L'esprit des Mathématiques dans les temps modernes

1888

La science, quoiqu'elle soit basée sur des principes solides et incontestables, peut se manifester sous des formes diverses et compliquées qui, semblables à des vagues qui se croisent et s'entremêlent, couvrent et enveloppent certains points où sont renfermés ses axiomes et ses postulats.

Cette observation s'applique aux mathématiques plus qu'à toute autre science: ses formes sont si variées et si complexes qu'il est des moments où elles vont jusqu'à rebuter ceux-là même qui se consacrent à leur étude, car il semble vraiment qu'un vertige inexplicable pousse les mathématiciens modernes à inventer des méthodes nouvelles ainsi que des algorithmes particuliers et capricieux.

Semblable à un fleuve impétueux qui, sortant de son lit, envahit les campagnes environnantes, cette science, jaillissant de sa source, va se répandant par toute la surface du globe; et, en même temps que des hommes de génie en font l'objet de leurs constantes occupations, elle forme le patrimoine de certains novateurs qui, poussés par leur orgueil et leur faux savoir, enfantent à foison des méthodes et des systèmes, quelquefois nuisibles et même ridicules, d'autres fois sans la moindre importance, mais ne pouvant qu'évoluer autour de l'écorce de cet arbre touffu et gigantesque du savoir humain, sans jamais participer à sa sève ni pénétrer jusqu'à la moelle.

Il est donc urgent de porter ses investigations dans ce dédale de chemins qui s'offrent à la vue de l'homme de science, pour en régler la direction et empêcher en quelque sorte que l'on se mette en marche par des voies où la vérité pourrait courir le danger de se perdre.

I

Au moment d'entreprendre ce travail, permettez-nous de descendre aux notions les plus fondamentales de la science des quantités, en nous aidant des doctrines des mathématiciens les plus renommés, afin qu'elles servent de poids et de mesure pour apprécier exactement la valeur des nombreuses et diverses écoles de nos temps modernes. Commençons donc par la définition la plus générale que l'on puisse faire des mathématiques, si on les considère comme une série de connaissances scientifiques relatives à la quantité, étroitement unies entre elles, et dont les notions s'appuient sur des vérités spéciales, que la raison est capable de découvrir sans avoir besoin de recourir au monde extérieur, mais que celui-ci peut servir à confirmer dans les limites permises par l'expérimentation. On a dit que la vérification empirique d'une loi mathématique peut être rigoureuse ou approchée: en effet, si l'on cherche à prouver que les médianes d'un triangle se coupent en un même point, on fait une vérification empirique approchée; si l'on se propose d'affirmer le principe d'Euler concernant les polyèdres réguliers, la vérification empirique devient complètement exacte.

On trouve, en outre, dans l'exposition de la doctrine des mathématiques, des idées fondamentales qui en forment la partie philosophique: telles sont, par exemple, les notions de quantités négatives, imaginaires et infinitésimales. Nier l'existence de ces quantités, parce que nous ne pouvons pas les faire descendre des hauteurs où elles résident, ou parce qu'il ne nous est pas donné de les assujettir à l'*experimentum crucis* de Bacon, cela équivaut à refuser de croire à la beauté des arts parce qu'elle échappe à notre sens du toucher.

Le principal objectif de cette partie des mathématiques est de distinguer la relation et la dépendance rationnelle de certaines vérités abstraites, afin que de ce point élevé l'esprit contemple le tableau parfait de la science, et puisse, par suite, après avoir admis tel ou tel enchaînement de propositions, décider de *l'esquème* nécessaire à la construction de la science dont il s'agit, sans cesser d'obéir aux conditions les plus strictes de rapport et de connexion.

Il ne faut pas, d'ailleurs, confondre la philosophie des mathématiques avec les sciences dites exactes: celles-ci ont généralement pour objet d'établir logiquement les démonstrations dont l'expérience a déjà prouvé l'exactitude, définition suffisante, comme on le voit, pour donner une idée de l'erreur grossière que commet Vico quand il dit: «*Nous démontrons les vérités géométriques, parce que nous les faisons*».

