Estudio de la Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}$$

siendo $a < 1$

1892

Cuando en el ánimo del matemático azotan los vientos de la desconfianza acerca de los procedimientos lógicos en que se apoya la ciencia de la cantidad, debe alentarle un argumento de gran fuerza para proseguir en la construcción de esa gran cadena que se viene elaborando, cuyos primeros eslabones radican en los pristinos tiempos de la humanidad docente.

Puesto que el número de procedimientos aumenta a compás del tiempo, puesto que la diversidad de puntos de partida no implica para la consecución del fin; puesto que la dificultad de la cuestión matemática en vez de disminuir el número de vías, por el contrario, las aumenta, en general, indefinidamente: bien cabe afirmar que la base de dicha ciencia es sólida, y que la verdad debe brillar en el interior de un edificio, cuyos zócalos son tan firmes, a pesar de que muchas veces no podamos apreciar su profundidad.

Este es el argumento que a nuestro juicio debe alentar al matemático que busca la verdad con entusiasmo y franca intención.

Vamos a estudiar la integral de la función

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}$$

en el supuesto de que a < 1, y con ello confirmaremos nuestro aserto, justificando los procedimientos seguidos por los matemáticos más notables; de esta suerte cabrá apreciar una vez más la variedad y riqueza de los métodos en una misma cuestión, para admirar la belleza de una ciencia, cuya savia vivifica a todas las demás, y que dado un tema cualquiera, a la par como un Beethoven, los Jacobis, los Legendres, los Euleros, etc., nos hacen sentir toda la variedad imaginable de tonos, matices y colorido que éste puede ofrecer.

Antes de tratar de la integral, que forma el objeto de este artículo, vamos a ocuparnos de otra más general; esto es, de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \text{ siendo } m < n$$

Según la teoría de los restos de Cauchy, dicha integral será:

$$2\pi\sqrt{-1}\sum \mathrm{E}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$$

Podemos considerar una semicircunferencia de radio indefinidamente grande desde el origen de coordenadas, y por la parte superior del eje *x*.

Los residuos se refieren a todas las raíces de $1+x^{2n}=0$, situadas encima del eje *x*, expresadas por:

$$\alpha,\quad \alpha^3.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\alpha^{2n-1},$$

siendo

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{2n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}$$

Para tener el residuo correspondiente a α^{2K+1} supondremos: $x=\alpha^{2K+1}+h$, luego:

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}=\frac{\alpha^{(2K+1)(2m)}+2m\alpha^{(2K+1)(2m-1)h}+\ldots}{1+\alpha^{2n(2K+1)}+2n\alpha^{(2K+1)(2m-1)h}+\ldots}=\frac{\alpha^{(2K+1)(2m)}+Nh+\ldots.}{1-1+2n\alpha^{(2K+1)(2m-1)h}+\ldots.}$$

y si representamos por *A* el resto respectivo, se tiene:

$$A=\frac{\alpha^{(2K+1)2m}}{2n\alpha^{(2K+1)(2n-1)}}$$

Ahora bien:

$$\alpha^{(2K+1)2n}=\cos\frac{(2K+1)2n}{2n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2K+1)2n}{2n}=-1\quad (a)$$

Sustituyendo este valor en la fórmula precedente, resulta:

$$A=-\frac{\alpha^{(2K+1)(2m+1)}}{2n}$$

Así, pues, podremos escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n}\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha^{(2K+1)(2m+1)}\quad (b)$$

Los diferentes valores comprendidos por Σ se pueden expresar por la tabla siguiente:

$$K=0,\quad 1,2,\ldots..n-1$$

$$\alpha^{2m+1},\alpha^{3(2m+1)},\alpha^{5(2m+1)}\ldots\ldots\alpha^{(2n-1)(2m+1)}$$

cuya suma se puede representar por la fórmula $S=\frac{ql-a}{q-1}$ correspondiente a las progresiones geométricas.

Luego:

$$S=\frac{\alpha^{2(2m+1)}\alpha^{(2n-1)(2m+1)}-\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)}-1}$$

o sea

$$S=\frac{\alpha^{(2n+1)(2m+1)}-\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)}-1}$$

En virtud de (*a*), se tiene:

$$S=-\frac{\alpha^{2m+1}+\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)}-1}$$

Así, pues, sustituyendo el valor en (*b*), resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n},\frac{2\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)}-1}$$

Al multiplicar ambos términos del último quebrado por $\alpha^{-(2m+1)}$, después de simplificar, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\frac{2}{\alpha^{2m+1}-\alpha^{-(2m+1)}}$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

de donde

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

De esta integral resulta la que nos proponemos desarrollar, mediante un cambio de variable. En efecto si

$$x^{2n}=z \quad \text{y} \quad \frac{2m+1}{2n}=a$$

se halla:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{z^{\frac{2m+1}{n}-1}}{2n(1+z)}dz=\frac{\pi}{2n\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

o sea

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\,\pi}$$

cuyo valor corresponde a la integral que nos habíamos propuesto determinar.

