Algo más sobre una cuestión de Geometría Analítica

1889

La teoría que desarrollamos en el artículo "Una cuestión de Geometría Analítica" acerca de los puntos y rectas imaginarias en la geometría plana, podría dar motivo quizá a sospechar que no es aplicable cuando se trata de puntos, rectas y planos en el espacio. El deseo de salvar esa duda, y probar la fecundidad de nuestra teoría, nos impulsa a escribir este segundo artículo.

Ante todo debemos advertir que en la geometría del espacio, es más notoria la diferencia entre la geometría de Descartes y la de Cauchy, pues en la primera, se consideran tres ejes reales, mientras que en la segunda, es indispensable considerar uno de ellos, imaginario; de modo que resultan dos planos de Cauchy, y uno de Descartes; todo lo cual guarda armonía con lo explicado respecto a los puntos y rectas imaginarias referidos a la geometría plana.

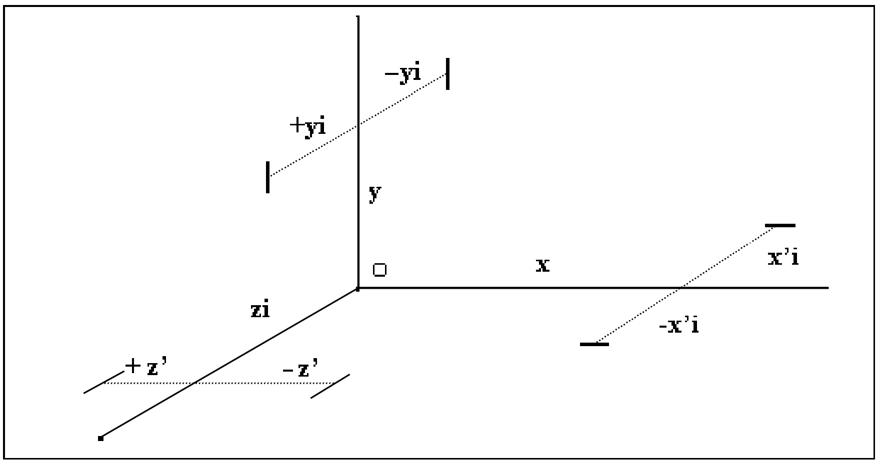

Figura. 1

Según se desprende de la figura 1, el plano *yox*, será el de Descartes, por ser los dos ejes reales; los planos *yozi* y *xozi*, serán los de Cauchy, por contener cada uno respectivamente un eje imaginario. Así todo lo que haga referencia al eje *z* debe ir afecto de *i*. No obstante, las demostraciones que vamos a dar subsistirían aunque dicho eje se considerara real, empero al tomarlo imaginario, se evita el absurdo manifiesto de que se tenga que considerar la perpendicular a dicho eje como cantidad imaginaria, cuando es paralela a un eje real, tal como *x*. Así, pues, la expresión $z+z'i$ que hace referencia al eje imaginario debe expresarse por: $(z+z'i)i = zi - z'$; donde es de ver que z' se transforma en una cantidad real negativa, que podemos suponer paralela al eje *x*, tal como indica la figura 1. La expresión conjugada $z-z'i$ de Descartes, se cambia en: $(z-z'i)i = zi + z'$.

Haciendo extensivas nuestras consideraciones de la geometría plana, a un punto imaginario en el espacio, compréndese fácilmente que su representación gráfica, debe expresarse por el vértice opuesto al origen de un paralelepípedo cuyas aristas consecutivas vengan determinadas por los caminos definitivos de un punto móvil, que saliendo del origen, se dirija en línea recta a los extremos de los caminos recorridos por $x + x'i$ y $y + y'i$ tal como se indica en la figura 2.