Le double point de vue sous lequel nous avons envisagé la science des mathématiques nous met à l'abri de semblables reproches. Dans cette science, il importe d'avoir égard au mode d'être des choses, indépendamment de ce que nous pourrions appeler *l'organum* qui se forme par antériorité à l'aide de nos facultés intellectuelles. Ce caractère particulier doit lui valoir la meilleure place parmi toutes les autres sciences; car, s'il est vrai que, dans les sciences physiques et naturelles, nous généralisons au moyen de l'induction les résultats de l'expérience, si nous y acquérons à force de recherches des connaissances certaines, cette certitude n'y apparaît jamais aussi éclatante que dans un simple théorème de géométrie. Néanmoins, malgré la diversité de tous ces éléments dont se composent les mathématiques, leur tendance à l'unification se fait chaque jour plus manifeste, ainsi que nous le prouvent les admirables conceptions de Descartes et de Leibnitz, si brillamment exposées par M. Poinsot dans ses réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. D'après ce profond mathématicien, l'idée d'ordre, à laquelle se subordonnent les idées spécifiques de situation, de configuration, de forme, de combinaison, doit être la prédominante, mais être suivie de celle de grandeur, qui implique celles de quantité, de proportion et de mesure, de telle sorte que les mathématiques, considérées de la manière la plus générale, peuvent être définies comme étant la science qui a pour objet l'ordre et la mesure.

Nous sommes, par conséquent, autorisés à dire que l'ordre et la mesure forment les catégories fondamentales des mathématiques, et, si nous voulions pousser un peu plus loin notre argumentation, nous montrerions cette dualité se réduisant à l'unité, suivant l'opinion exprimée par Leibnitz, quand il énonce que l'ordre qui existe entre les phénomènes simultanés réside dans l'espace, de même que celui qui existe entre les phénomènes successifs réside dans le temps; de telle façon que l'on doit considérer toute spéculation mathématique comme se ramenant à cette unique idée d'ordre avec l'espace et le temps pour facteurs: unité systématique dans sa genèse même.

Pour plus de clarté, nous citerons les commentaires suivants extraits du livre précité de M. Poinsot:

«*Si vous considérez l'algèbre, vous y voyez deux parties très distinctes. Et d'abord l'algèbre ordinaire, qu'on peut très bien nommer l'arithmétique universelle. Cette algèbre, en effet, n'est autre chose qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des nombres quelconques, et, par, conséquent, des opérations actuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'indiquer par des signes; de manière que, dans cette première spéculation de l'esprit, on songe moins à obtenir le résultat de ces opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir ainsi des formules générales pour la solution de tous les problèmes du même genre.*
Mais il y a une algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles et sans aucune idée de valeur ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires, et tout l'art des transformations algébriques; et c'est même cette seule partie élevée de la science qui mérite, à proprement parler, le nom d'algèbre.»

Ces préliminaires ainsi posés, nous allons essayer d'en déduire le corps de la doctrine à laquelle doivent être assujetties les sciences mathématiques, pour pouvoir se développer sur des bases solides et durables. A cet effet, nous supposerons:

1º.- Que les grandeurs représentées par les lettres ou les symboles algébriques sont susceptibles de croître ou de décroître d'une manière continue.
2º.-Que les signes + et - sont considérés comme résultant de deux opérations ou combinaisons parfaitement symétriques

Mais, pour faire usage de ces conventions, il est indispensable que les quantités représentées par les symboles algébriques et par les expressions des signes d'opérations, entrent non seulement dans la catégorie des grandeurs continues à unité arbitraire, mais encore dans la classe des grandeurs continues à origine également arbitraire.

Dans ces conditions, la différence des valeurs réelles, positives et négatives, ne doit pas être attribuée à l'algèbre, car elle tient plutôt son fondement dans les grandeurs de l'espèce dite à origine arbitraire. Il n'en est pas de même en ce qui concerne les quantités imaginaires; la conception essentielle de cette classe de valeurs est purement du domaine de l'algèbre, en tant que cette algèbre procède de la théorie abstraite des combinaisons et de l'ordre, et que l'ordre et les combinaisons se règlent sur un diapason normal, formé d'après les tons et notes qui se réfèrent à l'espace et au temps.

Après ces brèves données scientifiques sur les bases qui sont le plus susceptibles de favoriser les progrès des mathématiques dans leur partie la plus fondamentale, je prendrai la liberté de vous ouvrir le grand livre de l'histoire et d'en parcourir avec vous les principales pages, pour déduire de cette étude toutes les conclusions qui seront consignées dans ce mémoire.

Du temps des philosophes grecs, on voit se produire quelques essais d'études mathématiques, mais avec une certaine tendance à la géométrie. Force nous est, cependant, d'avouer qu'à cette époque on réalisa des travaux qui ont puissamment contribué au développement des mathématiques modernes. En effet, par le moyen des figures à trois dimensions, on trouve déjà des corollaires simples pour la géométrie plane; Pappus, partant d'une surface hélicoïde et s'aidant de certaines projections de courbes gauches, décrit la spirale d'Archimède et la quadratrice de Dinostrate. Archimède établit les fondements du calcul infinitésimal, qui devait plus tard fournir de si féconds résultats entre les mains de Newton, de Leibnitz et d'Euler; Appollonius asseoit les principes de la géométrie de position dans sa partie métrique, et la précieuse idée de Descartes relativement aux rapports et proportions se laisse déjà pressentir sur les lèvres d'Aristote. C'est avec ces principales découvertes que se ferme la première période des mathématiques. Il s'ouvre alors une parenthèse de quelques siècles, et peut-être cette science aurait-elle été perdue pour nous si les Arabes n'avaient pris soin de transmettre à l'Occident les connaissances de l'antiquité. Néanmoins. tout au commencement de XV siècle, il s'opère en Europe une grande révolution, et après la seconde période, que nous pourrions appeler celle des simples traducteurs des œuvres grecques et latines, viennent la troisième et la quatrième qui, conjointement avec celle du siècle actuel, forment ce que nous désignerons sous le nom de période des mathématiques modernes.

