Introducción al estudio

de las

Integrales Eulerianas

1892

Siendo las integrales eulerianas una de las ramas del análisis que más ha llamado la atención de los matemáticos modernos; y ya que estos conocimientos se encuentran por separado en diferentes obras, revistas, folletos, etc., esperamos que la idea de procurar, con la mayor claridad posible, un resumen de esta bella teoría, será aceptada con gusto por nuestros lectores.

Antes de dar comienzo a dicho estudio, presentaremos algunos principios y fórmulas que han de sernos útiles en la teoría que tratamos de exponer.

1º.- Gauss llama cantidad compleja a la que se halla expresada por $x + yi$, siendo x e y cantidades reales; y da el nombre de imaginaria a la cantidad $x + yi$**.** Esta última expresión es la más general de la cantidad, y de ella se deduce la cantidad real, suponiendo $y = 0$. Si x e y son variables, la expresión $x + yi$ constituye una variable imaginaria; la representación gráfica de la imaginaria corresponde al punto cuyas coordenadas son x e y. Así pueden obtenerse tantos valores como se quieran bajo la forma $x + yi$ correspondientes a los diferentes puntos de un plano.

La forma de las cantidades imaginarias puede modificarse al referirse a ejes polares. Así resulta:

$$z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en el concepto de ser ρ la distancia del punto imaginario al polo, cuya distancia se llama módulo; φ el argumento que mide el ángulo del módulo con el eje polar, y $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ el coeficiente de inclinación.

Por fin, se dice que una variable imaginaria o compleja es continua, cuando x e y varían de una manera continua.

2º- CONDICIONES A QUE DEBE SUJETARSE UNA FUNCIÓN COMPLEJA PARA ADMITIR UNA DERIVADA ÚNICA Y DETERMINADA**.**

Cuando $x + yi$ describe una curva, debe entenderse que el punto cuyas coordenadas son x e y traza dicha curva. Ahora bien, si X + Yi es función de $x + yi$, esta expresión admitirá una derivada única y bien determinada, e independiente de los valores arbitrarios que van tomando x e y al acercarse a un punto dado, si se sujeta a las condiciones que vamos a determinar.

Según los principios generales del análisis, puede escribirse como expresión de la derivada:

$$\frac{d\,\mathrm{X}+id\,\mathrm{Y}}{dx+idy}=\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}dx+\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}dy\right)+\left(\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}dx+\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}dy\right)i}{dx+idy}=\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}+i\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}\right)+\left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}+i\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1+i\frac{dy}{dx}}$$

Para que esta derivada resulte independiente de los valores que va tomando $\frac{dy}{dx}$, o sea de la dirección que toma la variable al acercarse al punto considerado, basta suponer:

$$\frac{\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}+i\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}}{1}=\frac{\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}+i\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}}{i}=1$$

de donde

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}=\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx};\qquad \frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}=-\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}$$

Estas son las ecuaciones de condición que deben realizarse para que la función admita una sola derivada expresada por:

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}i+\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}$$

o también por

$$\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}-i\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}$$

cualquiera que sea el camino que siga la variable para alcanzar el punto supuesto. En este caso la función es monógena.

Las derivadas de las ecuaciones de condición procuran además las igualdades siguientes:

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}=\frac{d^2\mathrm{Y}}{dxdy},\qquad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dxdy}=-\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2}$$

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}=\frac{d^2\mathrm{Y}}{dxdy},\quad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dxdy}=-\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2},\quad \frac{d^2\mathrm{X}}{dxdy}=\frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2},\quad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}=-\frac{d^2\mathrm{X}}{dxdy}$$

de donde

$$\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2}=0,\qquad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}=0$$

Esto nos dice que solo deben admitirse para X e Y aquellos valores que se sujeten a las condiciones que anteceden.

