Influence du Monde Réel et du Monde Idéal

dans

L'analyse Infinitésimale

1891

L´homme se trouve placé entre deux mondes: le monde réel et le monde idéal. Ses coutumes, son éducation, le milieu où il vit, le poussent vers l'un ou vers l'autre, à moins qu'une force supérieure ne le maintienne sur leur ligne de démarcation.

De là résultent une infinité d'écoles philosophiques qui prennent leurs lettres de naturalisation dans l'un ou l'autre de ces mondes, et où se reflètent les tendances particulières de leurs chefs: ceux-ci, en outre, non contents d'imprimer une direction déterminée aux connaissances spéciales qu'ils professent, tâchent d'assujettir à la même marche les diverses sciences qui puisent leur origine dans la philosophie.

C'est ainsi que, suivant les doctrines philosophiques auxquelles ils se rattachent, on distingue, parmi les mathématiciens, les empiriques et les idéalistes, qui tirent leurs matériaux les uns du monde réel, les autres du monde idéal.

Ce sont, dans nos temps modernes, les idéalistes qui sont le plus en faveur, malgré les exagérations qu'on peut leur reprocher. N'en sont-ils pas venus à supposer que d'un point donné il est possible de tracer à une droite; plusieurs parallèles, une seule ou aucune? N’avons- nous pas vu aussi les réformateurs de la géométrie d'Euclide pousser la hardiesse jusqu'à imaginer des sphères de quatre ou cinq dimensions et même davantage?

Ce sont là des tendances fâcheuses, car leurs doctrines s'écartent trop de ce qui est réel pour avoir de l'autorité, et il est à craindre que, marchant toujours dans cette voie, ils ne finissent par tomber dans l'absurde. On pourra applaudir à la pénétration d'esprit de quelques-uns de ces penseurs, mais l'héritage qu'ils laisseront à la science des mathématiques sera bien pauvre à côté de celui que nous ont légué les Descartes, les Leibnitz, les Monge, etc.

Ces graves considérations nous ont déterminé à développer le thème suivant:

«***Influence du monde réel et du monde idéal dans l'analyse infinitésimale***»

I

Une loi régit la nature entière, c'est celle de l'unité dans la variété. Elle constitue l'expression abrégée des relations étroites que l'on découvre de jour en jour non pas seulement chez les êtres minéraux, mais encore chez les êtres organiques, c'est-à-dire entre les végétaux et les animaux, et qui viennent toutes se résumer, pour ainsi dire, dans l'homme: l'homme, à son tour, devient le compendium de toute la création, le trait d'union entre ce qui est visible et ce qui est invisible, entre la matière et l'esprit; entre ce qui est fugitif ou périssable et ce qui est immuable ou éternel.

Cette unité, sublime au milieu d'une si grande variété, l'homme, un jour, l'a sentie et comprise dans toute sa plénitude: c'était avant sa prévarication. Mais aussitôt que l'arrogance et l'orgueil se furent emparés de lui, ces rayons dont son front était éclairé se dissipèrent, et il resta plongé dans la plus morne et la plus triste solitude. Néanmoins l'empreinte du sceau de l'Eternel n'était pas entièrement effacée.

L'éclat étincelant de la divinité se laissait encore entrevoir, et cette propension à l'harmonie et à l'unité au milieu de la variété ne restait pas inaperçue aux yeux de l'homme. Elle ne se manifeste pas toujours sans doute d'une manière claire et ostensible, mais du moins elle commence à être remarquée par les hommes des temps anciens; ainsi Platon disait déjà que Dieu est le grand architecte et le géomètre de l'univers.

Cependant le principe de l'unité et du concert éternel ne se présente pas avec lucidité dans les temps qui précédèrent la Croix; il a fallu pour cela que Dieu, dans sa miséricorde, envoyât sur la terre Celui en qui étaient incarnés les trésors de vie que le premier des mortels avait perdus pas sa désobéissance.

Depuis lors, l'homme éprouve un véhément désir d'acquérir la vérité.

Mais deux abîmes s'ouvrent constamment sous ses pieds: ce sont le matérialisme et l'idéalisme. Certes, l'idée d'unité qui domine sans cesse dans l'esprit humain aura pu exercer son influence sur les délires fréquents que l'on observe dans quelques écoles philosophiques; le philosophe, en cherchant le fondement de nos connaissances, perd quelquefois de vue que tout résultat cognitif fourni par la relation entre l'élément connaissable et l'élément connaissant, implique, outre une affirmation correspondant à l'identité de l'être comme étant constitutive de la vraie unité, une négation relative comme confirmation de ce qui est varié. Ces deux idées opposées, quoique très concrètes, sont assez puissantes pour détruire non seulement la subjectivité de Fichte et l'objectivité de Schelling, mais encore la doctrine de Hegel, qui s'appuie sur l'identité de l'idée.

Dans tous ces systèmes philosophiques il se reflète une tendance très prononcée vers l'unité, de sorte que l'idée d'unité peut paraître au premier abord comme étant une base suffisante pour compléter la sphère de nos connaissances. Mais si nous nous renfermons dans le point de vue restreint où il est donné à l'esprit humain d'envisager la science, nous reconnaissons bientôt que cette base est insuffisante et que, pour être profitable, il lui faut, conformément au grand principe de contradiction, reposer à la fois sur l'unité et sur la variété.

