Una cuestión de Geometría Analítica

1889

La falta de precisión entre los conceptos diferentes de Descartes y Cauchy en que se funda la geometría analítica, da origen a grandes vaguedades y contradicciones palmarias en los tiempos presentes, por descuidar, más de lo que se debiera, los principios de la buena lógica; por esto varios autores de obras de analítica, llevan la duda en el ánimo de quien de buena fe se entrega al estudio de dicha ciencia. Para justificar nuestro aserto, bastará recordar la teoría de los puntos y rectas que se designan bajo el nombre de imaginarios; pues decir que el punto imaginario no tiene representación gráfica para admitir luego que una recta real es un conjunto de puntos imaginarios, en verdad que no tiene explicación satisfactoria. Esa contradicción desaparece, según nuestro modo de ver, concediendo representación gráfica a dichos puntos imaginarios; lo que nos prueba una vez más que debemos mirar siempre con desconfianza todos aquellos resultados que a la geometría se refieren, si no los podemos comprobar aproximadamente o exactamente por la experiencia.

Para desarrollar debidamente la teoría que nos ocupa, conviene distinguir dos planos principales: *A O B* y *B O C* (Figura 1). El 1º correspondiente a los valores reales de *x* é *y*, constituyendo el plano de Descartes; 2º el plano perpendicular al primero en que el eje *y* ha sufrido una evolución de un cuadrante, resultando imaginario, y cuyo plano puede llamarse de Cauchy.

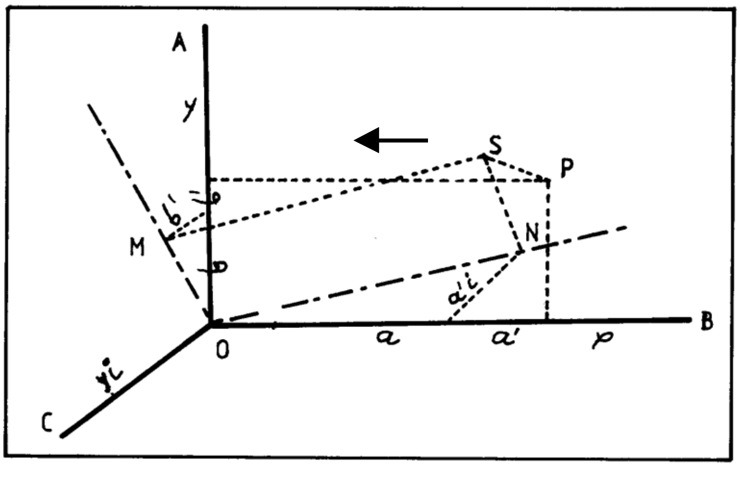

Figura 1

Ahora bien, si tenemos $x = a + a'$, $y = b + b'$, el punto que corresponde a dichas coordenadas vendrá representado por *P*, según se desprende de la figura 1.

Empero, si se tiene $x = a + a'i,\ y = b + b'i$, será preciso, después de haber alcanzado los valores respectivos de *a* y *b*, cambiar de dirección según un ángulo recto respecto a las primeras direcciones, tomando luego los valores *a* y *b* ´ a fin de tener los puntos *N* y *M*, como extremos de los caminos andados por *x* é *y*; de suerte que uniendo el origen *O* con *N* y *M*, tendremos la dirección de los nuevos ejes, después de lo cual bastará trazar por dichos puntos paralelas a los mismos, para determinar en *S* el punto cuyas coordenadas son: $a + a'i$ y $b + b'i$.

Sentados estos principios, veamos como los teoremas que nos da el análisis, se corresponden perfectamente con la representación gráfica que concedemos a los puntos imaginarios, y por ende a las rectas imaginarias, que resultan de la unión de dos puntos del mismo nombre.

1er. *Teorema*.-
El punto medio de dos puntos imaginarios conjugados $(\alpha + \alpha' i, \beta + \beta' i)$ y $(\alpha - \alpha' i, \beta - \beta' i)$ es un punto real, cuyas coordenadas son (α,β).

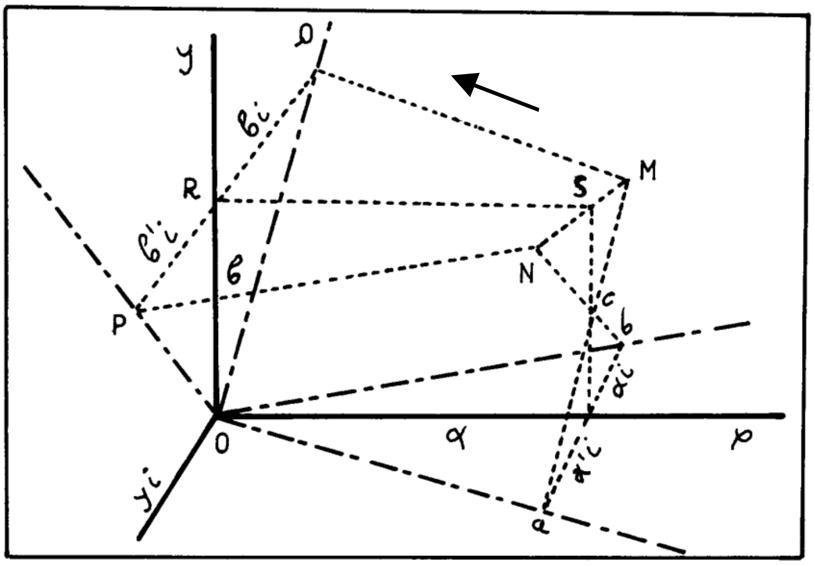

Figura. 2

Según se desprende de la Figura 2, y conforme a los principios precedentes, *N* y *M*, son los puntos que corresponden a las coordenadas $(\alpha + \alpha' i, \beta + \beta' i)$ y $(\alpha - \alpha' i, \beta - \beta' i)$.