En el concepto de referirse a coordenadas polares, se tendrá:

$$z = \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)$$

$$dz = (\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)d\rho + \rho(-\mathrm{sen}\,\omega + i\cos\omega)d\omega$$

de donde, si la función es *u* + *vi*, resulta:

$$\frac{d(u+vi)}{dz} = \frac{\left(\frac{du}{d\omega}d\omega + \frac{du}{d\rho}d\rho\right) + \left(\frac{dv}{d\omega}d\omega + \frac{dv}{d\rho}d\rho\right)i}{(\cos\omega i\,\mathrm{sen}\,\omega)d\rho + \rho(-\mathrm{sen}\,\omega + i\cos\omega)d\omega} = \frac{\frac{d\rho}{d\omega}\left(\frac{du}{d\rho} + \frac{dv}{d\rho}i\right) + \left(\frac{du}{d\omega} + i\frac{dv}{d\omega}\right)}{\frac{d\rho}{d\omega}(\cos\omega + \mathrm{sen}\,\omega) + \rho(-\mathrm{sen}\,\omega + i\cos\omega)}$$

Este resultado será independiente de la relación $\frac{d\rho}{d\omega}$, si la sujetamos a las condiciones siguientes:

$$\frac{\frac{du}{d\rho} + \frac{du}{d\rho}i}{\cos\omega + \mathrm{sen}\,\omega} = \frac{\frac{du}{d\omega} + \frac{dv}{d\omega}i}{\rho(-\mathrm{sen}\,\omega i\cos\omega)}$$

igualdad que puede tomar la forma:

$$\frac{\rho i\frac{du}{dx} - \rho\frac{dv}{dx}}{\rho(-\mathrm{sen}\,\omega + i\cos\omega)} = \frac{\frac{du}{d\omega} + \frac{dv}{d\omega}}{\rho(-\mathrm{sen}\,\omega + i\cos\omega)}$$

de donde resultan las ecuaciones de condición

$$\frac{dv}{d\omega} = \rho\frac{du}{d\rho}, \qquad \frac{du}{d\omega} = -\rho\frac{dv}{d\rho}$$

3º.- PROBAR QUE LAS FUNCIONES ORDINARIAS SON MONÓGENAS.

Las funciones ordinarias se hacen dependientes de la función exponencial, puesto que las expresiones

$$y = x^m, \qquad y = lx, \qquad y = \mathrm{sen}\,x, \cdots \mathrm{etc.}$$

pueden adquirir las formas siguientes:

$$y = e^{mlx}, \qquad yx = e^x, \qquad y = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \cdots\cdots etc.$$

Además, la exponencial es monógena; en efecto, sea

$$e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

al comparar este resultado con X + Yi, se obtiene;

$$\mathrm{X} = e^{x}\cos y, \qquad \mathrm{I} = e^{x}\operatorname{sen} y$$

o sea

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{d\rho} = e^{x}\cos y, \quad \frac{d\,\mathrm{I}}{dy} = e^{x}\cos y$$

$$\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx} = e^{x}\operatorname{sen} y, \quad \frac{d\,\mathrm{X}}{dy} = -e^{x}\operatorname{sen} y$$

luego la función exponencial es monógona, puesto que se verifican las ecuaciones de condición:

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{dx} = \frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}, \qquad \frac{d\,\mathrm{Y}}{dx} = -\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}$$

Ahora bien, como las otras funciones ordinarias dependen de ésta, de ahí resulta que las funciones ordinarias pueden considerarse todas monógenas.

4º.- FUNCIONES MONOTROPAS Y POLÍTROPAS

Se denomina función *monodroma* o *monstropa* en una porción de plano, aquella en que la variable, después de recorrer cierta parte del mismo, al llegar al punto de partida, reproduce para la función el mismo valor.