Dès la naissance de la troisième période, la tendance à la généralisation, qui s'est déjà fait sentir, va toujours en augmentant: Viète, Fermat et Descartes, se plaçant à des points de vue nouveaux, provoquent sur le terrain de la quantité une grande révolution, avec laquelle se ferme cette troisième période. L'algèbre et la géométrie font tout d'abord de sérieux progrès en Italie, où, parmi leurs adeptes les plus enthousiastes, se font remarquer des hommes comme Scipion, Ferrei, Tartaglia, Cardan, Bombelli, dont les travaux aboutissent à la résolution des équations des troisième et quatrième degrés; en France, Viète perfectionne plusieurs branches particulières de l'algèbre, en enseignant à résoudre graphiquement l'équation du troisième degré, dont dépend la solution des fameux problèmes de l'antiquité. Descartes, de son côté, applique l'algèbre à la géométrie et forme la célèbre géométrie analytique. Enfin Pascal et Fermat constituent les sentinelles avancées des derniers progrès qui aient été réalisés dans les théories de la géométrie transcendante et de la géométrie analytique. Si nous passons en Angleterre, nous voyons le baron Néper qui simplifie les calculs au moyen de la théorie des logarithmes, et l'illustre Harriot qui donne les principes fondamentaux de la formation des équations; puis apparaissent bientôt, dans ce même pays, de nombreux savants qui se consacrent à l'étude des séries et en font l'objet de leur prédilection.

La quatrième période arrive et amène avec elle une nouvelle révolution, grâce à la découverte de la quantité infinitésimale, découverte dont on ne saura jamais apprécier assez l'immense portée et dont Newton et Leibnitz se disputent la paternité. Nous devons faire observer que dans les deux révolutions précitées, qui correspondent aux deux dernières périodes. il existe un point commun: la variabilité de la quantité, quoique le *quantum* soit conservé dans la troisième et ne le soit pas dans la quatrième. Cela posé, comme le grand secret des mathématiques consiste à laisser la quantité à son plus haut degré d'indétermination, il n'y a pas de doute que les travaux de Leibnitz et de Newton devaient être plus féconds que tous ceux de leurs prédécesseurs.

C'est ainsi que l'on parvient à résoudre des problèmes compliqués qui avaient résisté jusque-là à la géométrie ancienne et même à l'analyse de Descartes. Les célèbres Bernoulli (Jacques et Jean), partisans très décidés de l'école de Leibnitz, s'occupent de solutions relatives aux isopérimètres et tracent ainsi la voie à la méthode des variations.

En réalité, si nous cherchons l'esprit scientifique qui domine à cette époque, nous découvririons qu'il existe comme une espèce de tendance vers la géométrie, malgré son union plus ou moins étroite avec l'analyse.

En effet, Descartes indique déjà, comme un des problèmes les plus dignes d'attention, la détermination de la tangente en un point d'une courbe, et cette question excite l'intérêt de nombreux mathématiciens, notamment celui de Fermat et de Roberval.

Pascal et Desargues éprouvent également un certain penchant pour l'étude de la géométrie et forment le point d'union entre la géométrie ancienne et la géométrie moderne, c'est-à-dire entre Appollonius et Poncelet.

Bientôt après vient Maclaurin, avec l'attrayante question des ellipsoïdes, surfaces homofocales, et ces nouveautés apportent de notables transformations dans l'analyse et dans la résolution d'un problème qui avait fait pendant bien longtemps le désespoir des mathématiciens. Enfin, d'Alembert continue ce mouvement géométrique. Plus tard apparaissent Cauchy, Poinsot, Poncelet et Dupin, à qui sont dues les dernières conquêtes gagnées dans cette précieuse branche du savoir humain.

