Importancia de las formas congéneres

en la

Matemática

1891

Fenómeno raro es el que ofrece el estudio de la Matemática en nuestros tiempos modernos. Pudiera decirse que la cantidad pugna con la cantidad; la aritmética con el número; el álgebra con los algoritmos; la geometría con el espacio. La inteligencia humana, cual mar embravecida, no ceja en su oleaje continuado, sustituyendo al suave rielar de otros tiempos, la gigantesca ola como anuncio de deshecho temporal. El movimiento vertiginoso que se opera entre los elementos de la inteligencia no supone peligro alguno para el hombre; muy al contrario: el grande oleaje deja siempre algo en la orilla que no debe despreciarse. El vaivén entre lo general y particular; entre el análisis y la síntesis; entre lo que *es* y lo que *no es*; se acrecienta cada día más, cual onda cuya amplitud aumenta rápidamente. Comenzóse el estudio de la Matemática por el simple número real, positivo y entero, y andando siglos llegóse a la cantidad directiva sin valor asignable; en el álgebra los símbolos operativos condensan ya una infinidad de algoritmos particulares; el cálculo integral sintetiza el Universo en una simple fórmula, que tiene por origen el indefinidamente pequeño; en la discontinuidad preténdese hallar las fuentes de la continuidad; y por fin, sintiéndose aherrojado el matemático dentro del espacio de Euclides, supone el híper-espacio, para que la Geometría pueda satisfacer todas las exigencias del análisis, a pesar de que en dicho híper-espacio se pierda toda idea de realidad.

Sensible es que, en medio de ese desenvolvimiento tan portentoso bajo direcciones tan varias exista todavía alguno que otro importante punto que no hayan procurado estudiar como debieran los verdaderos genios, al objeto de formar un todo más armónico entre los diferentes elementos de la ciencia matemática; nos atreviéramos a consignar que el estudio de las formas congéneres debiera procurar grandes beneficios a la ciencia, y en particular al cálculo infinitesimal. Séanos permitido apuntar algunas ideas:

Con dificultad podemos estudiar directamente una forma matemática, sea en sentido analítico o geométrico, si no asociamos a la idea primitiva otra congénere, la cual si bien nos favorece por un lado, en muchos casos dicha asociación no es bastante estrecha para que dejemos de quedar perjudicados en la consecución del fin.

De la ligereza de este procedimiento responde la voz de algún matemático autorizado, cuando manifiesta que no siempre se estudian las figuras referidas al sistema de coordenadas que pudiéramos llamar naturales. Estos descuidos son más notables cuando se eleva la ciencia a la altura del cálculo infinitesimal.

En la diferencial de un área correspondiente a una figura geométrica cualquiera, se prescinde generalmente del modo de ser de dicha figura, asociándola a ejes cartesianos o polares, como si estos en todos los casos fuesen los seres mas afines a la forma primitiva considerada.

Nos concretaremos a simples ejemplos para dar a comprender la fuerza de nuestros argumentos.

Al considerar el círculo relacionado a ejes rectangulares, hay necesidad de desarrollar la integral

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

a fin de determinar su área; esta integral sin duda no debe considerarse como la más natural, porque la faja formada por dos paralelas al eje *y* de las indefinidamente próximas, y que expresan la diferencial del círculo, es una forma que no es congénere con la primitiva. Si tomamos luego coordenadas polares en el supuesto de que el centro del círculo sea el polo, entonces dicho círculo se halla expresado por la integral

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\,\theta$$

correspondiente al límite de una suma de sectores, siendo estos elementos ya más afines a la figura de que se trata. Cabe, no obstante, afirmar, que aun existe otra figura que lo es más; esto es, el círculo concéntrico al primero y cuya distancia al mismo es una cantidad indefinidamente pequeña. En este caso la diferencial debe expresarse por $2\pi r.dr$ y la integral resulta ser:

$$\int_0^r 2\pi r.dr = \pi r^2$$

Este cálculo es más sencillo y natural por haber asociado a la primera figura la más congénere.

Dichas consideraciones facilitan el paso a la Geometría del espacio, pues tomando la esfera, por razones análogas a las que preceden, podremos sentar como principio que la forma natural o congénere para expresar la diferencial de su volumen será el volumen comprendido entre dos esferas concéntricas indefinidamente próximas, cuya expresión es $4\pi r^2 dr$; de suerte que integrando entre los límites 0 y *r*, nos dará el volumen de la esfera; en efecto:

$$\int_0^r 4\pi r^2.dr = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ahora bien, cuando se pierde la curvatura regular y uniforme que caracteriza a la circunferencia y a la esfera, se aumenta la dificultad, empero fácilmente se concibe por lo que precede, que la forma congénere a la dada debe ser homotética a ésta, tanto si la figura primitiva es poligonal como curvilínea, pues para este último caso basta considerar el límite de una figura poligonal.

Concretándonos pues a la figura poligonal, debemos recordar que la proyección perspectiva puede responder de la teoría de homotecia, comprendiendo dicha proyección como caso particular el caso de ser los rayos paralelos, base de la igualdad de figuras. Estas dos proyecciones son suficientes para formar la base segura y única de toda la geometría, y por ende el zócalo de las cuestiones más arduas del cálculo infinitesimal.

En suma, las consideraciones anteriores, nos permiten considerar tan solo un elemento rectilíneo de polígono referido a su centro e homotecia, según que dicho punto sea propio o impropio, resultando un triángulo o un rectángulo, si limitamos, en este segundo caso, la faja en la forma más conveniente, cuando el vértice del primer triángulo se aleja definitivamente de la base. De esta suerte las figuras congéneres a las primeras deben ser fajitas paralelas a bases respectivas del triángulo o rectángulo, y en el supuesto de expresar sus diferenciales.