Las funciones bien definidas, tales como, las racionales, exponenciales y circulares, son monodromas en toda la extensión del plano. No sucede lo propio con las funciones irracionales. Sea:

$$\sqrt{z-a}$$

Esta función deja de ser monodroma en toda porción de plano que contenga el punto *a*. En efecto, si *z* describe una circunferencia de radio *r* cuyo centro sea *a*, el valor de la circunferencia $re^{\theta i}$, representa *z* **-** *a*, siendo *r* la recta que une los dos puntos *a* y *z*; luego:

$$\sqrt{z-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}$$

Al describir la variable la circunferencia en sentido de los arcos positivos, resulta después de una vuelta

$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta+2\pi}{2} i} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = -r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}$$

la función, pues, cambia cuando la variable independiente llega a la posición primera.

La función que adquiere diferentes valores, cuando la variable pasa por ciertos puntos, se llama polítropa en la porción de plano que comprende dichos puntos. En este caso la función presenta diferentes ramas.

5º.- FUNCIÓN LOGARÍTMICA**.**

El conocimiento de la función logarítmica, tomada en su mayor grado de generalidad, es de importancia para esta clase de estudios. Sea:

$$e^{\log z} = z, \qquad z = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi), \qquad \log z = x + yi$$

luego:

$$\log z = x + yi = \log\left[\rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right]$$

o sea,

$$\rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

Al separar los respectivos términos reales e imaginarios, resulta:

$$\rho\cos\varphi = e^{x}\cos y, \qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi = e^{x}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

de cuyas igualdades se deduce fácilmente

$$\rho = e^{x}, \qquad \cos\varphi = \cos y, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{sen}\,y$$

de donde $x = \log\rho$, $y = \varphi + 2k\pi$, siendo K un número entero. Así tendremos en definitiva:

$$\log z = \log\rho + i(\varphi + 2k\pi)$$

Si se toman los diferentes valores que van sucediéndose para la función, según valores próximos de *z* y en el concepto de que exista la ley de continuidad, se alcanza, por ejemplo, el valor inicial $u_{\circ}$ que debe corresponder a $z = z_{\circ}$.

La función logarítmica ofrece, pues, una infinidad de ramas que se distinguen unas de otras por los diferentes valores que se atribuyen a *k*, siendo notable que las condiciones de continuidad desaparecen, si *z* pasa por cero, razón por la cual conviene que la variable no pase por el origen de las coordenadas.

6º.- PUNTOS SINGULARES EN FUNCIONES EXPLÍCITAS DE UNA VARIABLE

Consideremos una función racional, siendo la variable compleja y bajo la forma: $u=\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$, y en el concepto de que $f(z)$ y $\varphi(z)$ sean funciones racionales y enteras. A la vista de dicha fórmula, se deduce que todos los valores de *u* son finitos, excepto aquellos que corresponden a las raíces de $\varphi(z)=0$, en cuyo caso resultan los polos de la función *u*.

Los valores de los puntos respectivos a dichas raíces suelen llamarse los infinitos de la función, así como los que corresponden a las raíces de $f(z)=0$, constituyen los ceros de la misma. Todos estos puntos suelen llamarse singulares y son los más sencillos.

7º.- PUNTOS CRÍTICOS Y SINGULARES EN GENERAL.

Sea una función algebraica *u* definida por la ecuación:

$$0=\mathrm{A}u^{m}+\mathrm{B}u^{m-1}+\mathrm{C}u^{m-2}+\cdots\cdots=\mathrm{F}(z,u)$$

siendo A, B, C, funciones de *z*.

Esta función produce diferentes ramas representantes de los diferentes valores de *u*, correspondientes a cada uno de los de *z*; puede seguirse el movimiento de cada rama, según el valor de partida de la variable *z* y en el concepto de sujetarse a la ley de continuidad. Sin embargo, este procedimiento caerá en defecto cuando la variable pase por puntos en número finito que reduzcan el coeficiente del primer término a cero; o también en el caso de que los valores de *z*, satisfagan a las dos ecuaciones:

$$\mathrm{F}(z,u)=0,\qquad \frac{d\,\mathrm{F}}{du}=0$$

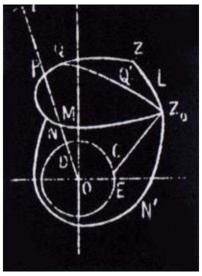
correspondientes a las raíces iguales.