Fácilmente se deduce: *NP* = *QM*, *NPQ* = *PQM*, *cab* = *cba*, *da* = *db*; por consiguiente *cd*, pasa por el punto *S*, que es mitad de *NM*; así la perpendicular *RS* al eje *y*, situada en el plano *xy*, pasa también por *S*; empero como el punto *S*, tiene por coordenadas α y β, siendo dicho punto mitad de los *N* y *M*, queda con ello completamente demostrado el teorema.

A este punto recordaremos la impropiedad de la demostración que dan algunos autores, valiéndose de medios analíticos, pues parten de las fórmulas $\frac{x+x'}{2}$ y $\frac{y+y'}{2}$, que solo son aplicables para cuando los puntos dados sean reales, sin que nada justifique su empleo para cuando sean imaginarios.

2º *Teorema*.-
La recta que pasa por dos puntos imaginarios conjugados es real.
Para demostrar este teorema analíticamente, parten los autores de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, como si tratara de puntos reales; de suerte que la serie de operaciones que se ejecutan, siendo los puntos imaginarios:

$$(\alpha+\alpha' i, \beta+\beta' i) \text{ y } (\alpha-\alpha' i, \beta-\beta' i)$$

se expresan por las igualdades siguientes:

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

$$y-\beta-\beta' i=\frac{(\beta+\beta' i)-(\beta-\beta' i)}{(\alpha+\alpha' i)-(\alpha-\alpha' i)}(x-\alpha-\alpha' i)$$

$$y-\beta-\beta' i=\frac{2\beta' i}{2\alpha' i}(x-\alpha-\alpha' i) \quad (2)$$

$$\alpha' i(y-\beta)=\beta' i(x-\alpha)$$

o sea

$$i[\alpha'(y-\beta)-\beta'(x-\alpha)]=0 \quad (3)$$

Esta última igualdad, es la expresión de una recta puramente imaginaria; pero como la ecuación queda satisfecha, haciendo: $\alpha'(y-\beta)-\beta'(x-\alpha)=0$, podemos decir que el resultado se refiere a una recta real, lo que se realiza en el análisis, quitando la *i* de ambos términos del quebrado $\frac{2\beta' i}{2\alpha' i}$, de la igualdad (2). Ahora bien, bajo el punto de vista geométrico, la supresión de *i*, supone que al dar un cuarto de revolución a la recta definitiva debe resultar real, o sea en el plano de Descartes, si las consideraciones gráficas se corresponden con el análisis.

En efecto, si atendemos a la figura 2ª, se comprende que la recta que pasa por los dos puntos conjugados dados, es la recta *MN*, que es perpendicular al plano de Descartes; de modo que al realizar una evolución de 90°, tendrá que colocarse en este plano, quedando real.

Empero en este movimiento β´y α´ deben sufrir también una evolución de 90° en sentido inverso al que había tenido lugar al levantarse de los ejes reales.

Así pues cuando la recta *MN*, pasa al plano real, debe atenderse a los movimientos parciales determinativos del movimiento resultante, en el concepto de que el punto *S*, en que corta la recta *MN* al plano *xy*, permanezca invariable; así se tiene evidentemente una recta real, que pasa por el punto cuyas coordenadas son (α,β) según el teorema anterior, siendo el coeficiente angular $\frac{\beta'}{\alpha'}$, correspondiente a la expresión analítica (3), que puede resolverse en: $y-b=\frac{\beta'}{\alpha'}(x-\alpha)$.

Dados estos dos teoremas importantes, los demás pueden considerarse como simples corolarios, tales son:

a) Una recta real tiene muchos puntos imaginarios.
b) Un punto imaginario determina una recta real.
c) Toda recta imaginaria tiene un solo punto real.

Las consecuencias de estos y otros teoremas que podríamos formular, vienen confirmados gráficamente por los principios que hemos dado a conocer, quedando así unidos el análisis y la geometría, como era ya de presumir.

Los célebres principios de Cauchy y Hamilton, han de servir sin duda para ensanchar los límites de una ciencia que debe considerarse bajo bases distintas de las que hoy la circunscriben; la geometría analítica de Descartes, andando el tiempo, debe aparecer como un simple corolario de la geometría analítica estudiada en toda su extensión; y si bien no ha llegado el momento de realizar tan grande concepto, justo es que a lo menos no se confunda jamás lo particular con lo general.

Barcelona a 10 de Marzo de 1889
Lauro Clariana Ricart