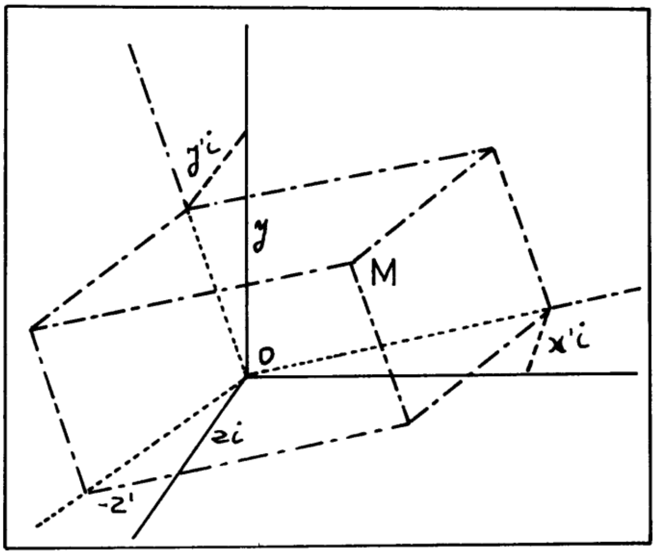

Figura.2

El punto M, es pues la representación gráfica de las coordenadas imaginarias antes expresadas. De esta suerte puede demostrarse que el punto medio de la recta que une dos puntos imaginarios conjugados

$$(a + a'i, b + b'i, ci - c'), \quad (a - a'i, b - b'i, ci + c')$$

es (*a, b, ci*), correspondiente al punto real de Descartes, para cuando las coordenadas sean todas tres reales.

Fijándose en la figura 3, fácilmente se comprende que los puntos P, δ, q, representan gráficamente los puntos imaginarios:

$$(a + a'i, b + b'i, ci - c'), \quad (a, b, ci), \quad (a - a'i, b - b'i, ci + c')$$

determinados por los tres paralelepípedos respectivos, siendo el segundo rectangular, correspondiente al punto real de Descartes. Para mayor claridad, supondremos el plano *xzi* en su verdadera posición; en este supuesto resulta (figura 4) que los puntos *M* y *N*, son los vértices opuestos al origen de las bases de los paralelepípedos oblicuos que determinan los dos puntos imaginarios en el espacio.

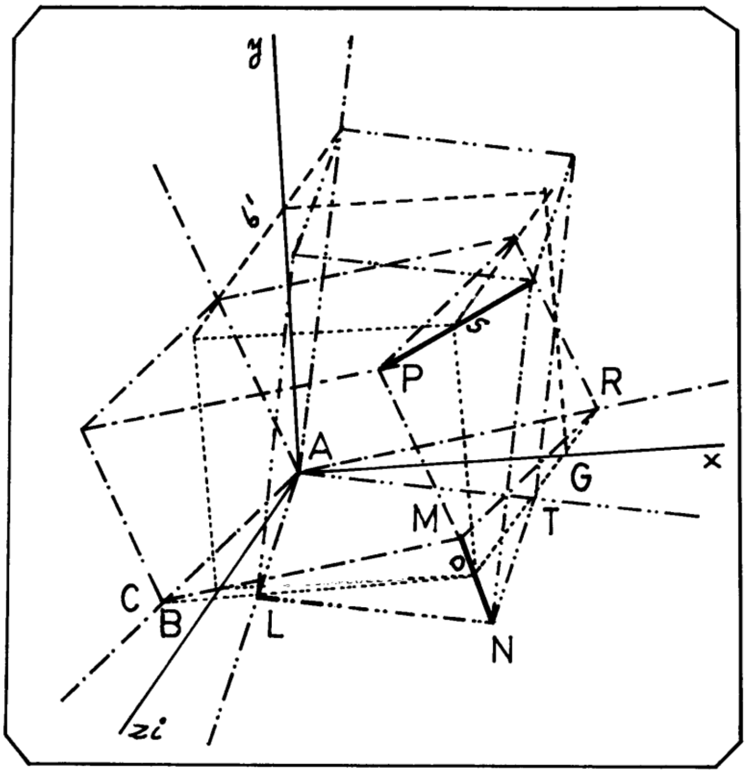

Figura. 3

Ahora bien, el triángulo *ABC* es igual a *RMS* y *TQN*, en el supuesto de ser *MS* y *QN* rectas paralelas al eje *x*; más como *MS* y *QN*, son iguales y paralelas si unimos por medio de una recta los puntos *M* y *N*, ésta debe cortar a *SQ* en su punto medio *O*.