Toda esta clase de puntos forman los llamados puntos singulares algebraicos de la función *u*, designándose en particular a los que satisfacen a la segunda condición, puntos críticos algebraicos.

Se conocen aun otra clase de puntos singulares correspondientes a las funciones trascendentes, tales como, por ejemplo, los pertenecientes a las funciones logarítmicas; más esta clase de puntos singulares se distinguen de los primeros, por llevar el sello de la indeterminación, o sea por salirse de la finitud. Hay autores que llaman indistintamente puntos críticos a todos cuantos acabamos de indicar; de todos modos interesa que la variable independiente no pase jamás por dichos puntos críticos.

Así pues, si z se mueve por todo un plano, excepto por los puntos singulares, un camino cualquiera de $z_\circ$ á z, podrá reducirse a una combinación de caminos bien determinados, conforme a los contornos que se llaman elementales. [(a)]

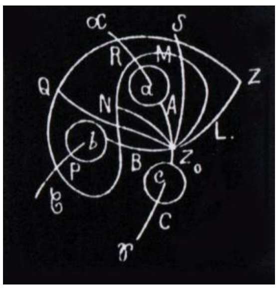
(a).- Consideremos un camino determinado L escogido a voluntad entre los varios que podrían escogerse que van de $z_\circ$ á z. Al describir un círculo indefinidamente pequeño alrededor de O, juntando $z_\circ$ á C se obtiene



el contorno formado por la línea $z_\circ C$, el círculo CDE y la línea $C z_\circ$, el cual todo forma lo que se llama un contorno elemental, referido a la función logarítmica $\log z$. Supondremos K ó K^{-1} el contorno del círculo descrito en sentido directo o contrario, esto es, según se marche de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, junto con los caminos $z_\circ C$ y $C z_\circ$ del contorno elemental. Al trazar por el punto O una línea cualquiera OI que se prolonga indefinidamente tan solo por un lado y con la condición de no encontrar a la línea $C z_\circ z$ se forma la *línea cortante*. Ahora bien, sea $z_\circ \mathrm{MNPQZ} = \mathrm{L}'$ un nuevo camino que conduce de $z_\circ$ á Z, y sean M y P los puntos donde atraviesa la *cortante*.

Tómese dos puntos N y Q situados a ambos lados de OI, uniéndolos con $z_\circ$ por medio de dos nuevos contornos, pero con la condición de no cortar a dicha línea OI. Así, pues, el camino $z_\circ \mathrm{MNPQZ}$ debe ser lo mismo que el: $z_\circ MNN' z_\circ N' NPQQ' z_\circ Q' QZ$.

Empero, según el principio de Cauchy, que pronto veremos, el camino es $z_\circ MNN' z_\circ$ equivalente al elemental $z_\circ CDEC' z_\circ$; el $z_\circ N' NPQQ' z_\circ$ al mismo elemental anterior si bien en sentido contrario; además $z_\circ QZ$ equivale a L según el mismo principio de Cauchy; luego el camino: $z_\circ MNN' z_\circ N' NPQQ' z_\circ Q' QZ$ es equivalente a $\mathrm{KK}^{-1}\mathrm{L}$. Ahora sea: $\mathrm{u} = \log \rho_\circ + i(\varphi_\circ + 2K_\circ \pi)$ el valor inicial de log.z al punto $\mathrm{z}_\circ$; U su valor final en Z, cuando siga el camino L. El argumento z aumenta 2π cuando describe el contorno elemental; luego log.z volverá al punto de partida $\mathrm{z}_\circ$ con el valor inicial $u_\circ + 2\pi i$. Si z describe luego el camino expresado por K^{-1}, el argumento disminuye de 2π y en su virtud log.z de 2π, alcanzando la función el mismo valor primitivo $u_\circ$; siguiendo, por fin, la línea L adquiere el valor u.