Par ce rapide aperçu historique se trouvent fixés les différents points de la science des mathématiques durant ses quatre périodes, c'est-à-dire depuis son origine, si l'on peut s'exprimer ainsi, jusqu'au commencement du siècle actuel; de sorte que l'on pourrait rigoureusement considérer cette esquisse comme suffisante pour démontrer amplement que l'esprit des mathématiques dans les temps modernes est géométrique. Cette tendance s'accentue encore davantage dans notre siècle, qui ouvre ses portes avec les œuvres de Monge et de Carnot, dont l'importance est capitale, car c'est à ces deux savants que l'on doit respectivement les progrès considérables accomplis dans la géométrie infinitésimale et dans la géométrie descriptive, qui a fini plus tard par acquérir des proportions colossales entre les mains de Charles et de Poncelet.

L'Angleterre ne le cède en rien sous le rapport des tendances géométriques, car Hamilton donne le jour à son célèbre théorème des quaternions, un de ceux qui sont aujourd'hui le plus en faveur parmi les savants. L'Allemagne cherche aussi à donner de l'extension à la géométrie sur des bases complètement distinctes des principes d'Euclide.

Qu'il nous soit donc permis de tracer à grands traits les faits principaux de ce siècle qui nous a vu naître, de ce siècle dont le mouvement scientifique semble dépasser les limites du possible, tout en couvrant de nuages le ciel splendide de la vérité, effet déplorable du sans doute aux idées philosophiques que nous a transmises en héritage le siècle passé.

I I

Il semblerait, en vérité, que les hommes ont une prédilection marquée pour tout ce que leur enseignent les sens ou l'expérience, sans doute parce que ces connaissances sont par elles-mêmes plus faciles à acquérir. C'est là peut-être ce qui explique la difficulté constante qu'a présentée la résolution des équations. Après les travaux de Viete et de Harriot, créateurs de l'algèbre moderne dans la deuxième moitié du XVI siècle et dans les commencements du XVII, il n'avait été réalisé que très peu de progrès dans ce vaste champ de l'analyse, si l'on ne compte pas comme tels les procédés de Descartes, Newton, Lagrange, Fourrier, Sturm et Graffe, qui en ont modifié ou réduit le mécanisme, mais sans sortir des nombres. Cela nous est corroboré par Lagrange lui-même, quand Lacroix met dans sa bouche les paroles suivants:

«*Du moment que l'on résout d'une manière générale une équation du 5º degré ou tout autre d'un degré supérieur, on peut assurer que l'on obtient des formules algébriques précieuses, mais fort peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations, puisque nous n'en sommes pas mois obligés de recourir à des méthodes arithmétiques*»

L'illustre mathématicien Merino a écrit, dans la préface d'une traduction de l’œuvre d'Enke, un paragraphe admirable, qui nous démontre aussi d'une manière *graphique* combien sont insignifiants les progrès réalisés dans cette branche de l'analyse. Voici ce passage:

«*Le problème attaqué à la fois sur cent points différents, creusé et miné durant des siècles, résiste encore aux énergiques poussées de la perspicacité et de la curiosité d'une multitude de savants occupés sans paix ni trêve à s'en rendre maîtres et d'autant plus acharnés à cette œuvre qu'ils rencontrent une résistance plus opiniâtre. Il y a des moments où il semble que cette masse énorme vacille et soit prête à crouler et il est même des endroits où l'on dirait qu'elle est menacée d'une ruine immédiate et complète; mais malgré tout elle continue, inconsciente, à peser sur le pauvre entendement humain, au point de l'écraser sous le poids irrésistible des mystères et des difficultés qu'il renferme.*»

Il est impossible de présenter d'une manière plus frappante les efforts considérables que doit faire l'intelligence humaine pour obtenir quelque progrès dans l'analyse pure. Cependant, si nous considérons l'analyse infinitésimale, nous verrons avec surprise qu'elle prend un grand essor entre les mains de Cauchy, grâce à l'association étroite qu'il établit entre elle et la géométrie, pour atteindre ensuite aux conceptions les plus élevées qui existent de nos jours sur les fonctions en général.

C'est pour ce motif que nous nous attachons plus particulièrement aux méthodes géométriques, attendu qu'elles expriment réellement le caractère du véritable esprit mathématique qui domine dans l'époque où nous vivons. Nous commencerons donc l'étude critique des œuvres de notre siècle par celles de Monge et de Carnot, qui en sont les plus notables.

Dans les investigations de Monge on remarque deux directions très distinctes: 1º l'application du calcul différentiel et intégral aux problèmes transcendants de géométrie; 2º le développement de sa géométrie descriptive, qui a pour objet de régler et systématiser sur des bases scientifiques les connaissances artistiques de stéréotomie, les ombres et la perspective, suivant des relations constantes de position. La première partie, c'est-à-dire l'analyse appliquée, repose sur l'emploi des coordonnées de Descartes. Monge, en étudiant les grandes questions de quadrature des surfaces, trouve l'occasion de faire entrer les plus belles conceptions de la géométrie transcendante dans les théories les plus ardues du calcul intégral.