De toutes ces considérations il ressort que, pour l'établissement d'une saine et judicieuse philosophie, il est indispensable d'avoir égard tout à la fois au monde réel et au monde idéal, et qu'il convient par suite de réunir dans la notion de l'être le subjectif et l'objectif, quand même ce ne serait jamais que d'une manière purement relative.

Il faudra donc, pour les investigations philosophiques, accepter forcément trois périodes: la période empirique, la période abstractive et la période déductive, afin de pouvoir contrôler, avec le scalpel de la critique la plus sévère, les erreurs que propagent un grand nombre de systèmes philosophiques. Ce n'est ici ni le lieu ni l'occasion d'en faire une étude complète, et si nous touchons à ce point, ce n'est que d'une manière accessoire. Nous nous bornerons donc à signaler que les écoles philosophiques qui se sont le plus occupées de mathématiques sont celles qui appartiennent au positivisme, au système de Krause et au scolasticisme.

Le positivisme, qui a pour chef Auguste Comte, est un système d'une simplicité apparente, mais possédant une base peu étendue; car, en accordant une trop grande prépondérance à la période empirique, il néglige la période abstractive et la période déductive, rapetissant ainsi l'aspiration naturelle qui porte l'esprit humain vers l'idéal: aussi peut-on affirmer que les principes du positivisme conduisent directement à l'un des abîmes que nous avons indiqués: au matérialisme.

Dans le système de Krause, c'est tout l'opposé: la période abstractive y domine. Ce système a pour base l'intuition du *moi*, et par le moyen de la raison suffisante, l'homme s'élève à la connaissance de Dieu pour descendre de ce point culminant à la découverte des énigmes que nous présentent la nature, l'humanité, l'esprit humain. C'est donc, on le comprend aisément, une chimère ou mieux une illusion que de vouloir se pénétrer de l'existence et de la nature de Dieu, en prenant pour point de départ une base étroite et bornée comme l'est notre *moi*, car il doit nécessairement en résulter une fausse conception de l’Etre suprême et par conséquent une perception erronée de tout le surplus. On en trouve une preuve éclatante dans les affirmations des adeptes de cette doctrine, lorsqu'ils soutiennent que le monde est nécessaire, incréé, éternel et infini. Le système de Krause marche ainsi tout droit à l'autre abîme: l'idéalisme.

En conséquence, ni le positivisme, ni le système de Krause ne peuvent offrir une base solide pour les études philosophico-mathématiques, car les deux écoles pèchent par manque d'équilibre entre les facteurs constitutifs de nos connaissances, et l'une et l'autre tendent, dans leurs deux phases, au panthéisme, fruit naturel des doctrines de Spinoza.

Ces raisons si puissantes nous amènent à conclure que les mathématiques ne trouveront de base sûre que dans le scolasticisme, puisque, seul entre tous les systèmes, il ne laisse de côté aucune des trois périodes d'investigation: l'empirique, l'abstractive et la déductive. Il y aura donc profit à suivre la voie qui nous est tracée par cette école, et nous avons la conviction que ses doctrines sont de nature à nous aider assez puissamment pour nous permettre de résoudre les problèmes les plus ardus de la quantité infinitésimale.

Quand l'homme dirige ses regards vers la voûte céleste, il est pris d'un mouvement de curiosité qui le pousse à scruter les mystères que la nature enserre dans ses replis; son âme, agitée par le sentiment du beau, du grand, du sublime, va s'égarer jusque dans les splendides régions de l'infini.

Mais si l'homme a son imagination anéantie devant la magnificence de ce qui est infiniment grand, sa surprise s'accroît bien vite lorsqu'il veut fixer son attention sur ces êtres infiniment petits qui l'environnent de toutes parts et qui, malgré leur petitesse, ne laissent pas d'être assujettis à des lois invariables. C'est ainsi que Pline soutient que la grandeur de la nature ne se manifeste jamais à nous aussi splendide et aussi merveilleuse que lorsque nous la contemplons dans ses éléments les plus petits. Ces impressions, auxquelles pas un de nous n'a échappé dans son enfance, nous donnent lieu de croire que nous acquérons nos premières notions dans le monde réel, et que ces notions, exerçant leur action dans notre *moi*, y provoquent une force assez puissante pour réveiller nos idées; puis celles-ci, passant par le crible de nos facultés, nous enlèvent successivement les impuretés qui procèdent du monde réel, atteignent de nouveaux points de vue, et parviennent ainsi à nous éloigner toujours davantage du point de départ, de sorte que lorsque nous entrons dans le domaine de l'intelligence pure, nous voyons s'évanouir tout les objets, toutes les formes et toutes les lignes que le monde réel est susceptible de nous fournir. Ainsi, la ligne droite que conçoit le mathématicien peut être considérée comme la limite de toutes celles que lui offrent la nature ou l'art perfectionné de l'homme.