En general, el valor final de log.z correspondiente a un camino cualquiera L' será: $u + \partial 2\pi i$, siendo ∂ la diferencia entre el número de veces que el camino L' corta a la línea OI de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Si consideramos ahora la función algebraica:

$$0 = Au^m + Bu^{m-1} + \cdots\cdots = F(z,u)$$

A, B., siendo polinomios de z. Si la variable se mueve por todo el plano (excepto por los puntos críticos), se puede en este caso también reducir los diferentes caminos que van de $z_\circ$ a Z una serie de caminos elementales.

Sea L un camino fijo escogido a voluntad de $z_\circ$ a Z. Juntemos $z_\circ$ con los puntos críticos *a, b, c,*....por medio de contornos elementales.

Sean A, B, C,.... los valores de estos contornos en sentido directo; $\mathrm{A}^{-1}, \mathrm{B}^{-1}, \mathrm{C}^{-1} \cdots$ los mismos contornos en sentido inverso. Consideremos una serie de *cortantes* $a\alpha, b\beta, c\gamma \cdots$ bajo condiciones análogas a las del caso anterior. Tomemos el camino $z_\circ MNPQRSZ = L'$, y en virtud de las líneas de descomposición $\mathrm{ZZ}_\circ, \mathrm{Nz}_\circ, \mathrm{Sz}_\circ$, se tendrá:

8º.- RESUMEN.

Una función es monodroma o monotropa, cuando adquiere un valor único y determinado para otro también determinado de la variable independiente.

Llámase la función polítropa cuando adquiere diferentes valores para uno dado a la variable independiente, es decir, que mientras ésta describe una línea, aquella traza otras varias formando un haz de ramas.

Punto ordinario es todo punto en que la función se conserva monodroma y además finita y determinada, lo propio que su derivada, en un círculo de radio indefinidamente pequeño que tenga por centro el punto dado.

Cuando todos los puntos que corresponden a la función, se hallan bajo las condiciones precedentes, dicha función se llama holomorfa.

Cuando se trata de una función que es holomorfa en toda la extensión del plano, excepto para una cierta región que contiene los puntos correspondientes a sus polos, se dice que es meromorfa en la porción de este plano.

9º.- PRINCIPIOS GENERALES ACERCA DE LA VARIABILIDAD DEL ARGUMENTO DE UNA FUNCIÓN.

Después de las consideraciones precedentes, podemos ya dar el principio siguiente:

«*Si una función es meromorfa, y la variable describe cierta línea limitada, la cual se subdivide en partes, y en el concepto de que dicha variable no pase por los ceros e infinitos que dicha función puede contener, cabe decir que el argumento de dicha función experimenta una variación que es igual a la suma de las variaciones que corresponden a las partes en que se ha subdividido la línea total descrita por la variable independiente*.»

De este principio, evidente por si mismo, se deduce que, si una función es meromorfa en cierta extensión del plano, y dividimos el área respectiva en varias partes por medio de transversales bajo las condiciones del caso anterior, la variación que sufre el argumento de la función cuando la variable describe el contorno del área total en sentido directo, es igual a la suma de las variaciones sufridas por la misma función después de haber recorrido la variable los contornos parciales contados siempre en sentido directo, o sea dejando a la porción de plano que se considera.

1º	contorno	z_oMNz_o	equivalente	a	A
2º	contorno	z_oNPQz_o	equivalente	a	B^{-1}
3º	contorno	z_oQRSz_o	equivalente	a	A^{-1}
4º	contorno	z_oSZ	equivalente	a	L

En resumen el camino *L'* es equivalente al camino $A\,B^{-1}\,A^{-1}\,L$.