Cuando se trata de hallar las integrales de Fresnel, es necesario determinar la integral siguiente:

$$2\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx$$

que viene a corresponder con la primera estudiada, y que puede comprobarse en este caso, siguiendo un procedimiento puramente elemental. Vamos a desarrollarlo. Como quiera que si en:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}, \quad \text{suponemos} \quad x=\frac{1}{z}$$

resulta:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{z^2dz}{z^4+1}$$

cabe escribir

$$2\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

Considerando las raíces de la unidad correspondientes a la ecuación binomia $x^4+1=0$ se tiene:

$$x' = \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x'' = \cos\frac{3\pi}{4} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x''' = \cos\frac{5\pi}{4} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x'''' = \cos\frac{7\pi}{4} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde:

$$x^4+1 = \left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

Luego según la descomposición en fracciones, tendremos:

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{Rx+\int}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

Verificando operaciones y comparando los numeradores de ambos miembros de esta igualdad, se halla:

$$\begin{array}{rl} R+M=0, & \left.\begin{array}{r} R+M=0 \\ M-R=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M=0 \\ R=0 \end{array} \\ \sqrt{2}M+N-\sqrt{2}R+S=1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} N+S=1, & \left.\begin{array}{r} N+S=1 \\ N-S=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} N=\frac{1}{2} \\ S=\frac{1}{2} \end{array} \\ M+\sqrt{2}N+R-\sqrt{2}S=0, & \end{array}$$

Así, pues, resulta en definitiva:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arc.tang}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\operatorname{arc.tang}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_0^\infty=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc.tang}\frac{\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{1-\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\right]_0^\infty$$

o sea después de toda reducción:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}=2\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc.tang}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right]_0^\infty$$

Tengamos en cuenta la serie de valores que comprende la variable independiente y la tangente, tal como va consignado a continuación:

Variable. . . . 0, ... 1. . . . . . ∞

Tangente. . . . 0, . . . ∞,$-\infty$. . . .0

Se comprende que el arco total valdrá π. Luego:

$$2\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

o sea:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Este valor corresponde con el de la integral primera hallada:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n\,\mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

pues basta suponer aquí *m* = 1, y *n* = 2,

$$\mathrm{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi = \mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi = \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

para que sustituyendo estos valores particulares, se tenga:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Por fin, la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

la podríamos deducir directamente siguiendo a M. Briot, conforme a la teoría de Cauchy.

Consideremos *z* como variable compleja, en la integral general:

$$\int \frac{z^{n-1}}{1+z}dz$$

Tomemos desde el origen de coordenadas, dos semicircunferencias: una de radio *E*, indefinidamente pequeño, y otra *R*, indefinidamente grande; además otra semicircunferencia indefinidamente pequeña, alrededor del polo único *z* = -1. Así, pues, entre estas tres circunferencias y la porción de diámetro respectivo, según los principios de Cauchy, la integral definida debe anularse.

Bajo este supuesto, llamando *E'*, al radio indefinidamente pequeño alrededor del polo, tendremos: $z = -1 + E'e^{\theta i}$ de donde:

$$\int_\pi^0 \frac{z^{n-1}Ee^{\theta' i}d\theta'}{Ee^{\theta' i}} = i\int_\pi^0 z^{n-1}d\theta' = -i\int_0^\pi z^{n-1}d\theta'$$

Siendo *E´* indefinidamente pequeño, puede tomarse $z^n = e^{n\pi i}$ puesto que $z = -1 = e^{\pi i}$ luego:

$$-i\int_0^\pi e^{n\pi i}-\pi i\, d\,\theta' = i\,e^n\pi i\int_0^\pi d\,\theta' = i\,\pi\, e^{n\pi i}$$

Por otra parte

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

tiene su límite por estar comprendida esta integral entre valores determinados de la función dada y ser además ésta continua para valores reales y positivos de la variable.

Los valores del radio correspondientes a valores reales y negativos de la variable, pueden expresarse por la suma de dos integrales en el supuesto de que sea: $\theta=\pi,\ z=re^{\pi i}$ de donde:

$$z^n = r^n e^{n\pi i}, \quad z=-r, \quad nz^{n-1}dz = nr^{n-1}e^{n\pi i}dr$$

Luego aplicando valores en la integral dada, se tiene:

$$e^{n\pi i}\int_R^{1+\varepsilon'} \frac{r^{n-1}}{1-r}dr + e^{n\pi i}\int_{1-\varepsilon'}^R \frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr = -e^{n\pi i}\left(\int_\varepsilon^{1+\varepsilon'} \frac{r^{n-1}}{1-r}dr + \int_{1+\varepsilon'}^R \frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr\right)$$

Atendiendo, ahora, que la integral correspondiente a las tres semicircunferencias que hemos concebido, se resuelven en valores limitados, según se deduce inmediatamente de los principios de Cauchy, y como la suma de todas las integrales supuestas deben dar cero, resulta que la cantidad que tenemos dentro del paréntesis en la última expresión, debe ser también una cantidad limitada que podemos representar por *K*. En suma,

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x}dx + \pi i\, e^{n\pi i} - Ke^{n\pi i} = 0$$

o sea:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x}dx = (K-\pi i)(\cos n\pi + i\,\mathrm{sen}\, n\pi) = (K\cos n\pi + \pi\,\mathrm{sen}\, n\pi) + i\,(K\,\mathrm{sen}\, n\pi - \pi\cos n\pi)$$

Ahora bien, como el primer miembro, o sea la integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x}dx$$

hace referencia a cantidades reales, debe suponerse;

$$K\,\mathrm{sen}\, n\pi - \pi\cos n\pi = 0$$

o sea

$$K = \pi \cot n \pi$$

de donde, por fin:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x} dx = \pi \cos n \pi \cot n \pi + \pi \operatorname{sen} n \pi = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n x}$$

Aunque otros métodos podríamos indicar para llegar a la misma integral, creemos que lo dicho, sin abusar de la paciencia del lector, bastará para llevar al ánimo de éste, el sentimiento de lo bello, quedando así confirmada nuestra tesis en una integral cuya aplicación es inmensa en varias ramas del análisis.

Barcelona a 10 de Marzo de 1892
Lauro Clariana Ricart