Mais le mathématicien moderne ne se contente pas de cela; il tend à se séparer de plus en plus du monde réel; puis il abandonne la géométrie d'Euclide pour en établir d'autres, et il finit par se perdre dans un gouffre de dimensions qui n'ont rien de réel, sans qu'il parvienne jamais à en tirer, même sous forme de croquis, celle qui peut, par exemple, correspondre à l'hyper sphère. Les bases idéales sur lesquelles il s'appuie sont sans doute en état d'exercer une certaine influence sur les progrès des sciences mathématiques; mais elles peuvent aussi être une source d'erreurs, car il est fort périlleux de s'aventurer par des chemins inconnus, qui finissent par nous écarter tout à fait de la région où la prudence conseille de rester.

Donnons à ces considérations une représentation graphique. Imaginons pour un moment, par exemple, deux sphères qui se coupent, représentant l'une le monde réel, l'autre le monde idéal. Supposons, en outre, une troisième sphère représentant la science des quantités et qui couperait les deux premières de manière à renfermer leur partie commune. Cela posé, nous pouvons parfaitement soutenir que les points situés sur la partie commune aux trois sphères seront à l’abri de toutes les attaques. Quant à la partie de la sphère idéale qui reste libre, il n'y a pas de doute qu'elle a fourni des résultats surprenants entre les mains de Haine, de Cantor, de Gauss, de Riemann, de Niemann, de Tilly, de Fourrier; mais cela s'est fait, pour ainsi dire, comme par un certain art de divination, c'est-à-dire que, sans s'en être rendu compte, ces hommes de génie ont imprimé aux points qu'ils ont pris pour base de leurs investigations un mouvement qui s'est étendu vers la partie commune aux trois sphères précitées. Quoi qu'il en soit, il est fort à craindre que le mathématicien se perde dans cette région purement idéale, ou bien souvent il ne trouve pas pour bâton d'appui des algorithmes précis et déterminés, et où les dimensions géométriques augmentent à mesure que croissent les exigences de l'analyse.

M. Paul du Bois-Reymond constate que l'homme a une propension naturelle vers l'idéalisme: c'est tellement vrai que les empiriques eux-mêmes, dans différents cas, sans s'en apercevoir et presque à leur insu, passent dans le camp idéaliste.

Nous pouvons donc, sans aucune hésitation, affirmer qu'il n'est possible de se soutenir et de rester en permanence ni dans le monde réel ni dans le monde idéal. Cela explique pourquoi les empiriques finissent par devenir des idéalistes, et comment ceux-ci, à leur tour, en arrivent à se faire, jusqu'à un certain point, empiriques. En conséquence, puisque notre base est le monde réel, et que d'autre part il ne nous est pas permis de faire abstraction du monde idéal, force nous est de marcher entre les deux, à condition de ne jamais manquer de prendre le monde réel comme moyen de contrôle pour sanctionner nos connaissances.

En résumé, c'est en faisant fonctionner d'une manière régulière et harmonique les trois périodes d'investigation empirique, abstractive et déductive, que l'on pourra concevoir enfin l'espérance de toucher au terme de ces divagations étranges où se laisse entraîner l'esprit humain dans ses aspirations vers l'idéal, comme aussi de voir cesser ces conceptions vagues ou erronées que produit, dans l'observation du réel, l'exercice matériel de nos sens imparfaits.

I I

Afin de sortir du cercle de fer où nous nous trouvons rivés, il est de tout point nécessaire de fixer nos regards sur la vrai métaphysique du calcul. Il est pénible de voir quelques mathématiciens oublier ou déprécier les notions les plus fondamentales du calcul différentiel et intégral; on dirait qu'ils craignent d'avancer comme s'il s’agissait de marcher sur des charbons ardents.

Le matérialisme, on ne saurait le nier, est une des principales causes des déceptions qu'éprouve le penseur, lorsqu'il entreprend de creuser plus avant l'aride terrain de la science; mais si, adoptant les théories de quelques mathématiciens modernes, il s'appuie sur l'idéalisme pur, ses désenchantements sont encore bien plus grands.

Les soubassements d'un édifice aussi colossal que celui des mathématiques demandent à être raffermis: c'est une nécessité qui s'impose et au sujet de laquelle tout le monde est d'accord; mais c'est seulement en introduisant la métaphysique dans le calcul que l'on obtiendra la consolidation désirée.

Oui, en vérité, il convient que les mathématiques, tout en gardant le monde réel comme champ d'expérimentation, s'élèvent à une telle hauteur qu'elles soient hors de tout ce qui est contingent. C'est ainsi que la notion de l'indéfiniment petit, auquel on donne à tort la dénomination d'infiniment petit, échappe à certains esprits qui ne savent concevoir que ce qui frappe la vue et ne croient qu'à ce qu'ils peuvent toucher de leurs propres mains.

Laissons donc les matérialistes de nos temps railler le scolasticisme; laissons A. Compte se plaindre de la métaphysique du temps de Leibnitz. C'est sur ce terrain seulement que peuvent se justifier les principes fondamentaux de l'analyse mathématique. C'est en nous élevant par l'abstrait qu'il nous sera permis peut-être d'arriver à simplifier les algorithmes de manière à surmonter chaque jour de nouvelles difficultés; mais il ne faut jamais perdre de vue que ces solutions doivent correspondre plus ou moins à tous les cas qui peuvent se présenter à nous dans le monde réel.