Un grand nombre de mathématiciens célèbres suivent le mouvement de Monge: Meusnier réduit les rayons de courbure de section oblique à ceux de section normale; Lancret étudie les lignes gauches dans leur double aspect de courbure, puis les droites polaires, les surfaces polaires, la sphère osculatrice et d'autres branches qui sont en rapport avec les précédentes; Dupin et Malus travaillent aussi dans le même sens; O. Rodriguez trouve moyen de déduire les lignes et rayons de courbure d'une surface en fonction des cosinus des angles que forme la normale avec les axes coordonnés et arrive aussi à simplifier les études de Monge; Babiller trouve une courbe remarquable que l'on désigne sous le nom de polaire d'un point; Binet travaille sur les courbes dont la développée est la courbe elle-même.

Cependant, si ces premiers travaux sont dignes d'attention, combien le sont davantage ceux qui ont été exécutés par les savants illustres: Joachimistal, Serret, Picard et Ossian Bonnet: ce dernier parvient à substituer les coordonnées cartésiennes à d'autres coordonnées variables, qui se trouvent liées un peu plus à la forme de la surface donnée. Cette conception fut excessivement féconde, car elle contribua sans nul doute à l'investigation des surfaces isothermes, d'où sortirent les coordonnées de Lame qui, par le moyen de trois surfaces du deuxième degré homofocales, se transformèrent d'abord en coordonnées elliptiques, puis bientôt en polaires, pour se réduire enfin à trois surfaces planes, qui sont les coordonnées de Monge.

Laissons maintenant cette première partie pour entrer dans la seconde, c'est-à-dire dans la géométrie descriptive, qui certainement rendra impérissable dans l'histoire des mathématiques le nom de celui qui aura la gloire de la fonder.

Dans la géométrie élémentaire il y a, faut-il le dire, quelque chose de vague qui n'existe pas dans la géométrie descriptive: c'est là l'avantage de la méthode des projections. Il n'est pas douteux qu'il existe une propension à pousser cette géométrie vers le transcendant, afin de lui donner une forme scientifique et d'éviter que l'on puisse en dire ce qu'en a dit Charles dans certaine circonstance. Des travaux considérables ont été effectués en Allemagne et en Belgique dans le but de donner aux principes de Monge assez d'extension pour former un corps de doctrine complet. Il en résulterait que la projection conique, fondement de la perspective, doit constituer la base de cette science, synthétisée dans la gerbe qui est une des formes géométriques fondamentales correspondant à celles de la deuxième espèce, ou doublement infinies, comme on a coutume de le dire.

Les principes de corrélation ont aussi pénétré dans les théories modernes, parce qu'ils sont, dans les applications, plus facilement abordables que ne l'est le procédé homographique. Le docteur Fielder en tire un grand avantage, en y joignant la raison anharmonique qui forme, suivant Charles, la base de l'homographie. Le célèbre Staudt, dans son ouvrage: *Géométrie der Lage*, part simplement de la forme harmonique dérivée du quadrilatère complet, et rien que par ce procédé il obtient des résultats surprenants. En somme, nous dirons que les projections de Monge se déduisent de surfaces cylindriques ou parallèles, tandis que celles que nous venons de signaler se rapportent en thèse générale à des projections coniques ou centrales. En envisageant la géométrie descriptive sous ces nouveaux points de vue, on a créé dans cette science de nouvelles branches, telles que l'axonométrie, qui en est une des plus importantes. On connaît trop bien aujourd'hui les avantages qu'offre l'étude de la perspective axonométrique pour que nous ayons ici à les faire ressortir.

Eu égard à un quatrième plan de projection, il arrive, suivant les fort justes indications d'un professeur renommé, que la surabondance d'éléments, dont la complication n'est qu'apparente, prête de la symétrie aux constructions et peut simplifier la solution de quelques problèmes.

Cela nous conduit comme par la main à parler quelque peu de cette géométrie de position, transcendante, générale, dérivée, etc., ou comme il plaira de la nommer, qui tend aujourd'hui à s'unir étroitement avec la géométrie descriptive. En faisant des recherches dans les œuvres de notre siècle, nous sommes obligés de considérer celles de Carnot comme étant la source d'où découlent les théories que professent les géomètres les plus dignes de considération. Pour se pénétrer de son esprit, il suffit de lire sa dissertation préliminaire, où il faut voir l'importance qu'il donne à l'idée d'une analyse de situation, conçue par l'immortel Leibnitz et qu'expose si magistralement d'Alembert quand il dit:

«*Il est certain que l'analyse de situation est une chose qui manque à l'algèbre ordinaire: c'est le défaut de cette analyse qui fait qu'un problème paraît souvent avoir plus de solutions qu'il n'en doit avoir dans les circonstances limitées où on le considère. Il est vrai que cette abondance de l'algèbre, qui donne ce qu'on ne lui demande pas, est admirable à plusieurs égards; mais aussi elle fait souvent qu'un problème qui n'a réellement qu'une solution, en prenant son énoncé à la rigueur, se trouve renfermé dans une équation de plusieurs dimensions, et par là ne peut, en quelque manière, être résolu. Il serait à souhaiter que l'on trouvât moyen de faire entrer la situation dans le calcul des problèmes; cela les simplifierait extrêmement pour la plupart; mais l'état et la nature de l'analyse algébrique ne paraissent pas le permettre*.»

