Estudios del factor que convierte en integrable una ecuación diferencial de primer orden

1888

La obra de cálculos diferencial e integral de Rubini es sin duda de las pocas elementales que trata con mayor extensión la teoría del factor, que transforma una ecuación diferencial de primer orden en cantidad integrable; no obstante, la falta de desarrollo en sus cálculos, así como algún error tipográfico que se nota en dicha obra, puede ser causa de desaliento para muchos lectores, razón por la cual creemos prestar un buen servicio en dar a conocer teoría tan importante con la mayor claridad posible
Dada una ecuación diferencial:

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

puede hallarse la integral: $u = C$, mediante cierto factor, siendo μ, función de x é y, y C una constante.

De la diferenciación de esta última igualdad resulta:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0 \qquad (2)$$

y para que esta ecuación corresponda con (1), se necesita que:

$$\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} = \frac{M}{N}, \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{dx} : M = \frac{du}{dy} : N$$

cuya relación podemos asignar por μ.

Así pues, $\frac{du}{dx} = \mu M$, $\frac{du}{dy} = \mu N$, de modo que sustituyendo estos valores en (2), se obtiene:

$$\mu(Mdx + Ndy) = du \qquad (3)$$

Esto nos demuestra la existencia de un factor que transforma la expresión (1) en una diferencial exacta.

No debemos considerar el valor μ, como el único factor existente, pues su número es indefinido. Para ello basta multiplicar ambos miembros: de (3) por una función cualquiera de u, tal como $f(u)$; luego:

$$\mu\, f(u)(Mdx + Ndy) = f(u)du;$$

de donde se deduce según es de ver por el segundo miembro, que el primero es integrable. Así, pues, conocidos los dos factores: μ *y* $\mu f(u)$, se tendrá la integral correspondiente, dividiendo, por ejemplo, el segundo valor por el primero, resultando: $f(u)=C$.

Para formarnos mejor idea, supondremos los ejemplos siguientes:

1º) $aydx+bxdy=0$, tomando por factor $\frac{1}{xy}$, se tiene: $al.x+bl.y=l.c$,

o sea: $x^a y^b = c$.

El factor general según lo que precede será:

$$\frac{1}{xy} f\left(x^a y^b\right)$$

2º) $x^m y^n (a'ydx+b'xdy)=0$. El factor de integrabilidad es: $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, resultando para el factor general:

$$\frac{f\left(x^{a'} y^{b'}\right)}{x^{m+1} y^{n+1}}$$

Vamos a determinar dicho factor, probada ya su existencia.

La condición de integrabilidad es: $Dy(\mu M)=Dx(\mu N)$
o sea:

$$\mu DyM + MDy\mu = \mu DxN + NDx\mu$$

de donde:

$$NDx\mu - MDy\mu = (DyM - DxN)\mu$$

Esta ecuación permite resolver μ, mediante el conocimiento de sus derivadas parciales, lo que complica sin duda el problema; empero en muchos casos dicho problema puede simplificarse. En efecto, si μ depende de una sola variable, por ejemplo de *x*, resulta:

$$Dy\mu = 0; \quad \text{luego} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{DyM - DxN}{N} dx;$$

de suerte que si μ es función solo de *x*, el coeficiente de *dx*, debe ser solo función de *x*, o también una constante; de modo que en general resulta:

$$\frac{1}{N}\left(DyM - DxN\right) = \varphi\left(x\right)$$

así, pues: $\mu = Ce^{\int \varphi(x)dx}$

De un modo análogo tendríamos:

$$\frac{1}{M}\left(DyN - DxM\right) = \psi\left(y\right), \qquad u = Ce^{\int \psi(y)dy}$$

Ejemplos:

1º. Sea:

$$\left(ahy^2 - 2gx\right)dx - 2aydy = 0\ ,$$

de donde:

$$M = ahy^2 - 2gx, \quad N = -2ay\,,$$

o bien:

$$DyM = 2ahy \quad DxN = 0\,;$$

luego:

$$\frac{DyM - DxN}{N} = -h. \quad \mu = e^{-\int hdx} = e^{-hx}$$

Así, pues, al multiplicar la ecuación primera por este factor, se tiene:

$$e^{-hx}\left(ahy^2 - 2gx\right)dx - 2aye^{-hx}dy = 0 \qquad (4)$$

Integrando el primer término resulta:

$$\int e^{-hx}\left(ahy^2 - 2gx\right)dx = ahy^2\int e^{-hx}dx - 2g\int e^{-hx}xdx = -ay^2e^{-hx} - 2g\left(-\frac{1}{h}e^{-hx}x + \frac{1}{h}\int e^{-hx}dx\right) =$$

$$= -ay^2e^{-hx} + \frac{2g}{h^2}e^{-hx}\left(hx+1\right).$$

El segundo término de (4), no siendo independiente de *x*, no debe integrarse, y en su virtud resulta:

$$ah^2y^2e^{-hx} = 2ge^{-hx}\left(hx+1\right) + C.$$

Veamos ahora como puede hallarse el factor sin necesidad de integrar. Admitamos la igualdad siguiente, evidente por sí misma:

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{2}\left[(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(Mx+Ny)dl.xy+(Mx-Ny)dl.\frac{x}{y}\right]$$

En el caso de ser $Mx - Ny = 0$, se tiene:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}dl.xy;$$

luego el factor de integrabilidad es $\frac{1}{Mx+Ny}$, y la integral de la propuesta será:

$$\frac{1}{2}l.xy = C,\quad \text{o también;}\quad xy = C'$$

Ahora si $Mx + Ny = 0$, el factor es $\frac{1}{Mx-Ny}$, y la integral: $x = C,y$.

Ejemplo.-
Integrar la ecuación: $(y^2-2xy)dx+(xy-2x^2)dy=0$.

Es de ver en este ejemplo que: $Mx - Ny = 0$, luego xy = C .

Ahora bien, cuando no es nula ninguna de las expresiones $Mx + Ny$, $Mx - Ny$, la última fórmula hallada nos da:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}d.l.xy+\frac{1}{2}\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}d.l\frac{x}{y},$$

En este concepto conviene que $\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}$ sea función de $\left(l.\frac{x}{y}\right)$, o en general de $\left(\frac{x}{y}\right)$, para lo cual basta que M y N sean funciones homogéneas del mismo grado.

Así, pues, la ecuación homogénea $Mdx + Ndy = 0$, se convierte en integrable, multiplicándola por $1:(Mx+Ny)$, con tal que $Mx + Ny$, no sea cero.

Sea la ecuación homogénea:

$$(2x+3y)dx+ydy=0; \quad (5)$$

el factor será: $1:(2x^2+3xy+y^2)$, y la expresión (5) se transforma en:

$$\frac{(2x+3y)dx}{2x^2+3xy+y^2}+\frac{ydy}{2x^2+3xy+y^2}=0 \quad (6)$$

Para obtener la integral basta atender a la transformación siguiente:

$$\int\frac{ydy}{2x^2+3xy+y^2}=-\int\frac{dy}{x+y}+2\int\frac{dy}{2x+y};$$

de donde:

$$l\frac{(2x+y)^2}{x+y}=lC. \quad \text{o bien} \quad (2x+y)^2=C(x+y)$$

No se integra el primer término de (6) por no haber término independiente de *y*. También podríamos considerar la nueva expresión:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}d.l.xy+\frac{1}{2}d.l\frac{x}{y},$$

en cuyo caso: $\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}$, debe ser función de *xy*; luego si: $M=yf_1(xy)$ y $N=xf_2(xy)$ se tiene:

$$yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dy=0$$

resultando para el factor integrable:

$$1:[f_1(xy)-f_2(xy)]xy$$

No será aceptable esta transformación cuando $f_1(xy)=f_2(xy)$; pero si esto resultara, se tendría $f_1(xy)(ydx+xdy)=0$, y el primer miembro sería una diferencial exacta.

Ejemplo.-
Integrar la ecuación: $(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$

El factor integrable en este caso es:

$$\frac{1}{[1+xy-(1-xy)]xy}=\frac{1}{2x^2y^2}$$

o simplemente: $\dfrac{1}{x^2 y^2}$.

Así pues:

$$\frac{1+xy}{x^2 y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$$

Integrando resulta:

$$\int \frac{1+xy}{x^2 y}dx=\frac{1}{y}\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{x}=-\frac{1}{xy}+lx$$

$$\int -\frac{dy}{y}=-ly;\quad \text{luego}\quad l\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}=c$$

Estudiada la cuestión en general, veamos lo que resulta, cuando el factor integrable satisface a ciertas condiciones particulares.