Les idéalistes eux-mêmes ne sauraient échapper à notre censure: ils prennent l'infiniment petit comme fondement de leurs théories et méconnaissent ainsi l'indéfiniment petit qui seul est en état de former la vraie base des mathématiques, car il offre des ressources complexes qu'il n'est pas possible de trouver dans l'idéalisme pur.

La science des mathématiques a présenté dans son développement plusieurs solutions de continuité que l'on est parvenu, plus ou moins, à corriger partiellement, d'une façon concrète, mais non d'une manière générale. Dans les différentes notions de la quantité qui se sont successivement formées depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, on a constamment remarqué l'absence de cette unité qui devrait exister dans une science si vaste et si profonde. Le défaut de précision dans les algorithmes a enfermé les mathématiciens dans un cercle de contradictions que font ressortir d'une manière palpable toutes les discussions passionnées qui eurent lieu dans le siècle passé. De nos jours, au milieu de cet esprit d'indifférence qui caractérise notre époque, on voit percer comme une espèce de crainte de s'attaquer aux matières ardues, telles que, par exemple, celles concernant le zéro et l'infini, que l'on fait entrer dans les calculs comme quantités, ce qui, à notre avis, a jeté l'infection dans le champ des mathématiques.

Le moment est donc arrivé de tirer le voile pour montrer à tous les yeux les trésors précieux d'une science qui doit occuper une des premières places parmi les sciences positives.

La plus grande difficulté pour le meilleur développement des mathématiques consiste dans le choix de la quantité avec laquelle toutes les autres doivent être mises en relation. Cette quantité nous apparaît dans le système de Leibnitz sous la dénomination d'infiniment petit, quoique ce ne soit en réalité autre chose que l'indéfiniment petit. On ne saurait mieux comparer l'indéfiniment petit qu'aux racines d'un arbre touffu et gigantesque, dont le tronc représenterait la quantité finie et dont les branches, se perdant dans l'espace, représenteraient l'indéfiniment grand.

Le zéro, comme origine des quantités aussi bien que comme signe algorithmique, n'a pas de raison d'être. Il en est de même de l'infini qui, pris d'abord comme représentation de la limite de toute valeur numérique imaginable de la variable, passe bientôt à être considéré comme une quantité, quoiqu'il n'ait rien de ce qui la régit, puisqu'il n'est pas assujetti à l'idée du plus ou du moins. On en est venu même jusqu'à ne pas craindre le ridicule de considérer différents infinis relatifs, comme si l'on pouvait admettre simultanément des limites différentes dans une variable.

De toutes ces considérations il ressort que la connaissance de la quantité doit reposer sur des principes plus solides et qu'il convient de ne jamais s'écarter de l'idée que nous nous en sommes formée. En effet, dans la genèse de la quantité nous ne trouvons qu'une seule idée-mère: la variabilité, le *plus* et le *moins*, conditions qui n'existent ni dans le zéro ni dans l'infini.

Si maintenant nous considérons cette variabilité, nous y trouvons deux états distincts, suivant que les limites entre lesquelles elle s'exerce sont connues ou inconnues: dans le premier cas, elle fournit la quantité finie; dans le second, elle engendra directement les notions de l'indéfiniment petit et de l'indéfiniment grand. Douter de l'existence de ces quantités parce que nous ne pouvons pas les préciser, c'est comme si nous doutions de la beauté dans les arts parce qu'il ne nous est possible ni de la représenter ni de la définir, ou de l'existence de Dieu parce qu'il ne nous est pas donné de le voir.

Il ne faudrait pas croire cependant qu'en adoptant l'indéfiniment petit pour point départ de la quantité, nous prétendions jeter les fondements de la science sur une base fragile, sur quelque chose de chimérique ou de fantastique. Nous ne craignons nullement, à cet égard, le dédain des empiriques. C'est même en empruntant leurs propres armes que nous comptons justifier l'existence de ces quantités, seules capables à nos yeux de consolider assez fortement les soubassements de l'édifice que nous nous proposons d'élever.

Qu'il nous soit permis maintenant d'entrer dans quelques détails pour faire mieux saisir l'esprit de notre méthode.

Toute entité qui est susceptible d'être comparée par quotient dans ses différents états, en donnant pour résultat une forme connue et déterminable en arithmétique, est assujettie à la quantité mathématique. Les entités les plus indiquées, suivant le point de vue sous lequel nous envisageons la quantité, se rapportent à l'espace et au temps. Ces deux facteurs principaux des mathématiques peuvent ainsi s'étudier, soit ensemble, soit séparément. Si l'on se borne à considérer l'espace déterminé dans son étendue, on crée la géométrie; si l'on ne considère que le temps, on forme l'arithmétique, et enfin, si l'on étudie l'étendue conjointement avec le temps, on engendre la cinématique, l'étude la plus complexe des mathématiques.