En efecto, las líneas interiores al contorno total serán recorridas por la variable independiente dos veces y en sentido contrario el uno del otro. Así, pues, según lo que precede, el argumento de la función no habrá alterado, no existiendo más variabilidad que la correspondiente al contorno total.

Después de lo dicho se deduce la consecuencia siguiente: *Si una función es holomorfa en cierta parte de un plano que no contiene raíz alguna, la variación del argumento de la función sobre el contorno es nula. Ahora bien, si suponemos un polinomio entero en el supuesto de que la variable recorra un contorno que encierre varias raíces, la variación que sufre el argumento es igual a* 2π *multiplicado por el número de raíces comprendidas dentro del contorno descrito por la variable*. Este teorema queda evidentemente demostrado, sabiendo que si la variable describe una curva cerrada que contenga una raíz, el argumento de la función altera en 2π.

10º.- INTEGRALES DEFINIDAS DE FUNCIONES MONODROMAS**.**

Cuando la variable *z* de una función $u = f(z)$ recorre una cierta línea *L* dividida en los arcos parciales $z_\circ z_1 z_2 z_3 \cdots z_u z$ los cuales contienen respectivamente los puntos $\zeta_\circ \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \cdots \zeta_u$, basta tomar el límite de la suma $\Sigma(z_k - z_k)\, f\,(\zeta_{k-1})$ para tener la integral definida de la función $f(z)$. Esta integral suele escribirse bajo la forma siguiente:

$$\int_{\mathrm{L}} f(z)dz$$

Hay que advertir que esta integral es una generalización de las integrales definidas correspondientes a la variable real, pues en éstas, por ser la línea de integración una línea recta situada en uno de los ejes, basta fijar sus extremos para determinarla.

En muchos casos conviene referir la integral $\int_{\mathrm{L}} f(z)dz$ a otras de variable real, para lo que debe atenderse al desarrollo siguiente:

Sea:

$$z = \varphi + yi \qquad f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$$

luego:

$$\int_{\mathrm{L}} f(z)dz = lim. \sum f(z)\Delta z = lim. \sum (\mathrm{P} + \mathrm{Q}i)(\Delta\varphi + i\Delta y) = lim. \sum \left[\left(\mathrm{P} + \mathrm{Q}\frac{\Delta y}{\Delta y}\right)\Delta x + i\left(\mathrm{P}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathrm{Q}\right)\Delta x\right]$$

Considerando y y $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ funciones de x siendo $\varphi(x,y)=0$ la ecuación de la línea de integración, y $\left(\frac{du}{dx}\right)$ el límite de $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, podremos escribir:

$$\int_{\mathrm{L}} f(z)\,dz = \int_{x_\circ}^{\mathrm{X}} \left(\mathrm{P} - \mathrm{Q}\frac{dy}{dx}\right) dx + i\int_{x_\circ}^{\mathrm{X}} \left(\mathrm{Q} + \mathrm{P}\frac{dy}{dx}\right) dx$$

En esta expresión $x_\circ$ y X representan los valores en las extremidades del camino L.

También podrían darse x e y en función de una misma variable t, resultando los límites de la nueva integral dependientes de esta última variable; así pues:

$$\int_{t_\circ}^{\mathrm{T}} f(z)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}i\right) dt$$

Aun podría representarse la integral anterior por

$$\int_{z}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz$$

forma indeterminada, si no se indican las relaciones que enlazan x e y entre si.

11º.- TEOREMA DE CAUCHY.

Suficientes son estos preliminares para conocer el célebre teorema de Cauchy, y daremos la demostración que se considera clásica en Alemania, y que se apoya en el teorema de Riemann. Llámase contorno cerrado una línea continua cerrada que se corta, por ejemplo, la circunferencia, elipse, un rectángulo. Un contorno simple, al limitar una área, jamás la cubre en parte o en totalidad.