Supongamos en primer lugar que este factor sea una función homogénea de x é y, y de la forma:

$$\mu=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=x^n\varphi(\nu);\quad (\alpha)\qquad \text{siendo }\ \nu=\frac{y}{x}$$

De la igualdad hallada: $NDx\,\mu-MDy\,\mu=(DyM-DxN)\mu$, y de ($\alpha$) se deduce:

$$N\left[\ nx^{n-1}\varphi(v)-x^{n-2}y\varphi(v)\ \right]-Mx^{n-1}\varphi'(v)=\left(DyM-DxN\right)x^n\varphi(v)$$

o bien:

$$Nnx^{n-1}\varphi(v)-DyMx^n\varphi(v)+DxNx^n\varphi(v)=\varphi'(v)\left[Nyx^{n-2}+Mx^{n-1}\right]$$

de donde:

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=\frac{Nnx+\left(DxN-DyM\right)x^2}{Mx+Ny}$$

Luego si suponemos una función de v, que pueda satisfacer la condición:

$$\frac{Nnx+\left(DxN-DyM\right)x^2}{Mx+Ny}=f(\nu)=f\left(\frac{y}{x}\right),\quad (C)$$

se halla $\varphi(\nu)=e^{\int f(\nu)d\nu}$ y en su consecuencia: $\mu=x^n e^{\int f(\nu)d\nu}$

La condición (C), indica que M y N deben ser funciones de x é y, de modo que el primer miembro sea función homogénea y del grado cero.

Ejemplo.-

Sea

$$\left(x^2 - xy + y^2 - x + y\right)dx - xydy = 0$$

luego

$$M = x^2 - xy + y^2 - x + y, \qquad N = -xy$$

de donde:

$$\frac{Nnx + \left(DxN - DyM\right)x^2}{Mx + Ny} = \frac{x^3 - yx^2 - 2yx^2 - x^2 - x^2 ny}{x^3 - x^2 y - x^2 + yx} = \frac{\left(x^2 - x\right)x - \left(3 + n\right)yx^2}{\left(x^2 - x\right)\left(x - y\right)}$$

Para que esta expresión sea homogénea, es necesario que n = -3, de donde:

$$\frac{x}{x-y} = \frac{1}{1-\nu};$$

pero tenemos: $\mu = x^n e^{\int f(\nu)d\nu}$, luego resulta:

$$\mu = x^{-3} e^{l\frac{1}{1-\nu}} = x^{-3}\frac{1}{1-\nu} = \frac{1}{x^2(x-y)}$$

Multiplicando la ecuación primera por este factor, se tiene:

$$\frac{x^2 - xy + y^2 - x + y}{x^2(x-y)}dx - \frac{xydy}{x^2(x-y)} = 0$$

La condición $DyM = DxN$, se cumple, y como quiera que esto baste para proceder a la integración, tendremos:

$$\int \frac{x^2 - xy + y^2 - x + y}{x^2(x-y)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{y^2}{x^2(x-y)}dx = lx + \frac{1}{x} + \int \frac{y^2 dx}{x^2(x-y)}$$

Esta última integral puede obtenerse como a continuación se expresa:

$$\frac{y^2}{x^2(x-y)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-y} = \frac{A(x-y) + Bx(x-y) + Cx^2}{x^2(x-y)}$$

de donde:

$$B + C = 0, \quad A - By = 0, \quad -Ay = y^2.$$

o bien:

$$A = -y, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Así pues:

$$\int \frac{y^2 dx}{x^2(x-y)} = -y\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-y};$$

luego:

$$\int \frac{x^2 + xy + y^2 - x + y}{x^2(x-y)} dx = lx + \frac{1}{x} + \frac{y}{x} - lx + l(x-y) = \frac{1+y}{x} + l(x-y);$$

la integral pedida será por fin:

$$\frac{1+y}{x} + l(x-y) = C.$$

Considerando, ahora, que el factor μ sea función del producto xy; al suponer $xy = v$, y por consiguiente $\mu = \varphi(v)$ la condición de integrabilidad será:

$$\varphi(\nu)DyM + M\varphi'(\nu)\nu'y = \varphi(\nu)DxN + N\varphi'(\nu)\nu'x; ¡$$

o bien:

$$(M\nu'y - N\nu'x)\varphi'(\nu) = \varphi(\nu)(DxN - DyM);$$

de donde:

$$(\gamma)\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{DxN - DyM}{Mx - Ny}$$

Siendo el segundo miembro de (γ) una función de $xy = v$, resulta:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = f(\nu) \text{ e integrando } \mu = e^{\int f(\nu)d\nu}$$