Cela posé, quand on a deux lignes, deux surfaces ou deux volumes et qu'on les compare par quotient, nous pouvons rapporter les deux *entités étendue*, dans leur caractère déterminé de lignes, de surfaces ou de volumes, à une autre entité congénère qui se prendra pour unité, et le rapport numérique résultant de cette opération exprimera la relation des deux étendues données. La forme connue et déterminée est, dans ce cas, un nombre qui peut être entier, fractionnaire ou incommensurable. Quand les entités ont rapport au temps, donnant naissance à la quantité *discrète*, il y a lieu aussi de rechercher la relation par quotient en comparant l'entité donnée avec une autre qui se choisit pour unité et qui diffère en accidents relativement à la première. Dans ces conditions, on peut comparer des quantités dont la nature est complètement connue et déterminée, pour obtenir ce que l'on pourrait appeler la forme *modulaire*, c'est-à-dire le résultat de la comparaison.

Cette comparaison offre surtout de l'importance quand elle s'applique à des quantités qui ne sont pas finies, comme par exemple quand leur rapport donne naissance à la dérivée d'une fonction, laquelle dérivée n'est autre chose qu'une forme déterminée et connue de la fonction qui enlaçait les deux premières variables avant de passer à la catégorie des indéfiniment petits. Un de ces indéfiniment petits, quoique se trouvant hors de toute mesure assignable, peut devenir dépendant du produit des deux éléments: l'un de même nature, l'autre déterminable par l'arithmétique.

Il n'est pas douteux que ce dernier indéfiniment petit ne doive être le germe de toutes les autres quantités, puisqu'il en peut sortir non seulement la quantité finie, mais encore l'indéfiniment grande. Il convient toutefois de ne pas confondre cette dernière avec l'infinie: en effet, si l'on considère l'infini, abstraction faite de tout élément fourni par l'imagination, ce concept de l'infini ne peut renfermer aucune autre idée que celle de l'entité sans limites; si donc on fait descendre cette idée d'infini de la hauteur où elle se trouve, elle cesse nécessairement d'être ce qu'elle était auparavant.

Ces fausses conceptions expliquent les divergences d'opinions que l'on rencontre parmi les mathématiciens lorsqu'ils dissertent sur l'infiniment petit et sur le symbole de l'infini. Charles Dupin dit que Lagrange démontre Leibnitz; le P. Gratry soutient qu'au point de vue de la quantité l'élément infinitésimal est absolument nul; Ampère s'écrie: «*Non, non, il n'est pas très petit, il est absolument nul*» Poisson suppose que les infiniment petits ont une existence réelle, contrairement à l'opinion de quelques-uns qui prétendent que c'est seulement un moyen d'investigation livré à l'imagination des géomètres; Lagrange proscrit les fils et accueille le père, car, tout en acceptant l'infini, il n'admet pas les infiniment petits; Duhamel explique le calcul infinitésimal sans avoir recours au principe de Leibnitz; Fontanelle considère deux espèces de zéros: l'absolu et le relatif; Fabry les divise en déterminés et indéterminés; Cauchy dit qu'une quantité variable devient infiniment grande lorsque sa valeur numérique croit indéfiniment de manière à converger vers la limite *infini*. A ce point, M. Fleury demande si le signe *infini* représente une grandeur, pour qu'une variable ne puisse l'atteindre ni le surpasser, et s'il est admis que le signe en question ne représente pas une grandeur, comment pourrait-il en être la limite et comment la variable convergerait-elle vers ce signe? En un mot, suivant l'expression d'un auteur humoristique, le signe *infini* serait le symbole de la tour de Babel.

Dans la géométrie, telle que nous la pouvons envisager, il n'y a de place que pour l'indéfini, c'est-à-dire une quantité dont la valeur augmente de plus en plus, sans qu'il soit en notre pouvoir de vérifier quand elle prend fin, car il n'est personne d'ailleurs qui sache où finit l'univers. L'unique chose que nous puissions affirmer, c'est que, quelque grande que soit la quantité dont on s'occupe, l'imagination vient toujours nous pousser à en étendre les limites.

Ainsi, la variabilité, l'ignorance des limites et, par conséquent, l'impuissance de détermination de la mesure, constituent les caractères distinctifs de la quantité indéfinie. Grâce à l'emploi de l'indéfiniment petit, toutes les autres quantités se justifient. Prouvons donc que cet indéfiniment petit existe en géométrie.

Prenons, par exemple, une ligne limitée, et supposons qu'un point mobile partant de l'un des bouts, la parcoure sous l'influence d'une loi quelconque qui l’empêche d'arriver à l'autre extrémité. Si d'abord il en parcourt la moitié, puis la moitié du premier reste, puis encore la moitié du second reste et ainsi de suite successivement, on conçoit aisément que le point mobile n'arrivera jamais au bout de la ligne. Il y en a cependant qui sont persuadés que le point mobile pourrait rencontrer le point extrême de la ligne en employant un temps infini. Mais cette objection est facile à réfuter: en effet, il n'est aucun cas où il soit possible d'imaginer un temps infini, car un temps, quelque long qu'il soit, ne saurait, selon Cauchy, être considéré comme infini, du moment que l'on sait quand il commence et quand il se termine. L'éternité n'existe qu'en Dieu seul, et, dans notre humble et misérable condition de mortels, nous ne sommes pas en état de nous expliquer ce qui est. En outre, dans le cas précité, quoique la vitesse ne soit pas une donnée obligatoire du problème, il nous est loisible de la prendre à volonté, de sorte que si le point mobile a employé, par exemple, un million de siècles pour passer d'une position à une autre, nous pouvons en même temps faire la vitesse cent fois, mille fois plus grande, afin que le point mobile parcoure le même espace dans une seconde: cela signifie que, dans les mouvements dont il s'agit, nous sommes libres de faire complètement abstraction du temps.

