Ecuación de Ricatti

1891

Diferentes son los puntos de vista que pueden tomarse para alcanzar la integración de la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

llamada de Ricatti.

Uno de los procedimientos más generales consiste en referirla a la ecuación diferencial que a continuación se expresa:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2ndy}{xdx} - m^2y = 0 \qquad (1)$$

Procedamos antes a la discusión de las diferentes integrales que pueden obtenerse en esta ecuación según los valores atribuidos a *2n*.

Los métodos más generales que se conocen para llegar a la integral, se fundan en el teorema de Maclaurin, y en el de los coeficientes indeterminados.

Vamos a utilizarnos del primer método, por medio de las consideraciones siguientes: Multipliquemos (1) por *x*, y luego derivemos μ - 1 veces:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} - m^2yx = 0. \qquad (2)$$

$$\left[x\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}\right] + 2n\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} - m^2\left[x\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}\right] = 0 \qquad (3)$$

Si en las ecuaciones (2) y (3) suponemos *x* = o, resulta:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0\ ,\ (2n+\mu-1)\left(\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}\right)_0 = (\mu-1)m^2\left(\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}\right)_o \qquad (4)$$

esta última ecuación, se reduce a:

$$(2n+1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = m^2y_0\ ,\ \text{si}\ \ \mu = 2.$$

Ahora bien, si $2n$ no es un entero negativo, las derivadas de órdenes impares de y, se anulan y las pares vienen expresadas por la fórmula:

$$\left(\frac{d^{2i}y}{dx^{2i}}\right)_0 = \frac{1.3.5.....(2i\text{-}1)}{(2n+1)(2n+3).....(2n+2i-1)} m^{2i}\, y_0 \quad (5)$$

Si se designa por C el valor y_0, según la fórmula de Maclaurin, se deduce:

$$y = C\left[1 + \frac{m^2x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} + ...\right]$$

No puede aplicarse esta fórmula si $2n$ es un número entero impar negativo; pero dejando aparte este caso, que debe eliminarse por las condiciones del problema, la serie es aceptable por cuanto forma una serie convergente; en efecto, siendo la relación de dos términos igual a:

$$\frac{m^2x^2}{2i(2n+2i-1)}$$

resulta que tiende hacia cero a medida que i aumenta.

Examinemos ahora el caso en que $2n$ sea igual a un entero negativo. Si este entero es impar, la segunda de la fórmula (4) nos indica que las derivadas impares son nulas cuando $x = 0$, lo mismo que en el caso precedente. La misma fórmula indica que si $\mu = 1 - 2n$, se tiene:

$$\left(\frac{d^{\mu-2}}{dx^{\mu-2}}\right)_0 = 0\,,$$

y por consiguiente:

$$\left(\frac{d^{-1-2n}y}{dx^{-1-2n}}\right)_0 = 0.....\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0, \qquad y_0 = 0$$

La derivada:

$$\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}\right)_0$$

resulta pues arbitraria, haciéndose todas las demás dependientes de ésta. Si designamos por C, el valor arbitrario

$$\frac{1}{1.2.3...(1\text{-}2n)}\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}\right)_0$$

y en el concepto de que sustituya a la y_0 del problema anterior, cabrá escribir según la fórmula de Maclaurin

$$y = \beta x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)} + \ldots\right)$$

Por fin si *2n* es un entero par negativo, las derivadas de órdenes impares de *y*, se anulan para $.x = 0$ hasta la del orden - *1 - 2n.*

La derivada

$$\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}\right)_0$$

puede ser escogida arbitrariamente, y las derivadas de ordenes impares que siguen a ésta resultan ser funciones de ella.

Además, según la fórmula (5) se obtienen las derivadas pares en función de y_o. Así la función es una integral general, pues va a depender de dos constantes, tomando la suma de las dos series anteriores.

De lo que precede se deduce que para la integral general, conviene exceptuar el caso que *2n*, sea un entero impar positivo o negativo.