Ces précieuses pensées expriment l'objectif de Carnot, quand il prétend réduire la diversité des positions d'une figure par un simple changement de signes. Cet illustre savant signale les abus qui se commettent à cet égard en voulant généraliser l'idée ingénieuse de Descartes sur les quantités positives et négatives, et il finit par asseoir les principes suivants comme base de ses investigations:

1º.- Toute quantité négative isolée est un être de raison qui, lorsqu'il se trouve dans le calcul, peut être considéré comme une simple forme algébrique, incapable de représenter une quantité quelconque et effective.
2º.- Une de ces formes algébriques n'est que la différence des deux quantités absolues, où la plus grande passe à occuper la place de la plus petite, et celle-ci celle de la plus grande.

Dans cette hypothèse, il remplace les mots de quantités positives et négatives par ceux de quantités directes et inverses, et il aboutit ainsi à l'étude d'une figure primitive qui est en rapport avec d'autres appelées corrélatives, et qui peut passer des unes aux autres par un simple changement de signes. Cette vaste conception devient le champ d'investigations scientifiques qui, au dire de certains mathématiciens, engendrent des méthodes fécondes et puissantes au moyen desquelles on triomphe de quelques difficultés relatives aux porismes d'Euclide.

C'est ainsi que l'on voit, dans notre siècle, s'ouvrir une ère toute nouvelle pour la géométrie de projection, science où se fait remarquer en premier lieu Brianchon, qui complète le principe de Pascal; puis viennent Moebius, Bellavitis, Cremona, Culmann, Reye, et enfin Zech, Gaskin, Poudra, Fielder, Staudt.

Vous remarquerez qu'en général les doctrines soutenues par ces géomètres se trouvent en relation intime avec la géométrie de Riemann, qui appartient à l'école des pseudo-géomètres; cette école, dernière étape des pangéomètres, se sépare des principes de Carnot, en même temps que de cette vraie et saine philosophie qui doit guider une science que l'on appelle par antonomase une science exacte.

Les nouveaux géomètres de cette école *transcendantaliste*, c'est-à-dire les pangéomètres, tout en prenant pour leur point de départ la méthode empirique, parviennent néanmoins, on ne sait comment, jusqu'à l'espace métagéométrique des pseudo-géomètres où, conséquence assez anormale par elle-même, ni les idées, ni l'imagination humaine, et encore moins l'expérimentation, ne peuvent rien. Gauss, Riemann et Lobatschewsky essayent de créer un système géométrique indépendant des axiomes d'Euclide sur les parallèles; et, réellement, on ne peut s'empêcher de trouver fort curieux les paragraphes que Stallo copie de ces géomètres. On peut juger par là du degré de foi que possèdent ces nouveaux apôtres dans la science mathématique.

Il y en a qui déclarent que les théorèmes de Lobatschewsky, Riemann, Helmoltz et Beltrami forment l'unique base de la théorie complète et exacte du parallélisme; Clifford pousse l'enthousiasme au point de s'écrier que Lobatschewsky est par rapport à Euclide ce que Copernic est par rapport à Ptolémée.

En comparant les géomètres, on voit aisément qu'une ligne bien marquée distingue les nouveaux des anciens ou euclidiens; les modernes partent de l'observation empirique pour remonter à ce qu'il y a de plus transcendantal, tandis que les partisans des Grecs posent des axiomes pour les porter ensuite sur le terrain de la réalité. Ces deux marches sont, comme on le voit, entièrement opposées l'une à l'autre.

Conformément aux idées que nous avons exposées dans notre travail, on doit comprendre que le passage à la réalité ne peut s'opérer que par voie de vérifications plus ou moins exactes: en effet, les principes que nous formons dans notre esprit doivent s’assujettir à l'expérience, car, en cas contraire, nous nous verrions obligés d'accepter la thèse de Vico, suivant laquelle « *nous démontrons les vérités géométriques parce que nous les faisons* ». En étudiant les nouveaux géomètres, on s'explique comment quelques-uns admettent que la somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne soit pas égale à deux angles droits; et, par suite, que la ligne droite soit une circonférence, de sorte qu'avec le temps il est fort possible que l'on en arrive à soutenir que la ligne droite est une suite d'arabesques plus ou moins capricieuses.