Notre point mobile peut donc s'approcher de plus en plus de l'extrémité de la ligne qu'il parcourt, mais la raison, qui représente ici le monde idéal, nous dit qu'il ne parviendra jamais à l'atteindre; d'autre part, l'imagination, représentant le monde réel, apparaît et ne cesse de nous crier: *avance, avance, avance,* sans pouvoir jamais être rassasiée.

Ces deux forces opposées doivent naturellement engendrer une résultante, et cette résultante est l'indéfiniment petit, notion nécessaire et forcée à laquelle on ne saurait échapper, conception d'un *quelque chose* qui, sans qu'on puisse le réduire à rien, est hors de toute mesure, sujet à la variabilité et sans limites appréciables. Qui est-ce qui, en présence de ces considérations, osera soutenir que les indéfiniment petits sont des entités factices, des embryons issus de l'imagination fiévreuse du mathématicien?

Peut-être viendra-t-on nous demander en quoi consiste ce *quelque chose.* Mais ne suffit-il pas que son existence soit prouvée pour qu'on ne puisse se refuser à l'accepter? D'ailleurs l'expérience vient toujours nous répondre des principes géométriques qui se forment dans les hautes régions de notre entendement: la preuve se fait quelquefois exactement, d'autres fois seulement d'une manière approximative, mais l'on sait que, dans ce dernier cas, la différence est chaque fois moindre à mesure que se perfectionnent les moyens matériels dont nous nous servons pour la représentation des quantités.

L'être complexe de l'homme, synthèse de deux mondes différents, doit tenir de l'un et de l'autre et se mettre d’accord avec eux, car, s'il en était autrement, il serait une note discordante au milieu de cet admirable et sublime concert de la nature. Aurions-nous le droit de nier l'existence du triangle général, parce que tous ceux que l'on peut imaginer ou peindre sur la toile ne correspondent pas au premier?

L'indétermination dans l'idée d'étendue, quand cette étendue est envisagée sous un état moindre que toute quantité appréciable, quelque minime qu'elle soit, résout parfaitement l'idée exprimée à tort par les mots *infiniment petits*. Il convient d'ailleurs de faire remarquer que les points illimités des scolastiques sont équivalents aux indéfiniment petits. C'est ainsi que l'on se trouve à même de concevoir les différents ordres de ces sortes de quantité, de même que ceux des indéfiniment grands, ce qui, d'autre façon, serait impossible, à moins d'adopter le principe de certain philosophe, d'après lequel il existe des infinis qui ne sont pas infinis. L'illustre Hoüel fournit la preuve de l’existence de tous ces ordres divers au moyen d'une démonstration géométrique remarquable et pleine de simplicité.

Ici se présente une objection qui, à première vue, paraît être d'une extrême transcendance. Comment ces quantités peuvent-elles s'assujettir aux mêmes opérations que les quantités finies? Si, au lieu de considérer la quantité indéfinie, nous considérions l'infini, alors certainement personne ne résoudrait la question, puisque l'infini est un élément étranger à la notion de quantité, tandis que l'on sait déjà, ainsi que nous l'avons fait plus haut clairement ressortir, que la quantité indéfinie conserve l'idée-mère de la quantité: le *plus* ou le *moins*, la variabilité. L'unique différence qui existe entre les quantités finies et les quantités indéfinies, c'est qu'on ne connaît pas les limites de ces dernières et qu'il est impossible de les déterminer. Voilà donc l'objection parfaitement réfutée, et ainsi se trouve une fois de plus justifiée la raison pour laquelle la quantité infinie doit, en mathématiques, être remplacée par la quantité indéfinie.

Bientôt, grâce à ce choix, les opérations algébriques acquièrent la faculté d'étendre leur domaine dans les trois catégories de quantité que l'on peut imaginer, c'est-à-dire la quantité indéfiniment petite, la quantité finie et la quantité indéfiniment grande. Il importe, néanmoins, de déterminer quel est l'élément qui prévaut quand on fait entrer dans une égalité différentes catégories de quantité. Pour la solution d'un problème aussi transcendantal, il suffira de bien se pénétrer qu'il est de tout intérêt de réduire toujours l'égalité à des quantités finies. Ne perdons pas de vue, par conséquent, que toute égalité doit être résolue dans le *fini*.

Si donc on a plusieurs indéfiniment petits, on divisera tous les termes par ceux de l'ordre inférieur, afin que tous ceux d'ordre supérieur disparaissent, fournissant ainsi le *fini* comme résultat de la division de quantités d'un même ordre. De là vient que c'est toujours l'ordre inférieur qui prévaut dans une somme d'indéfiniment petits. S'il s'agit d'une somme d'indéfiniment grands, c'est l'ordre supérieur qui prévaudra, puisque les ordres des quantités indéfinies partent de la quantité finie que l'on peut considérer comme étant de l'ordre zéro et que les indéfiniment grands se développent en sens contraire des indéfiniment petits. Quant aux ordres définitifs des quantités qui se multiplient, se divisent, etc., on les déduit aisément des principes établis, attendu que l’indéfiniment petit peut ainsi être pris pour type, les ordres de ceux-ci devenant, dans cette hypothèse, positifs, et ceux des indéfiniment grands, négatifs. De toutes façons, il est entendu que l'ordre d'un produit est égal à la somme des ordres, celui d'un quotient égal à leur différence, etc., et ainsi de suite, obtenant de la sorte des résultats analogues aux logarithmes. Toutes ces considérations nous autorisent à conclure que les opérations relatives à ces espèces de quantités ne se limitent pas à des cas particuliers, mais peuvent s'appliquer aussi à des cas généraux, en étendant chaque fois davantage l'idée de quantité.