El teorema de Riemann puede enunciarse del modo siguiente:

La integral doble:

$$\iint \left(\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dy}\right) dxdy$$

considerada en puntos de una área limitada por un contorno cerrado simple C, es igual a la integral:

$$\int (\mathrm{X}dy + \mathrm{Y}dx)$$

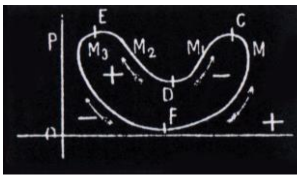
tomada a lo largo del contorno C, descrito por un observador que tenga el área limitada a su izquierda, es decir, marchando en el sentido directo.

En efecto, al integrar de momento el término

$$\iint \frac{d\,\mathrm{X}}{dx} dxdy$$

con relación a *x*, dejando *y* constante, resulta para la expresión de la integral indefinida

$$\int \mathrm{X}dy$$



Sea OP el valor constante dado a ***y*** en la integración parcial efectuada con relación a ***x***, así pues, la integral anterior podrá expresarse por:

$$\int \left(\mathrm{X}_{\mathrm{M}} - \mathrm{X}_{\mathrm{M}_1} + \mathrm{X}_{\mathrm{M}_2} - \mathrm{X}_{\mathrm{M}_3} + \cdots\right) dy$$

o sea, en general; $\int \mathrm{X}dy$

esto es, en el concepto de hacer variar X sobre el contorno C y en sentido directo; luego para calcular $\int(\mathrm{X}_{\mathrm{M}} + \cdots)dy$ basta considerar los valores extremos de *y* para tener la integral $\int \mathrm{X}dy,$ pues mientras el punto M se mueve en sentido directo al trasladarse de E a C, lo contrario tiene lugar respecto a la rama DC correspondiente al movimiento del punto M_1; pero como esta integral $\int -\mathrm{M}_1 dy,$ es negativa, puede hacerse positiva cambiando la dirección del movimiento, resultando entonces el movimiento directo CD; una cosa análoga se deduce para las otras dos ramas DF y FE.

Así probaríamos también que la integral

$$\iint \frac{d\,\mathrm{Y}}{\mathrm{dy}} dxdy$$

extendida a todos los puntos del área comprendida en el interior del contorno C, es igual a la integral simple $\int \mathrm{Y}dx$ tomada a lo largo del contorno C, pero en sentido retrógrado, o sea a la integral $\int -\mathrm{Y}dx$ tomada en sentido directo, luego

$$\iint \left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}-\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\right)dxdy=\int \left(\mathrm{X}dy+\mathrm{Y}dx\right)$$

La integral del segundo miembro está tomada en sentido directo y a lo largo del contorno.

Como consecuencia de este principio o como segundo teorema, podríamos admitir que la integral doble

$$\iint \left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}-\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\right)dxdy$$

según todos los puntos de un área limitada por el contorno cerrado C, sea igual a la integral simple $\int(\mathrm{Y}dy-\mathrm{X}dx)$ tomada a lo largo del contorno C, en sentido directo.

Este teorema o proposición segunda, se demuestra del mismo modo que la primera.

Los dos teoremas precedentes, debidos a Riemann, caen en defecto si en el interior de C o sobre el contorno, las funciones X, Y, o sus derivadas parciales resultan indefinidamente grandes, discontinuas o mal determinadas, porque entonces las integraciones que hemos efectuado no pueden aceptarse.

Si la expresión $\mathrm{X}dy+\mathrm{Y}dx$ es una diferencial exacta, según las condiciones de integrabilidad, se tiene:

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}=\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy} \text{ o sea } \frac{d\,\mathrm{X}}{dx}-\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}=0$$

Así, pues, según el teorema de Riemann, la integral tomada a lo largo de un contorno cerrado C de una diferencial exacta es nula, o lo que es lo mismo, las integrales de una diferencial exacta tomadas a lo largo de dos contornos que tengan las mismas extremidades son iguales, con tal que entre estos dos contornos la diferencial en cuestión sea finita, bien determinada y continua, así como sus derivadas parciales.