C'est peut-être pour cela que d'Alembert dit: «*La définition et les propriétés de la ligne droite ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie*.»

On s'explique ainsi comment on a pu arriver à former diverses géométries dans le genre de celles qu'indique Tilly, au point de vue de la possibilité de tracer d'un point donné à une droite plusieurs parallèles, une seule ou pas une. Ces géométries prennent respectivement les noms de Gauss, d'Euclide et de Riemann, et même celle de ce dernier est devenue de nos jours la base de la géométrie de position.

Si dans nos conceptions mathématiques nous perdons le contrôle du monde réel, nous travaillons à tâtons, conduisant la science par des sentiers tortueux et sans issue, qui n'offrent que quelques éclaircies lumineuses, à la manière de ces effets de fantasmagorie qui se perdent au milieu d'une nuit obscure et ténébreuse. Dans les sciences exactes, de même que dans les beaux-arts, nous devons toujours faire en sorte de nous placer dans la ligne d'intersection de deux sphères, représentant l'une le monde réel et l'autre le monde des idées.

Enfin, une des dernières conquêtes réalisées dans le domaine des sciences mathématiques, mais aussi d'un caractère purement géométrique, c'est la théorie des quaternions inaugurée, si nous pouvons nous exprimer ainsi, par l’œuvre célèbre de Bellavitis et qui bientôt se transforme, entre les mains d'Hamilton, en un corps de doctrine. De toutes les conceptions imaginées jusqu'à ce jour, peut-être celle-ci est-elle la plus féconde et la plus digne d'éloge, car elle a égard aux deux éléments que nous avons signalés dès le principe, c'est-à-dire la situation et la mesure de la quantité: algorithme synthétique. Le calcul des quaternions consiste à établir deux espèces de grandeurs réelles: l'une d'elles est constituée par les quantités numériques ordinaires, et l'autre est formée par des grandeurs qui réunissent les deux attributs de longueur rectiligne et de direction définie, donnant ainsi naissance à ce qui s'appelle un vecteur.

Cette impulsion une fois donnée a entraîné d'autres mathématiciens célèbres, tels que Haenkel, Roemer, Kéland, Fout, Houël, Wood, Scheffer, Clifford, Laisant, Lowell, Stringam, etc.

Le grand principe de cette théorie consiste en ce que toutes les droites égales, parallèles et dirigées dans le même sens, sont susceptibles d'être représentées par un même symbole qui dépend de trois éléments numériques, conformément à la différence des trois coordonnées respectives des points extrêmes d'une droite donnée; la droite ainsi dirigée forme un vecteur, ce qui constitue le fondement de la véritable égalité dans cette nouvelle mathématique qui, malgré son importance, a ce défaut que malheureusement ses notations varient plus qu'il ne le faudrait pour la bonne unification de la science.

Avec cette théorie, non seulement on peut étudier la quantité variable de Descartes, mais encore la quantité infinitésimale suivant le mode de Newton, et la géométrie transcendante dans ses relations anharmoniques et transversales; on en peut voir de nombreuses et remarquables applications dans la rectification des courbes, la quadrature des surfaces, la cubature des corps, et surtout dans l'hydrodynamique, la théorie de l'électricité, le calcul du potentiel, etc. Hamilton prouve que sa méthode comprend comme cas particulier les procédés de Grassmann et ceux de Moebius dans le calcul barycentrique, et qu'elle aboutit à l'étude des courbes et des surfaces des 2º et 3º ordres.

I I I

Le voyage que nous venons de faire à travers le vaste domaine des mathématiques modernes a été bien rapide: les limites étroites d'un simple mémoire ne pouvaient d'ailleurs nous permettre de tout dire, ni même de développer, autant qu'il l'aurait fallu, les théories principales. Nous pensons toutefois que ce modeste exposé suffira pour faire ressortir un fait essentiel, que l'on observe dans la marche ascensionnelle de la science qui nous occupe: c'est que l'esprit mathématique possède une propension toute particulière vers la géométrie, comme si l'homme de science croyait qu'en suivant ce chemin, il lui sera plus aisé de saisir ce fantôme qu'il poursuit sans relâche et qui toujours réussit à lui échapper des mains. Ne serait- ce pas là ce qui explique comment il arrive si souvent que le désespoir fait explosion dans son cerveau, en y soufflant ces systèmes ridicules que rejette même le sens commun!