Dans l'arithmétique, il n'entre que des quantités finies, déterminées et en même temps positives; dans l'algèbre, on peut déjà considérer la quantité négative ou imaginaire; enfin les quantités apparaissent sans valeur assignable, et c'est là l'idée la plus générale que l'on ait pu se faire de la quantité.

Nous allons maintenant terminer cette partie de notre travail en relevant le dernier et peut-être le plus important des reproches qui aient été dirigés contre la différentielle de Leibnitz, laquelle n'est justement autre chose que cet indéfiniment petit dont nous venons de prouver l'existence et d'indiquer le fonctionnement.

En posant une égalité quelconque, on suppose tacitement que les deux membres se rapportent à une même catégorie de quantités. Il est évident que chaque égalité est plus ou moins une conséquence de l'identité $A = A$, où l'un de ces A se modifie, en se transformant selon les convenances du problème, sans que, dans ses différentes modifications, il cesse jamais d'être égal à l'autre A, moyen prodigieux dont se prévaut l'intelligence humaine pour favoriser ses investigations qui, par leur nature, sont d'une lenteur excessive. C'est comme un rayon de lumière qui lui facilite l'exécution de centaines d'analyses qu'il serait impossible de réaliser directement. Naturellement, on ne doit jamais, dans ces excursions, détourner les quantités de leur mode d'être primitif; aussi faut-il, dans toute égalité, veiller à ce que la quantité persiste sous certaines conditions. C'est pour cela que, dans la géométrie ordinaire, il n'y a pas d'égalité possible entre la ligne droite et la ligne brisée qui aboutit à chacune des extrémités de cette droite, tandis que dans les quaternions, dont le principe se reflète dans la théorie des quantités complexes, cette égalité peut avoir lieu, parce que la quantité y est considérée dans un sens plus étendu. Voilà pourquoi aussi, lorsqu'un membre d'une égalité se résout en une quantité incommensurable, nous ne pouvons pas admettre que l'autre se résolve en quantité commensurable. Ainsi donc, si la catégorie des quantités qui se trouvent dans deux membres de l'égalité doit être déterminée dans le *fini*, on ne saurait donner aucune signification aux indéterminées qui viendraient s'introduire par suite des circonstances du problème: c'est pour cette raison que $A + \alpha$ peut être considéré comme égal à A, si A est une quantité finie et α un indéfiniment petit.

Les principes que nous venons d'exposer suffisent amplement pour justifier la méthode de Leibnitz, à côté de laquelle toutes les autres, telles que celle des indivisibles de Cavalieri, celle des coefficients indéterminés de Descartes, celle des premières et dernières raisons, celle des fluxions de Newton, celle des limites, etc., paraissent impuissantes, attendu que leurs théories scientifiques reposent sur des bases qui offrent très peu de consistance et s'éloignent même quelquefois de la vrai notion de la quantité. Et s'il est vrai que tous ces illustres mathématiciens sentaient intérieurement l'existence de la différentielle de Leibnitz, ils ne surent pas, comme lui, en tirer parti de façon que leurs théories pussent résister à tous les chocs du temps.

I I I

Dans l'ordre métaphysique, de même que dans l'ordre matériel, l'origine et l'essence des choses sont hors de notre portée; nous ne pouvons comprendre que leurs relations, leurs qualités et leurs effets sensibles.- Les sens préparent les idées; mais ensuite l'entendement les forme, l'imagination les peint, la mémoire les conserve, l'attention les fixe, la réflexion les agite et les compare, le jugement les distingue ou les confond, les sépare ou les unit, enfin la raison les déduit les unes des autres, et ainsi s'entrelacent successivement tous les anneaux de cette chaîne, pour aboutir à un tout dont l'harmonie parfaite est garantie par le jeu solidaire de toutes les facultés qui ont été mises en mouvement à cet effet. Mais l'homme ne se contente pas des connaissances que peut lui procurer la science naturelle; il existe en son intérieur un désir très violent, communiqué par le souffle de Dieu, qui le pousse à étendre les limites étroites de sa raison; il prétend s'élever à des régions nouvelles et inconnues, comme quand il veut, par exemple, scruter les mystères que renferme la quantité hors du *fini*. Rien de plus louable assurément que ces aspirations, mais il restera sur place s'il ne lui tombe d'en haut un rayon lumineux qui vienne le guider vers cette géométrie épurée, patrimoine exclusif des vrais génies et des esprits profondément religieux.