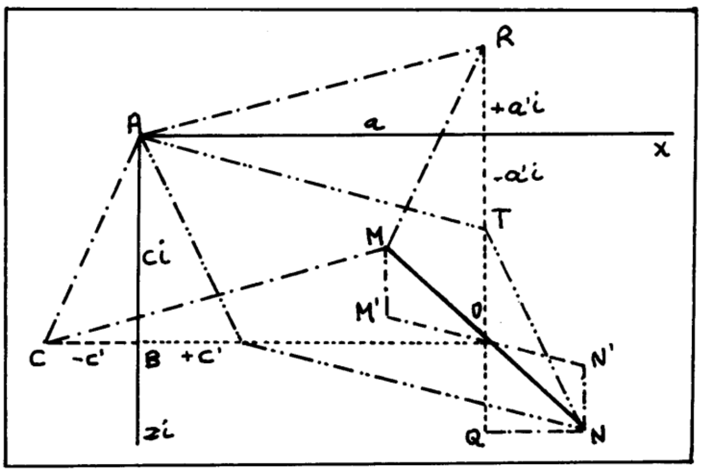

Figura. 4

Además *RS* = *TQ*; luego si quitamos de ambos miembros la recta *TS*, resulta: *RT* = *SQ*, de donde *OQ* = *GT*; lo que permite establecer la serie de igualdades siguientes:

$$AB = RS = TS + RT = TS + GT + SO = GO$$

de donde resulta que el punto *O*, medio de *MN*, es el vértice del rectángulo *ABGO*, siendo *O*, la proyección del vértice δ, del paralelepípedo correspondiente al punto real en el espacio, que tiene por coordenadas *ab* y *ci*. Las proyecciones de los vértices correspondientes a los dos puntos imaginarios, se hallaran trazando por los puntos *M* y *N*, dos rectas paralelas a *AB*, e iguales en magnitud a *b´*, y en sentido contrario; de esta suerte los puntos *M´* y *N´*, son las proyecciones ortogonales de los vértices *P* y *Q*, correspondientes a los puntos imaginarios en el espacio; de modo que al unir dichos dos puntos por una recta, resulta que *O*, debe ser su punto medio, como es fácil comprender; así pues si levantamos el plano *xzi*, paralelamente así mismo, de una cantidad *b*, tendremos el plano superior común a los tres paralelepípedos; la recta *M´N´*, representará la verdadera posición de la recta que une los vértices *P*, δ, *Q* de los tres paralelepípedos, quedando con ello probado que δ, es el punto medio de la recta *PQ*, conforme al teorema enunciado.

Pasemos ahora a la demostración de otros principios.

Primero.- Según la geometría analítica, toda recta que pasa por dos puntos en el espacio, viene representada por:

$$\frac{x-x'}{x'-x''} = \frac{y-y'}{y'-y''} = \frac{z-z'}{z'-z''}$$

Los autores de analítica, hacen extensiva esta expresión, para cuando las coordenadas son imaginarias, lo que según la notación de Descartes obtienen, para el caso de dos puntos imaginarios conjugados:

$$\frac{x-a-a'i}{2a'i} = \frac{y-b-b'i}{2b'i} = \frac{z-c-c'i}{2c'i}$$

o sea

$$\frac{x-a}{a'i} = \frac{y-b}{b'i} = \frac{z-c}{c'i}$$

en cuyas igualdades suprimen luego el factor *i* del denominador, para quedarse sencillamente con la serie de igualdades siguientes:

$$(A) \quad \frac{x-a}{a'} = \frac{y-b}{b'} = \frac{z-c}{c'}$$

deduciendo en su virtud que la recta que une dos puntos imaginarios, es real.

Esta demostración adolece de los mismos defectos que señalamos ya en el artículo anterior.