Ejemplo:

Sea:

$$(x + y + x^3y^2 + x^2y^3)dx + (x + y + x^3y^2 - x^2y^3)dy = 0$$

Tomando la expresión hallada:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{DxN - DyM}{Mx - Ny}$$

resulta:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{-2xy(y^2 + x^2)}{x^2 + y^2 + x^2y^2(x^2 + y^2)} = -\frac{2xy}{1 + x^2y^2} = -\frac{2\nu}{1+\nu^2}$$

de donde:

$$\int f(\nu)d\nu = -\int \frac{2\nu d\nu}{1+\nu^2} = -l\left(1+\nu^2\right);$$

y por consiguiente:

$$e^{\int f(\nu)d\nu} = \frac{1}{1+\nu^2} = \frac{1}{1+x^2y^2}$$

Luego el factor integrable es:

$$\mu = \frac{1}{1+x^2y^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial dada por este valor resulta:

$$\frac{\left(x+y+x^3y^2+x^2y^3\right)}{1+x^2y^2}dx + \frac{\left(x-y+x^3y^2-x^2y^3\right)}{1+x^2y^2}dy = 0;$$

o bien: $(x+y)dx+(x-y)dy=0$. Integrando según los principios generales, se obtiene: $x^2+2yx-y^2=C$.

El problema precedente es siempre soluble si $M = yf_1(xy)$ y $N = yN = xf_2(xy)$ porque en tal caso se verifica el segundo miembro de:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{DxN-DyM}{Mx-Ny}$$

La ecuación hallada $(Mv'y-Nv'x)\varphi(v)=(DxN-DyM)\varphi(\nu)$, puede servir aun para determinar otra forma referente al factor integrable, esto es, cuando φ(v) se refiere a una forma de v diferente de la anterior, por ejemplo, siendo, $v=x^2+y^2$, en cuyo caso $v'x=2x$, $v'y=2y$. Así pues:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{1}{2}\frac{DxN-DyM}{My-Nx} \quad (d).$$

Si este segundo miembro es función de x^2+y^2, se tiene:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = f(v) \quad \text{o bien} \quad \varphi(v)=\mu=e^{\int f(v)dv}$$

Ejemplo.-
Sea:

$$\left(x^4 - 2x^3 y + x^2 y^2 - 2xy^3\right)dx + \left(y^4 - x^4\right)dy = 0$$

La fórmula (d) da:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{1}{2}\,\frac{-4x^3 - \left(-2x^3 + 2x^2 y - 6xy^2\right)}{x^4 y - 2x^3 y^2 + x^2 y^3 - 2xy^4 - y^4 x + x^5} = \frac{-x^3 - x^2 y + 3xy^2}{x^5 + x^4 y - 2x^3 y^2 + x^2 y^3 - 3y^4 x} =$$

$$= -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{v};$$

de donde: $\varphi(v) = \mu = e^{-lv} = \frac{1}{v} = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor, se obtiene:

$$\frac{x^4 - 2x^3 y + x^2 y^2 - 2xy^3}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y^4 - x^4}{x^2 + y^2}\,dy = 0$$

luego:

$$\left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0$$

Integrando, por fin, resulta:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 y + \frac{y^3}{3} = C, \quad \text{o bien} \quad x^3 - 3x^2 y + y^3 = C.$$

Aun caben otras hipótesis acerca de *v*, por ejemplo,

$$v = x^3 + y, \quad \text{siendo} \quad v'x = 3x^2, \quad v'y = 1,$$

resultando:

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = \frac{DxN - DyM}{M - 3Nx^2};$$

luego para que μ, sea función de *v*, o sea de $x^3 + y$, debe serlo el segundo miembro de la última igualdad.

Pasemos por último, a las consideraciones de Euler, para que una ecuación diferencial resulte integrable mediante un factor dado.

Sea este de la forma $\dfrac{y^m}{(1+Sy)^n}$, en el supuesto de ser *S*, función de *x*.