Quand on songe aux énormes efforts que l'homme doit faire et aux veilles prolongées qu'il lui faut passer pour conquérir une nouvelle vérité scientifique, on sent combien lui est nécessaire cette lumière divine. C'est grâce à elle d'ailleurs qu'il peut garder l'espérance de cultiver avec fruit les sentiments les plus nobles de son âme et de recueillir, dans l'échelle indéfinie des connaissances humaines, les trésors les plus estimables et du plus grand prix, car, même dans le cas où il se prévaudrait de la raison pure, quand il a l'outrecuidance de vouloir outrepasser les limites naturelles que Dieu lui a marquées, il a coutume de tomber dans des déboires et des déceptions inénarrables, en même temps qu'il remplit sa tête de fantômes.

Penser ainsi n'implique nullement faiblesse d'esprit, ni ne suppose un préjugé; la pensée ne se trouve point pour cela enserrée dans des moules étroits. Un nombre considérable de noms glorieux, bien connus de tous, témoignent hautement en faveur de cette assertion: dans la poésie, le Tasse, Milton, Corneille, Racine, Fray Luis de Leon; dans l'éloquence, l'histoire et la philosophie, Bossuet, Fénelon, Massillon, Bourdalouë, Bacon, Pascal, Euler, Newton, Leibnitz, Balmes; dans les beaux-arts, Michel-Ange, Murillo, Léonard de Vinci, Pergolèse, Stradella et beaucoup d'autres, qu'il serait trop long d'énumérer et qui, tous, cherchèrent leur inspiration dans la lumière radieuse du surnaturel.

En présence de tels exemples, on ne saurait en aucune façon nous accuser de détourner notre âme du véritable progrès scientifique, parce que nous la maintiendrons avec fermeté dans le chemin d'une foi vive et ardente, et s'il est vrai que, pour quelques artistes et hommes de science, ce chemin ne paraisse pas le plus à propos pour arriver au perfectionnement voulu des sciences et des beaux-arts, il n'échappera à personne qu'en défendant l'union intime entre tous les éléments qui contribuent au complet développement de l'être humain, nous cherchons à obtenir leur régulier et harmonique fonctionnement, de manière à lui permettre d'approcher autant que possible de la perfection.

Bien loin d'avoir la prétention d'arrêter la marche naturelle du progrès humain, nous sommes les premiers à admirer les trésors scientifiques que nous ont légués les générations passées. Comment ne pas être saisi d'admiration lorsqu'on voit Newton synthétiser les lois de la gravitation de Kepler! Comment ne pas être pris d'étonnement en trouvant pour principes de dynamique universelle ces correspondances et relations numériques entre le son et la lumière, qui font passer de force la chimie dans le dynamisme pour la délivrer de l'empirisme qui l'étouffe! Comment ne pas sentir la beauté de la science quand les grandes conceptions d'Euler, de Legendre, de Jacobi, d'Abel et de Gudermann viennent de faire connaître la belle étude des fonctions, qui a porté les mathématiques à une hauteur si prodigieuse!

L'homme, amant du beau, du bon et du vrai, se sent poussé à suivre les traces des esprits supérieurs qui l'ont précédé et, parcourant dans tous les sens cette mer sans limites qui l'entoure, il se plaît à marquer sur la carte des connaissances humaines des points nouveaux, semblables à des îles inconnues ou à des péninsules inexplorées. Mais si cet enthousiasme est tout naturel, il ne faut pas oublier que ces investigations doivent se réaliser sans quitter le gouvernail de la main et en gardant toujours les yeux fixés sur ce phare éblouissant dont la lumière, d'une intensité extrême, est destinée à nous guider, en nous écartant des écueils innombrables qui semblent se multiplier autour de nous, surtout lorsque nous nous éloignons du bord.

Ranimons donc le courage de tous ceux qui se sentent entraînés par le puissant attrait de la science, et propageons la méthode des vrais principes que l'on doit suivre dans la recherche de la vérité. Inspirons aux jeunes gens le goût de l'étude, mais qu'ils n'aillent pas y chercher la vaine satisfaction d'un sentiment d'orgueil ni même un moyen de lucre, et qu'ils s'y livrent simplement et uniquement par pur amour pour la science; faisons surtout tous nos efforts pour redresser leurs sentiments et les diriger en même temps vers l'unique foyer qui éclaire et réchauffe de sa flamme tout genre d'inspiration noble et sublime. Ce sera alors une vraie jouissance de l'âme que de voir comment cette jeunesse, embryon des générations futures, portée sur les ailes de son inspiration, s'élèvera vers les hautes régions de l'infini, remplissant son esprit de ce *quid divinum* qui fait jeter un regard de mépris sur tout ce qui est terrestre, pour recueillir des bonheurs anticipés. Les artistes s'approcheront de la beauté parfaite, les savants de la vérité sans nuages, et les personnes vertueuses de la bonté sans limites; tous s'uniront dans un étroit et cordial embrassement, pour se porter ensemble vers ce point resplendissant où se trouve le trône du Roi des Rois, centre de tout ce qui est crée, centre de toute bonté, de toute beauté, de toute vérité.

Paris a 3 Avril 1891
Lauro Clariana Ricart

Compte Rendu du Congrès Scientifique International des Catholiques tenu a Paris du 1er au 6 avril 1.891