Pues bien, según nuestra hipótesis, la consecuencia es legítima, si atendemos al movimiento necesario para el paso de cantidades imaginarias en reales. En efecto, para que la recta *PQ*, figura 3, que une los dos puntos imaginarios, pase a la categoría de real, es preciso deshacer las evoluciones de 90° sufridas por cada uno de los ejes, y según las cantidades *a´i, b´i, c´*; de modo que el primero debe quedar paralelo al eje *x*, el segundo al eje *y*, y el tercero al eje *zi*, y como quiera que en este movimiento la recta *PQ*, pasa constantemente por el punto δ, cuyas coordenadas son *a, b, ci,* resulta evidente la diagonal de un paralelepípedo cuyas coordenadas son *a', b', c'i* pasando dicha recta por el punto fijo *a, b, ci,* lo que se ajusta perfectamente con el análisis, salvo la variante que hemos admitido respecto al tercer eje, lo que no quita que la consecuencia se ajustará en un todo con las expresiones (*A*), si hubiésemos adoptado la notación impropia de Descartes.

Segundo.- Cuando los coeficientes de las ecuaciones de una recta en el espacio son imaginarios, dícese que resulta una recta imaginaria. Para la representación gráfica de dicha recta, bastará atender a los principios que siguen. Sean las ecuaciones:

$$x = (a + a'i)zi + (p + p'i)$$
$$y = (b + b'i)zi + (q + q'i)$$

Estas ecuaciones son las que presenta la geometría analítica de Descartes, estos es, en el supuesto de ser los tres ejes reales, así pues, nosotros las modificaremos en el concepto de ser el eje *z* imaginario, resultando en su virtud:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= (a + a'i)z + (p + p'i) \\ y_1 &= (b + b'i)z + (q + q'i) \end{aligned}$$

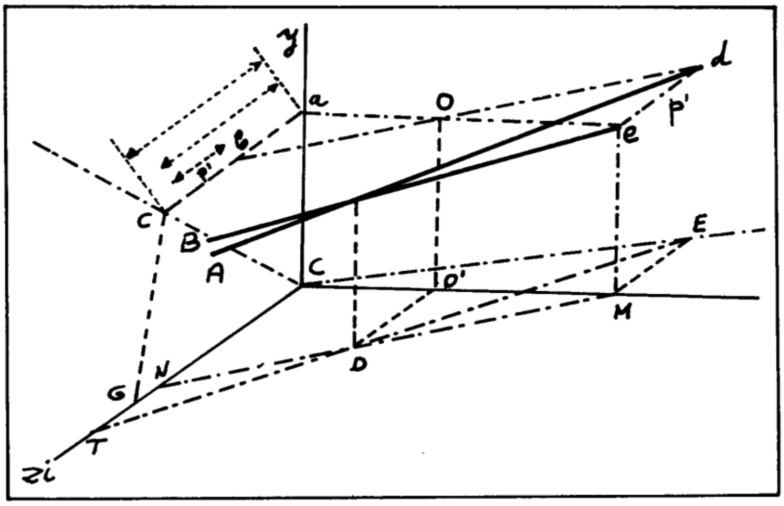

Figura. 5

Una vez determinados los coeficientes angulares de estas rectas en los planos *xzi* y *yzi*, mediante la misma teoría de evoluciones de 90° sobre rectas que representan los valores de las tangentes trigonométricas, podrá hallarse fácilmente los ángulos que forman con el eje *zi*, así como las trazas respectivas, según los valores: ($p + p'i$), ($q + q'i$), resultando, por ejemplo, las rectas *ET* y *cG* (figura 5). Con estos precedentes ya podemos determinar las condiciones precisas para que una recta imaginaria en el espacio, dada por sus dos proyecciones, pueda determinar, como suele decirse, un punto real, no siendo éste más que el que cumple con ciertas condiciones, y que es resultado de la intersección de la recta imaginaria, con otra que se supone real, según la notación de Descartes, y cuyas proyecciones vienen determinadas por las ecuaciones:

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

y que nosotros representamos por:

$$(3) \quad x = aiz + p, \quad y = biz + q$$

Ahora bien, para que las ecuaciones (2) y (3), se correspondan, es preciso suponer:

$$-a'z + p'i = 0, \quad -b'z + q'i = 0$$

de donde

$$z = \frac{p'i}{a'}, \quad z = \frac{q'i}{b'}$$

valores imaginarios que deben corresponder al valor de *zi*, para la intersección de las dos rectas real e imaginaria, a fin de que puedan convenir; dicho valor debe ser único, por consiguiente al prescindir del factor *i*, resulta:

$$\frac{p'}{a'} = \frac{q'}{b'}$$

esta condición fija el punto real de la recta imaginaria.

