Geometría del Porvenir

1889

Si nos fijamos en la marcha que siguen los autores al desarrollar la geometría, encontraremos desgraciadamente que, a pesar de ser una ciencia modelo, no aparecen las teorías enlazadas como fuera de desear, sin que se descubra jamás el tronco de esa infinidad de ramas que se extienden por el espacio. Sin duda que el rigorismo en la forma didáctica, corta el vuelo de muchos matemáticos; empero si útil es ordenar debidamente el material para levantar un edificio, ridículo fuera que después de haber hecho acopio de aquel, dejáramos luego de llevar a cabo la obra, sin mostrar el conjunto proporcional y regular de su construcción. En realidad de verdad que el sujetar la geometría a pocos principios generales según forma didáctica, es cuestión sumamente ardua; con todo, mientras otra cosa no se pueda, conviene unir los conocimientos mas indispensables para formar, siquiera al fin de la geometría, un todo armónico, enlazando las diferentes teorías de la misma, dentro de pocos principios generales y fecundos; solo así puede manifestarse la síntesis de que es capaz la ciencia de la extensión, destacándose el corpulento tronco de ese árbol frondoso y gigantesco.

Vamos pues a probar que solo remontándose a la teoría de las proyecciones, puede descubrirse esa base única y sólida para formar una nueva geometría, a la cual nos atrevemos a conceder el nombre de geometría del porvenir.

Consideremos dos clases de proyecciones: La paralela y la perspectiva; la primera, para el estudio relativo de una misma figura; la segunda, para las relaciones que puedan establecerse entre dos o más figuras sujetas a alguna ley preestablecida.

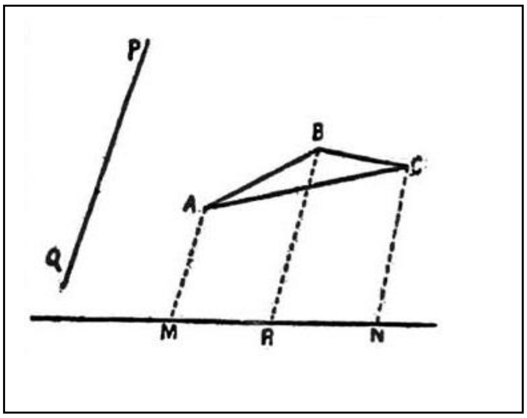


Figura. 1

Según la proyección paralela, la suma de dos líneas, depende no solo de la magnitud de éstas, sino de la dirección de la proyección y de la recta sobre la cual se proyecta: así pues, la suma de las líneas *AB* y *BC*, figura 1, que podemos suponer rectas, en el supuesto de ser *PQ* la dirección de la proyección, y *MN* la recta sobre la cual se proyecta, depende de *AC*; bajo otros términos: suponiendo un móvil que siga el camino ABC, podemos considerar como suma de *AB* y *BC*, lo que corresponda al camino recorrido en línea recta, desde el punto de partida al de llegada.

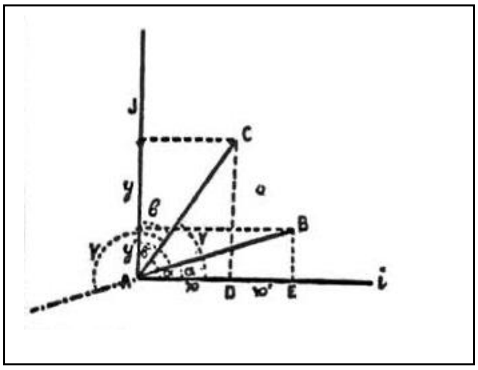
Ahora bien, como caso particular podríamos suponer que la recta *MN*, coincidiera con *AC*, y entonces tendríamos que la misma *AC*, representaría la suma de *AB* y *BC*.

He aquí la verdadera base de la geometría, resultado de las bellas teorías de Bellavitis y Hamilton, y que se corresponden con las teorías de la mecánica, como así también con el admirable estudio de las cantidades complejas. De esta suerte para que dos rectas sean iguales, no basta que tengan la misma magnitud; es preciso que tengan además la misma dirección y el mismo sentido. El análisis matemático solo puede corresponderse debidamente con la geometría, elevándose a la altura que tanto deseaba Newton; era preciso alcanzar el álgebra de situación, cultivada en parte a principios del presente siglo por el distinguido Carnot.

Una vez sentados estos principios, con suma facilidad pueden deducirse las diferentes propiedades relativas a una misma figura. Para dar una simple prueba de su fecundidad, nos concretaremos, por ejemplo, al simple teorema de Pitágoras, por ser uno de los más importantes dentro de la geometría plana. Empero antes de entrar en esa demostración, como quiera que la teoría de los cuaternions viene involucrada en los principios que desarrollamos para la geometría elemental, convendrá aclarar algunas ideas.