Con estos preliminares podemos pasar inmediatamente al estudio de la fórmula de Riccati. Sea:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

En el supuesto que *a* y *b* sean constantes, y *m* un exponente cualquiera. Supongamos:

$$y = \frac{1}{a}\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{z} - \frac{1}{a}\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^2};$$

sustituyendo estos valores en la primera ecuación, se halla:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = abx^m z. \quad (a)$$

Esta ecuación es lineal, resultando $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ para la integral.

Si la división de las dos constantes $\frac{C^2}{C^1}$ se designa por *C*, se obtiene:

$$y = \frac{1}{a}\frac{\frac{dz_1}{dx} + C\frac{zdz_2}{dx}}{z_1 + Cz_2}$$

Esta es la integral general de la ecuación de Riccati.

Para determinar z_1 y z_2, supondremos:

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t$$

luego

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{m+2}{2}x^{\frac{m}{2}}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4}x^m\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m^2+2m}{4}x^{\frac{m-2}{2}}\frac{dz}{dt}$$

Sustituyendo estos valores en (a), se tiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m}{m+2}\frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2}z = 0$$

y el valor de la integral general en función de *t*, es:

$$y = \frac{m+2}{2a}x^{\frac{m}{2}}\frac{\frac{d\,z_1}{dt} + C\frac{d\,z_2}{dt}}{z_1 + C\,z_2}$$

z_1 y z_2 designan las integrales particulares de la ecuación (b). Según los principios que preceden para que sea posible obtener dicha integral, dentro del círculo de funciones ordinarias, débese evitar que el coeficiente del segundo término de *b*, o sea, $\frac{m}{m+2}$, resulte ser un número impar positivo o negativo; luego la condición de integrabilidad, viene expresada por:

$$\frac{m}{m+2} = \pm 2i,$$

esto es

$$m = \frac{\pm 4i}{1 \pm 2i}$$

según las condiciones exigidas en el problema.

Veamos ahora como los procedimientos particulares que se conocen para la resolución de la ecuación de Riccati, concuerdan con las conclusiones que acabamos de hallar.

Si en la ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

suponemos $x = 0$, es posible la separación de variables, resultando:

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + adx = 0$$

Además puede escribirse:

$$\frac{1}{y^2 - \frac{b}{c}} = \frac{A}{y + \frac{\sqrt{b}}{a}} + \frac{B}{y - \frac{\sqrt{b}}{a}}$$

de donde

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,, \qquad A = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Así pues

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\; l\,\frac{y - \frac{\sqrt{b}}{a}}{y + \frac{\sqrt{b}}{a}} + a(x\text{-}c) = 0$$

o también

$$\frac{y - \frac{\sqrt{b}}{a}}{y + \frac{\sqrt{b}}{a}} = e^{-2a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

y por fin

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} + e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} - e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}$$

Dado caso que $\sqrt{\frac{b}{a}}$ fuese imaginario, o de la forma $\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1}$, nos podríamos utilizar de las fórmulas de Euler:

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}; \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

obteniéndose el valor siguiente:

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1}\cot a\left(x\text{-}c\right)\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1} \;=\; \sqrt{\frac{b}{a}}\;\cot a\left(x\text{-}c\right)\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Aparte de este caso particular hay otros en que puede aun asegurarse la integración dentro de las funciones ordinarias, como ya henos visto en el caso general.- Vamos a justificarlo. Sea:

$$y = My^1 + N.$$

y^1 representa una nueva variable, y M, N, designan funciones de x que pueden determinarse a voluntad: luego:

$$\frac{dy}{dx} = M\,\frac{dy^1}{dx} \;+\; y^1\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}$$

Al sustituir este valor en la ecuación primera, se tiene:

$$M\,\frac{dy^1}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN\right)y^1 + a\,M^2\,y^{'2} + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m\right) \;=\; 0 \quad (c)$$

Ahora bien, para determinar M y N, supondremos:

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 \;=\; 0, \quad (\Delta)\;\frac{dM}{dx} + 2aMN \;=\; 0$$

de donde

$$-\frac{1}{N} + ax \;= const.$$

lo cual nos permite escribir $N = \dfrac{1}{ax}$ transformándose (Δ) en:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2M}{x} = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dM}{M} + \frac{2dx}{x} \;=\; 0$$

y por fin, $Mx^2 = const.$ cuya constante podemos suponer igual a *uno*, y en su virtud $M = \dfrac{1}{x^2}$