Para dar representación geométrica a estas consideraciones analíticas, bastará fijarse en la figura 5 en que *eb*, es la recta denominada real, y *dA*, por ejemplo, la imaginaria.

Supondremos los valores *p´* y *a´* en el plano superior, quitando de *a´*, el valor *p´*, en el supuesto de ser $a > p'$; así resulta la recta *ba*, cuyos extremos unidos respectivamente con *e* y *d*, dan los triángulos semejantes *abo* y *ode*, que dividen la recta *ae*, en dos partes: *oe* y *ao*, según la relación *p´* y *a´ - p´*. Ahora bien, siendo *MN*, la proyección en el plano *xzi*, de la recta real, podemos proyectar *o*, en *o´*, para deducir el valor *z*, que corresponde a dicha recta, debiendo ser este punto real, y el que corresponda a la recta imaginaria, quedando así completamente resuelto el problema bajo el punto de vista geométrico.

En efecto, así queda la recta *MC*, dividida en dos segmentos *Mo´* y *o´C*, que se hallan en la razón de *p´*: *a´*- *p´*. Luego:

$$\frac{Mo'}{o'c}=\frac{p'}{a'-p'}$$

o sea

$$\frac{MC}{Mo'}=\frac{a'}{p'}$$

además:

$$\frac{o'D}{NC}=\frac{Mo'}{MC}$$

llamando ahora, $o'D = z$ y $NC = z$, resulta: $\frac{z}{z'}=\frac{p'}{a'}$; de modo que refiriendo las diferentes líneas a la unidad lineal $z_1 = NC = 1$, se tiene: $z=\frac{p'}{a'}$, que es la condición del problema.

Dado caso que *a´* = *p´*, el punto *o* coincide con *a*, y el *o´* en *C*, resultando evidentemente:

$$z = z_1 = 1$$

Si fuese *a´* < *p´*, el punto *o*, se trasladaría a la izquierda de *a*.

Notable es la consideración que se deduce para cuando se tienen dos rectas imaginarias conjugadas, pues debe darnos el mismo punto *o*, al verificarse las condiciones predichas, cortando a la recta real, por consiguiente en el mismo punto; de donde se deduce que dos rectas imaginarias conjugadas, sujetas a las condiciones indicadas del problema, tienen un mismo punto real.

<u>Tercero</u>.- Por fin, para terminar nuestras consideraciones, vamos a justificar gráficamente las consecuencias que se deducen de lo que viene llamándose plano imaginario. Cuando los parámetros de un plano son cantidades imaginarias, se dice que dicho plano también lo es, por ejemplo:

$$(A+A'i)x+(B+B'i)y+(C+C'i)z+D+D'i=0$$

Para determinar la recta real que contiene dicho plano imaginario, basta descomponer la ecuación anterior del modo siguiente:

$$Ax+By+Cz+D+i(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

Según nuestras consideraciones en el concepto de que el eje *z*, sea imaginario, la ecuación anterior debe escribirse como se expresa a continuación:

$$(a)\quad Ax+By+Czi+D+i(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

El valor *Ax* + *By* + *Czi* + *D*, determina un plano según los segmentos que corresponden a los tres ejes *x, y, zi*, y conforme a los parámetros *A, B, C, D*. La expresión:

$$(b)\quad A'x+B'y+C'zi+D$$

determina de un modo análogo al caso anterior, otro plano; empero al prescindir de la *i*, como se hace en el análisis, supone que cada eje referente al plano que podríamos llamar puramente imaginario, debe sufrir una evolución de 90° en sentido contrario al que había experimentado al convertirse en imaginario; así, pues, cada eje vuelve en dirección de los primitivos *x, y, zi*, bastando determinar sus segmentos respectivos correspondientes a los parámetros *A´B´C´D´*, para determinar el plano que corresponde a (*b*); así es como debe considerarse la recta real que corresponde al plano imaginario; esto es, como la intersección natural de los dos planos:

$$(n)\quad Ax+By+Czi+D=0 \quad \text{y} \quad A'x+B'y+C'zi+D=0$$

Por esto al considerar el plano conjugado

$$(c)\quad (A-A'i)x+(B-B'i)y+(C-C'i)zi+D-D'i=0$$

resulta:

$$Ax+By+Czi+D-i(A'x+B'y+C'zi+D)=0$$

que en el concepto de prescindir, como se hace en el análisis, de -*i*, equivale a deshacer el giro sufrido por cada eje, para cuando era el plano puramente imaginario; resultando así luego cada eje en dirección de los primitivos, y en su virtud los dos mismos planos (n) que deben determinar la misma recta del primer caso.

No obstante, nosotros entendemos que el plano imaginario, no debe considerarse como el resultado de dos planos, ni mucho menos que no se le pueda conceder representación gráfica; así pues conforme a la teoría que venimos desarrollando supondremos que el plano imaginario:

$$(A-A'i)x+(B-B'i)y+(C-C'i)zi+D+D'i=0$$

se exprese por:

$$\frac{x}{-\frac{D+D'i}{A+A'i}}+\frac{y}{-\frac{D+D'i}{B+B'i}}+\frac{zi}{-\frac{D+D'i}{C+C'i}}=1$$

Ahora bien, admitiendo que:

$$
\begin{aligned}
-\frac{D+D'i}{A+A'i} &= \frac{-(D+D'i)(A-A'i)}{A^2+A'^2} = \alpha+\beta i \\
-\frac{D+D'i}{B+B'i} &= \frac{-(D+D'i)(B-B'i)}{B^2+B'^2} = \nu+\delta i \\
-\frac{D+D'i}{C+C'i} &= \frac{-(D+D'i)(C-C'i)}{C^2+C'^2} = \varepsilon+\varphi i
\end{aligned}
$$

se tiene:

$$\frac{x}{\alpha+\beta i}+\frac{y}{\nu+\delta i}+\frac{zi}{\varepsilon+\varphi i}=1$$

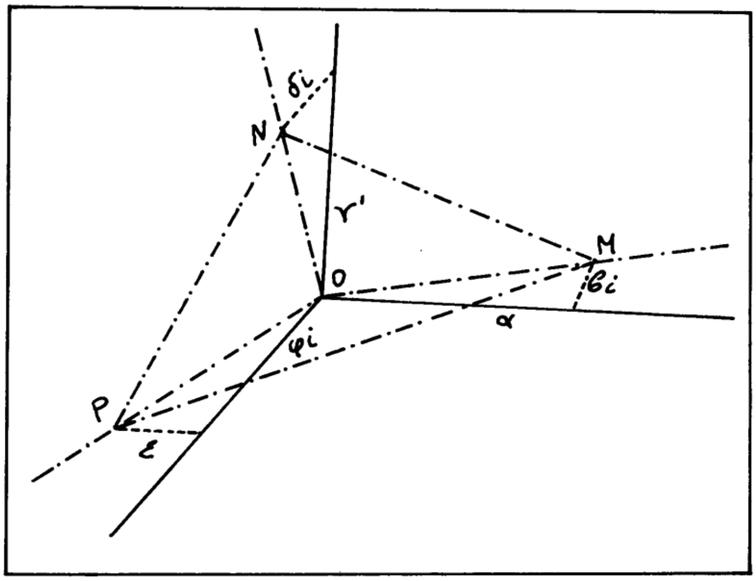

Figura. 6

Los denominadores representan los segmentos de los ejes que comprende el plano; de suerte que determinando la dirección y magnitud de estos según la teoría general, y tal como expresa la figura 6, se hallaran los tres puntos *M, N, P*, por los cuales debe pasar el plano imaginario. Creemos suficientes estas breves consideraciones para que el lector comprenda la importancia de los principios que sostenemos, no solo para aclarar ciertos puntos de la geometría analítica, sino para extender sus límites, acercándonos cuando sea dable a las bellas concepciones de los matemáticos modernos.

Barcelona, 5 de abril de 1889
Lauro Clariana Ricart