Cuando en una recta se atiende a su magnitud y a su dirección, constituye un vector,; la magnitud constituye el tensor; en cuanto a la dirección, conviene relacionarla a dos rectas como ejes cartesianos, que se designan versores-unidad, y que vienen caracterizados por ciertos símbolos *i, j, k*, que tienen una significación análoga con $\sqrt{-1}$, de las cantidades complejas.

Figura. 2



Así pues, según lo que hemos desarrollado desde un principio, resultan las igualdades siguientes: (Figura 2):

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{AD} + \overline{DC} = xi + yj \\ \overline{AB} &= \overline{AE} + \overline{EB} = x'i + y'j\end{aligned}\right\} (1)$$

Débese advertir que cuando se trata de una recta dirigida o vector, se escribe una raya encima de las letras que la representan; cuando se refiere simplemente a su magnitud o tensor, se suprime dicha raya.

De las igualdades (1), resulta:

$$\overline{AC}.\overline{AB} = xx'i^2 + yy'j^2 + (xy' + x'y)ij$$

empero como $i^2 = j^2 = -1$, se deduce:

$$\overline{AC}.\overline{AB} = -(xx' + yy') + (xy' + x'y)ij$$

La cantidad independiente de *i* y *j*, toma el nombre de *escalar*; así pues, designándolo por *S*, se tiene:

$$S = -(xx' + yy)$$

Según se desprende de la figura 2 podemos suponer:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

luego:

$$S = -rr'\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r}\right) = -rr'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos b\cos b') = -rr'\cos\nu = rr'\cos\nu'$$

Por fin, siendo *r* y *r´*, los tensores *T* y *T´* de los vectores *AC* y *AB*, se obtiene definitivamente: $S = TT'\cos\gamma'$; esta fórmula traducida al lenguaje ordinario, nos dice que el *escalar* de un producto de dos vectores, es igual al producto de sus tensores multiplicado por el coseno del suplemento del ángulo comprendido por las dos rectas que señalan la dirección de los dos vectores.

Con estas nociones podemos pasar al desarrollo del teorema de Pitágoras. Sea el triángulo rectángulo *ABC* (figura 3).

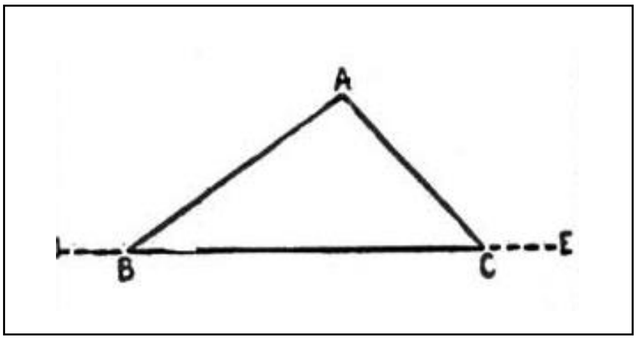


Figura.3

Según el principio fundamental establecido resulta: $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$.
Al multiplicar ambos miembros por $\overline{BC}$, se deduce:

$$\overline{BC}.\overline{BC} = \overline{BA}.\overline{BC} + \overline{AC}.\overline{BC} \quad (2)$$

Aplicando al primer miembro, la regla anterior, en el supuesto de que el ángulo suplementario de dos vectores que tienen la misma dirección y sentido debe ser de 180°; se obtiene:

$$\overline{BC}.\overline{BC} = -(BC)^2.$$

En cuanto al segundo miembro, bastará proceder como indica el cálculo siguiente, y conforme a la figura 3:

$$\overline{BA}.\overline{BC} = BA.BC.\cos ABD = -BA.BC.\cos ABC = -BA.BC.\operatorname{sen} C = -BA.BA = -(BA)^2$$
$$\overline{AC}.\overline{BC} = AC.BC.\cos ACE = -AC.BC.\cos ACB = -AC.BC.\operatorname{sen} ABC = -AC.AC = -(AC)^2$$

Luego sustituyendo todos estos valores en (2), se halla:

$$-(BC)^2 = -(BA)^2 - (AC)^2$$

o sea

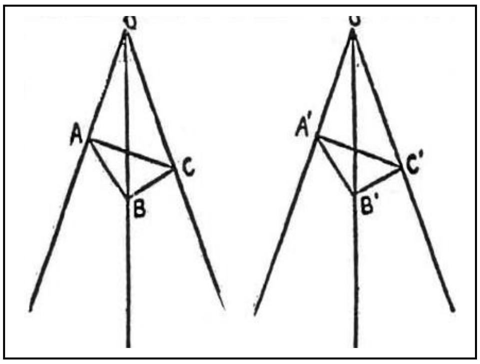
$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

Resultado que nos confirma el teorema de Pitágoras, apoyándonos en la proyección paralela; de un modo análogo podríamos dar a conocer otras propiedades que a una misma figura pueden referirse.