La forma rectangular no es indispensable en la teoría de figuras congéneres, pues bastará considerar el triángulo para la determinación de un área cualquiera. No obstante la tenemos en cuenta, como tránsito para la forma triangular, pues mientras en el rectángulo deben suponerse variables los dos constitutivos del área diferencial, en el triángulo deben imponerse variables los dos constitutivos del área diferencial.

Las diferenciales de áreas, en los dos casos supuestos, estarán expresadas respectivamente por:

$$\frac{b+b'}{3}\,da,\, b_1\, da_1$$

llamando b y b' las dos bases de la fajita correspondiente al triángulo, y a su altura, b_1 y a_1 la base y altura del rectángulo. La primera diferencial puede expresarse por

$$\frac{b+b-db}{2}\,da = b\,da - \frac{db.da}{2}.$$

Así pues, el área total del triángulo será:

$$b\int_0^a da - \int_0^b\int_0^a \frac{db.da}{2} = ba - \frac{ba}{2} = \frac{ba}{2}$$

En cuanto a la segunda diferencial; $b_1\, da_1$ nos da:

$$\int_0^a b_1\, da_1 = b_1\, a_1$$

área del rectángulo.

Estas consideraciones son suficientes para llevarlas al área de un polígono cualquiera, empero si se trata de una figura regular, entonces puede tomarse como centro de homotecia el mismo centro de figura, apareciendo mejor en este caso la analogía con las figuras congéneres del círculo, pudiendo continuar aun dicha semejanza para los poliedros regulares.

Suponiendo sencillamente un polígono regular y el homotético cuyos lados disten una cantidad indefinidamente pequeña de los primeros, nos dará el área diferencial congénere del área total del polígono, considerando el área comprendido entre dichos dos polígonos, la cual, integrada entre los límites de la apotema, debe procurar el resultado apetecido.

En efecto, sean *l* y *l'* los lados respectivos de los dos polígonos; *a* su apotema: el área diferencial será:

$$\frac{nl + nl'}{2} da$$

representando *n* el número de lados de cada polígono. De un modo análogo al del triángulo podríamos transformar esta fórmula en la siguiente:

$$\frac{nl + n(l - dl)}{2} da$$

de donde:

$$\int_0^a nl.da - \frac{n}{2} \int_0^1 dl \int_0^a da = nla - \frac{nla}{2} = \frac{nl}{2} a$$

fórmula bien conocida del área de un polígono regular.

En el caso de ser un polígono cualquiera, podría descomponerse dicho polígono en triángulos, hallando luego los centros de simetría en cada uno de ellos, los cuales podríamos considerar ser los centros respectivos de las circunferencias inscritas a los mismos, como resultado de la intersección de las bisectrices, pues de este modo se tiene regularidad; por cuyo motivo podrían llamarse centros propios de homotecia, los cuales, combinándose luego entre si por procedimientos análogos a los anteriores, sería posible alcanzar uno definitivo, como centro propio y único del polígono.

La existencia de un centro de figura, así como la constancia de valor asignable o no sobre la perpendicular al elemento rectilíneo o curvilíneo de la figura, simplifica las consideraciones de las formas congéneres, pues existe entonces regularidad en el sistema homotético que se desarrolla; en cambio la cuestión se complica si falta alguna de las consideraciones anteriores, pues en este caso es necesario averiguar las leyes que rigen a los diferentes centros homotéticos, a la par que las pertenecientes a la variabilidad de los radios vectores, a fin de enlazarlo todo con algo constante y uniforme.

Estas ligeras consideraciones reasumen todo cuanto pudiéramos decir respecto a formas geométricas congéneres.

En el análisis cabe también llamar la atención respecto a formas congéneres. Vamos a concretarnos ligeramente a los números inconmensurables, por ser esta parte una de las más interesantes del análisis.

La asociación de los números inconmensurables con los conmensurables, no es la más propia, pues siendo el principio de éstos la discontinuidad, no procede tomar esta cantidad como la más afine a la que debe considerarse dentro de la continuidad. Tanto es así, que con sorpresa desde tiempos antiguos, vióse que algunos números inconmensurables tenían su representación geométrica exacta, mientras que la aritmética no puede expresarlos sino de una manera aproximada.

Esto nos demuestra que la idea congénere al número inconmensurable debe ser algo que se apoye en la ley de continuidad. Así, la raíz cuadrada de un número cualquiera puede representar la longitud de una recta que sale del origen, formando diferentes ángulos con el eje x y correspondientes a los límites 0 y 1 de esta variable en el concepto de que dicha recta sea la expresión de una integral, esto es, el límite de suma de elementos indefinidamente pequeños. De esta suerte se explica perfectamente como la diagonal de un cuadrado que tiene por lado la unidad, representa exactamente el valor de $\sqrt{2}$. En efecto, la longitud de una línea, se expresa por:

$$s = \int_0^1 dx\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dx}\right)^2}$$

Ahora bien, si la línea es una recta que sale del origen, formando con el eje x un ángulo de 45°, tiene por ecuación $y = x$ de donde:

$$\frac{dy}{dx}=1; \quad \text{luego} \quad \mathrm{s} = \mathrm{D} = \int_0^1 dx\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

en el supuesto de representar D la diagonal del cuadrado que tiene por lado la unidad.

Creemos suficiente estos ligeros apuntes para dar a comprender la utilidad del estudio de las formas congéneres, esperando que otros mejor que nosotros sabrán realizar nuevas investigaciones acerca del mismo punto, a fin de aportar nuevos materiales al vasto campo de la ciencia matemática.

Barcelona a 20 de Agosto 1891
Lauro Clariana Ricart