y'' = y''_1 Y_1 + y''_2 Y_2$$

podamos referirnos a la ecuación diferencial lineal: $y'' + P_1 y' + P_2 = 0$.

En virtud de las suposiciones de que acabamos de hacer mérito, cabe obtener los valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 Y'_1 + y_2 Y'_2 = 0 \\ y'_1 Y'_1 + y'_2 Y'_2 = X \end{array}\right\} \qquad Y'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y'_2 \\ X & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad Y'_2 = \frac{\begin{vmatrix} y'_1 & 0 \\ y_1 & X \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$Y_1 = \int -\frac{\begin{vmatrix} y'_2 & 0 \\ y_2 & X \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} dx, \quad (\alpha) \qquad Y_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} y'_1 & 0 \\ y_1 & X \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} dx, \quad (\beta)$$

Estas fórmulas generales nos permiten resolver la ecuación diferencial primera, que puede expresarse por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{4} y = -\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}$$

en el concepto de ser:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} \;\; y \;\; \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

soluciones de la ecuación particular

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{4} y = 0$$

de suerte que esto supone:

$$y_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} \qquad y_2 = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

de suerte que:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}$$

Aplicando las fórmulas (α) y (β) resulta:

$$Y_1 = -\int_0^x x^{-\frac{3}{2}} \cos\frac{x}{2} dx = 2x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2} + \int_0^x 2x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\frac{dx}{2} + c_1$$

$$Y_2 = \int_0^x x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \int_0^x 2x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2}\frac{dx}{2} + c_2$$

Empero el valor de y, viene dado por la fórmula $y = y_1 Y_1 + y_2 Y_2$; luego sustituyendo los valores hallados, se obtiene:

$$y = \left(2x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2} + \int_0^x 2x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\frac{dx}{2}\right)\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + c_1 \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} +$$

$$+\left(-2x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \int_0^x 2x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2}\frac{dx}{2}\right)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + c_2 \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

o bien:

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(c_1 + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2} dx\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\left(c_2 + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{x}{2} dx\right)$$

cuya expresión representa la integral general de (1), correspondiendo precisamente con el desarrollo de M. Serret.

Barcelona a 10 de Noviembre de 1887
Lauro Clariana Ricart