Ahora bien, al comparar dos a más figuras en general, debe considerarse la proyección perspectiva. De la comparación puede resultar la igualdad o desigualdad; respecto a este último caso, la geometría solo debe considerar de utilidad, aquellas figuras entre las cuales existe algo común que las une, esto es, alguna ley fija y precisa que las enlace. Una de las leyes más sencillas, hace referencia a las figuras semejantes, las cuales todas pueden referirse a un sistema homotético, y por consiguiente a una misma proyección perspectiva. Cuando se pierde el paralelismo de los lados homólogos, pueden aun admitirse otras leyes más complicadas, tales son las célebres teorías de la homografía, involución etc., llegando por esta misma senda a la homología, que bien puede considerarse como el caso más general del que a la semejanza se refiere.

A pesar de que la igualdad podría hacerse dependiente de la proyección paralela, como caso particular de la perspectiva, a fin de que la comparación se refiera en totalidad a la proyección perspectiva, es preferible que la igualdad dependa de esta última.

Figura. 4



Vamos a presentar pues, la igualdad de triángulos, por ser el triángulo la figura elemental de la geometría plana, bajo un punto de vista más general del que se acostumbra dar a conocer. En efecto, la igualdad de los triángulos *ABC* y *A´B´C´* (figura 4), referidos a las dos proyecciones perspectivas, depende de las igualdades siguientes:

$$AO = A'O', OB = O'B', OC = O'C' \ .$$

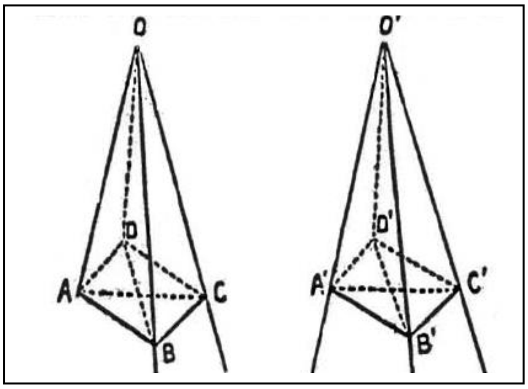
$$AOB = A'O'B' \qquad AOC = A'O'C'$$

es decir de tres elementos lineales y dos ángulos, correspondientes a los seis elementos constitutivos de un triángulo, que en rigor se reducen a cinco, puesto que el ángulo que falta para completar los dos primeros del triángulo queda determinado por el suplemento.

El caso que hemos presentado debe considerarse como el más general, pues los que se hallan como tales en las geometrías, no son más que casos particulares del primero.

Si pasamos a la geometría del espacio, bastará estudiar simplemente la igualdad de tetraedros, por ser el tetraedro el cuerpo elemental de la misma, hallándose las mismas relaciones que corresponden a la igualdad de triángulos, con solo cambiar los conceptos de líneas en planos, los ángulos planos en ángulos diedros, considerando además las proyecciones perspectivas en el espacio.

Figura. 5



En efecto, para determinar las igualdades de los dos tetraedros *ABCD*, *A´B´C´D´*(figura 5) conforme a las proyecciones perspectivas *o* y *o´*, bastará que se verifiquen las condiciones siguientes:

$$AOC = A'O'C',\ AOB = A'0'B',\ AOD = A'O'D'$$
$$COAB = C'O'A'B', COAD = C'O'A'D'$$

es decir, tres caras y dos ángulos diedros respectivamente iguales, esto es, en correspondencia a los tres lados y dos ángulos del triángulo: la armonía no puede ser más exacta, pues así como los elementos de un triángulo son tres lados y tres ángulos; en el tetraedro pueden considerarse como elementos, las tres caras y los tres ángulos diedros de uno de los vértices; de suerte que pueden hacerse dependientes de la geometría plana, muchos teoremas de la geometría del espacio, con solo cambiar las palabras de caras y ángulos diedros, en lados y ángulos planos. Así, pues, de un modo análogo a la geometría plana por medio de proyecciones perspectivas podríamos determinar la semejanza, homología, etc.

Consideramos suficientes estos apuntes para que nuestros lectores comprendan la posibilidad de sintetizar la geometría bajo la única base de la proyección paralela y perspectiva; de esta suerte pueden procurarse ópimos frutos en las diferentes aplicaciones de la misma, ora en la trigonometría, ora en la geometría analítica, habiendo ya algunos autores que se utilizan de ese grande principio para sus investigaciones, si bien no con la extensión y el método que fuera de desear.

Barcelona a 10 de Abril de 1889
Lauro Clariana Ricart