Si consideramos, ahora, la ecuación diferencial $Pydx+(Qy+R)dy=0$ siendo *P*, *Q*, *R* funciones de *x*; al multiplicar esta última ecuación por el factor dado, resulta:

$$\frac{Py^{m+1}}{(1+Sy)^n}dx+\left[\frac{Qy^{m+1}+Ry^m}{(1+Sy)^n}\right]dy=0$$

Atendidas las condiciones generales de integrabilidad: *DyM* = *DxN*, aplicadas al caso particular que nos ocupa da:

$$\frac{(1+Sy)^n(m+1)y^mP-Py^{m+1}n(1+S)^{n-1}S}{(1+Sy)^{2n}}=$$
$$=\frac{(1+Sy)^n\left[DxQy^{m+1}+DxRy^m\right]-\left(Qy^{m+1}+Ry^m\right)n(1+Sy)^{n-1}DxSy}{(1+Sy)^{2n}}$$

de cuya igualdad, se deducen los desarrollos siguientes:

$$(m+1)y^mP-Py^{m+1}\frac{nS}{1+Sy}=\frac{DxQy^{m+1}+DxRy^{n-1}-\left(Qy^{m+1}+Ry^m\right)nyDxS}{1+Sy};$$

$$(m+1)y^mP(1+Sy)-Py^{m+1}nS=\left(DxQy^{m+1}+DxRy^m\right)(1+Sy)-nyDxS\left(Qy^{m+1}+Ry^m\right);$$

$$(m+1)Py^m+(m+1)PSy^{m+1}-PnSy^{m+1}=DxQy^{m+1}+DxRy^m+DxQSy^{m+2}+$$
$$+DxRy^{m+1}S-ny^{m+2}QDxS-ny^{m+1}RDxS;$$

$$((m+1)P-DxR)y^m+[(m-n+1)PS-DxQ-SDxR+nRDxS\,]y^{m+1}+(nQDxS-SDxQ\,)y^{m+2}=0$$

En esta igualdad caben las hipótesis siguientes:

$$(m+1)P-DxR=0,\qquad nQDxS-SDxQ=0;$$
$$(m-n+1)PS-DxQ-SDxR+nRDxS=0;\quad (\mathrm{A})$$

de donde:

$$\frac{DxQ}{Q}=n\frac{DxS}{S},\quad \text{o bien,}\quad lQ=l.S^n+l.c,\quad Q=cS^n;$$

además de: $P = \frac{DxR}{m+1}$

Así, pues, sustituyendo los valores hallados en (*A*), se deduce:

$$(m-n+1)\frac{DxR}{m+1}S - ncS^{n-1}dS - SDxR + nRDxS = 0;$$

de cuya igualdad resulta después de algunas reducciones:

$$dR - \frac{(m+1)RdS}{S} + c(m+1)S^{n-2}dS = 0,$$

o bien:

$$\frac{dR}{S^{m+1}} - \frac{(m+1)RdS}{S^{m+2}} + c(m+1)S^{n-m-3}dS = 0 \quad (B)$$

Atendiendo, ahora, al desarrollo:

$$d\,\frac{R}{S^{m+1}} = \frac{S^{m+1}R - R(m+1)S^{m}dS}{S^{m+2}} = \frac{dR}{S^{m+1}} - \frac{R(m+1)dS}{S^{m+2}},$$

se deduce, integrando (B):

$$\frac{R}{S^{m+1}} + \frac{c(m+1)S^{n-m-2}}{n-m-2} = b.$$

suponiendo luego, $c = (m - n + 2)\,a$, se obtiene:

$$R = bS^{m+1} + (m+1)aS^{n-1};$$
$$Q = cS^{n} = (m-n+2)aS^{n};$$

$$P = \frac{DxR}{m+1} = \frac{b(m+1)S^{m}\,\frac{dS}{dx} + (m+1)(n-1)aS^{n-2}\,\frac{dS}{dx}}{m+1} = \left(bS^{m} + (n-1)aS^{n-2}\right)\frac{dS}{dx}.$$

Sustituyendo, por fin, los valores hallados en la ecuación diferencial primera:

$$Pydx + (Qy + R)dy = 0,$$

se deduce:

$$\left(bS^{m} + (n-1)aS^{n-2}\right)\frac{dS}{dx}\,ydx + \left((m-n+2)aS^{n}y + bS^{m+1} + (m+1)aS^{n-1}\right)dy = 0$$

o bien:

$$\left(byS^{m}+(n-1)ayS^{n-2}\right)dS+\left[(m-n+2)aS^{n}y+bS^{m+1}+(m+1)aS^{n-1}\right]dy=0.$$

Si S es una función cualquiera de x, esta ecuación diferencial será integrable, mediante el factor supuesto.

Barcelona a 25 de febrero de 1888
Lauro Clariana Ricart