Il est notoire que les connaissances mathématiques croissent de jour en jour, en se généralisant sur les bases véritables de l'ordre et de la mesure, et ce mouvement est du à la remarquable théorie des quaternions; mais le défaut de commutabilité dans les facteurs, indépendamment de l'accumulation de signes capricieusement adoptés dans les différentes œuvres, empêche que cette théorie ne soit acceptée en toute confiance; et s'il est vrai que ses applications dans la physique mathématique soient déjà considérables, il y a lieu de penser que cette voie n'est ni la plus expéditive ni la plus parfaite pour atteindre le but que l'on a en vue dans la science de la quantité. L'étoffe a trop d'ampleur pour une semblace personne.

Lorsque l'enseignement d'une science nécessite un grand nombre de mots ou de signes, c'est une preuve que ce que nous soutenons n'est pas vrai ou que nous n'avons pas encore trouvé le véritable chemin qui doit assurer son développement.

Dans les mathématiques, il existe comme une espèce d'être mystérieux, qui pousse l'homme à chercher le plus haut degré d'indétermination dans les questions; mais, malheureusement, les moyens sur lesquels il compte ne répondent pas à son attente; c'est, en effet, la parole qui doit servir à exprimer la continuité de l'idée, et justement la parole est dénuée de continuité; d'autre part, les signes et les algorithmes, qui sont par eux-mêmes assez vagues et lourds, ne suivent pas toujours la pensée; dans bien des cas, tous ces embarras retiennent sa main et l'obligent à abandonner son œuvre avant de l'avoir terminée, comme cela est déjà arrivé à l'occasion de la magnifique conception de Lagrange relative à la théorie des variations.

Malgré tout, le vertige qui se fait sentir dans les temps modernes confirme que l'on désire ardemment découvrir ce procédé unique et vrai qui doit nous conduire sûrement et simplement jusqu'aux alentours des points où son situés les axiomes, aussi bien qu'aux points les plus éloignés des différents cercles qui enveloppent les premiers.

Les travaux accomplis en Allemagne, en Belgique, en Angleterre et en France, marquent les dernières conquêtes obtenues de nos jours; mais tant que l'esprit scientifique aura pour base le matérialisme ou le panthéisme, il ne faut pas compter que l'on parvienne jamais à réaliser des progrès sérieux. Cela est vrai surtout pour la science de la quantité, car si l'on ne cherche la base de cette science que dans le monde réel ou dans le monde des idées, on ne fera jamais autre chose qu'enrayer son développement. Les savants qui s'appuient sur une saine philosophie sont les seuls qui doivent nous servir de guides, quand nous voulons retirer des mathématiques des résultats fructueux; ce sont ceux-là qui généralement signalent l'impérieuse nécessité où l'on se trouve d'unir ensemble les deux mondes précités, car ils sont convaincus que dans cette ligne de leur intersection, et là uniquement, peuvent *germer* les fondements des sciences exactes. En vérité, il est fort possible qu'avec le temps ceux qui ne pensent pas ainsi soient un jour confondus par le monde enseignant avec l'un ou l'autre des deux types célèbres si habilement décrits par le manchot de Lépante.

Il est donc de tout intérêt de nous rapprocher de cette ligne moyenne d'investigation, en nourrissant nos études de principes qui soient fondés sur la raison et toujours renfermés dans les lois naturelles, car là seulement l'intelligence humaine est susceptible de développement; il est aussi de tous points urgent de nous fixer un peu plus sur la nature des outils que nous avons à manier, en étudiant avec prédilection les algorithmes qui doivent le mieux servir, dans nos travaux scientifiques, pour marier ce qu'il y a de matériel dans la forme avec ce qu'il y a d'idéal dans la conception.

Nous allons enfin, en terminant, appeler votre attention sur les immenses difficultés que l'on rencontre dans le vaste champ de la science des mathématiques, pour arriver à la solution de ces questions nous pourrions nommer fondamentales; si ces obstacles n'ont pas encore été surmontés, cela tient sans doute à ce que plusieurs mathématiciens distingués ont considéré la philosophie du calcul comme chose inutile, ou qu'ils ont appartenu à des écoles philosophiques dont le pernicieux esprit ne pouvait leur permettre de marcher hardiment dans le sentier de la vérité.

En cet état de choses, il ne nous reste donc plus qu'à a exprimer un vœu, c'est de voir se grouper les savants qui s'honorent du titre de catholiques, afin que, inspirés par une saine philosophie et animés d'une foi vive et ardente, ils réussissent, avec le temps et à force de constance, à établir d'une manière inébranlable les assises de ce temple que l'on prétend ériger à la gloire du Seigneur, comme un témoignage de reconnaissance pour les bienfaits qu'il nous dispense, en nous laissant entrevoir la sublimité de sa s'agresse infinie dans la constitution de ce tout harmonique et admirable de la création.

Paris, du 8 au 13 Avril 1888 *
Lauro Clariana Ricart

* *Esta Memoria fue premiada en el Congrès Scientifique International des Catholiques tenu a Paris du 8 au 13 avril 1888.*