Así, pues, la ecuación primitiva:

$$y = My^1 + N$$

se transforma en:

$$y = \frac{y^1}{x^2} + \frac{1}{ax}$$

y la ecuación (c) en:

$$\frac{dy^1}{dx} + \frac{a}{x^2} y^{1^2} - bx^{m+2} \ = \ 0 \quad (\pi)$$

En el caso de *m* = - 2, resulta:

$$\frac{dy^1}{dx} = b \ - \ a \frac{y^{1^2}}{x^2}$$

Ecuación que por su naturaleza permite realizar la separación de variables; en efecto si $y = zx$, se halla:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} \ z, \qquad x\frac{dz}{dx} + z \ = \ f(z), \qquad \frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0$$

de donde:

$$\int_{z_o}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \log \frac{x}{x_0} = C.$$

A pesar de la solución de este caso particular, podemos extender nuestras consideraciones a la misma ecuación (π), refiriéndola a la fundamental de Riccati. Sea:

$$y^1 = \frac{1}{y_1}, \qquad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}$$

de donde

$$dy^1 = -\frac{dy_1}{y_1^2}; \quad dx \ \frac{1}{m \ + \ 3} x_1^{-\frac{m+2}{m+3}} dx_1;$$

sustituyendo en (π), se obtiene:

$$\frac{dy_1}{dx_1} \ \frac{b}{m \ + \ 3} y_1^2 = \frac{a}{m \ + \ 3} x_1^{-\frac{m+4}{m+3}}$$

Al suponer:

$$a_1 = \frac{b}{m \ + \ 3}, \quad b_1 = \frac{a}{m \ + \ 3}, \quad m_1 \ = -\frac{m \ + \ 4}{m \ + \ 3}$$

se deduce:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 \ = \ b_1 x_1^{m_1}$$

Esta ecuación es de la misma forma que la primitiva, resultando integrable en funciones logarítmicas y circulares si $m_1 = 0$, o sea $m = -4$

Estas transformaciones pueden efectuarse indefinidamente, obteniéndose la fórmula general:

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i\, y_i^2 = b_i\, x_i^{\,m_1}.$$

Los valores de m, se deducen del modo siguiente:

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3} \quad m_2 = -\ \frac{m_1+4}{m_1+3} \quad m_3 = -\ \frac{m_2+4}{m_2+3} \ldots.$$

de donde:

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3} \quad m_2 = -\frac{3m+8}{2m+5} \quad m_3 = -\frac{5m+12}{3m+7} \ldots.$$

Por inducción, se alcanza la fórmula general:

$$m_i = -\frac{(2i - 1)m + 4i}{im + (2i+1)}$$

Ahora bien, para que $m_1 = 0$, es necesario que $m = \dfrac{4i}{2i-1}$; i se supone un número entero positivo.

Empero no es esta la única fórmula que podemos considerar, pues cabe aun otro caso de integrabilidad: en efecto, si

$$y = \frac{1}{Y}; \qquad x = X^{\frac{1}{m+1}}$$

sustituyendo en la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

los valores respectivos:

$$dy = -\frac{dY}{Y^2} \qquad dx = \frac{1}{m+1}\, X^{-\frac{m}{m+1}} dx;$$

junto con las anteriores, se halla:

$$\frac{d\,Y}{d\,X} \ + \ \frac{b}{m\ +\ 1} Y^2 \ = \ \frac{a}{m\ +\ 1} X^{-\frac{m}{m+1}}$$

y como esta ecuación tiene la misma forma que la correspondiente a la general del primer caso, para la integración en funciones ordinarias, bastará suponer:

$$-\frac{m}{m+1}=-\frac{4i}{2i-1}$$

o sea

$$m\ =-\frac{4i}{2i+1}$$

De suerte que si reducimos a una sola fórmula los dos casos hallados, se deduce:

$$m=\frac{-4i}{2i\ \pm\ 1}$$

Resultado exactamente igual al que habíamos encontrado según el primer procedimiento.

Barcelona a 25 de Abril de 1891
Lauro Clariana Ricart