Este teorema de Riemann conduce de una manera fácil y sorprendente al bello teorema de Cauchy. Tómense las fórmulas halladas:

$$\iint\left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}-\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\right)dxdy=\int\left(\mathrm{X}dy+\mathrm{Y}dx\right)$$

$$\iint\left(\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}+\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\right)dxdy=\int\left(\mathrm{Y}dy-\mathrm{X}dx\right)$$

Supongamos que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1}$ sea una función holomorfa de $x+y\sqrt{-1}$ en el interior del contorno C, o también sobre el contorno; en virtud de las ecuaciones de monogeneidad

$$\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}=\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy}\qquad\frac{d\,\mathrm{X}}{dy}=-\frac{d\,\mathrm{Y}}{dx}$$

las fórmulas anteriores se transforman en

$$0=\int\left(\mathrm{X}dy+\mathrm{Y}dx\right)\qquad 0=\int\left(\mathrm{X}dx-\mathrm{Y}dy\right)$$

Al sumar estas dos ecuaciones, después de haber multiplicado la primera por $\sqrt{-1}$, se halla:

$$0=\int\left(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1}\right)\left(dx+dy\sqrt{-1}\right)\text{ o sea }0=\int f(z)dz$$

Con esto queda demostrado que la integral $\int f(z)dz$ tomada a lo largo del contorno cerrado simple C, en el interior del cual *f(z)* permanece holomorfa, es nula.

Luego, si dos contornos $z_\circ zZ$ y $z_\circ z'Z$, terminados en los mismos extremos, forman por su unión un contorno cerrado simple, sin haber punto por el cual la función deje de ser holomorfa, las integrales *f(z)* tomadas entre los mismos límites $z_\circ$ y Z a lo largo de los contornos $z_\circ zZ$ y $z_\circ z'Z$, serán iguales.

Después de estas consideraciones, podemos enunciar el teorema de Cauchy: *El valor de la integral* $\int f(z)dz$ *no cambia, si se deforma el contorno de integración de una manera continua, aunque arbitraria, con tal que no se atraviese ningún punto en que f(z) cese de ser holomorfa, y en el supuesto de conservarse las mismas extremidades* $z_\circ$ y Z *como límites de la integral.*

En efecto; considérese un contorno de integración A, teniendo por extremidades $z_\circ$ y Z; otro B que termine en los mismos extremos y bajo las condiciones precitadas. Si estos contornos A, B forman por su unión un contorno simple cerrado, el teorema queda ya resuelto. Si los contornos A, B se cortan en los puntos $\alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_n$, sabemos que las integrales de *f(z)* tomadas entre z y α_1, α_1 y $\alpha_2 \cdots \alpha_n$ y Z son iguales; luego las integrales tomadas a lo largo de los caminos A y B darán los mismos valores.

12º.- PROPIEDADES IMPORTANTES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS.

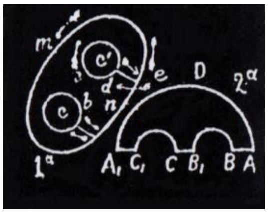
1º.- El valor de la integral $\int k\, f(z) dz$ tomada a lo largo de un contorno cerrado K, en el interior del cual la función *f(z)* permanece holomorfa, es cero.

En efecto, al tomar dos puntos cualesquiera $z_\circ$ y Z en el contorno, se tiene:

$$\int k = \int z_\circ \alpha Z + \int Z \beta z_\circ = \int z_\circ \alpha Z - \int z_\circ \beta Z$$

Según el teorema de Cauchy, este segundo miembro es cero; luego $\int K = 0$

2º.- En el concepto de ser C, C'...., etc, varios contornos cerrados interiores a otro K, si la función *f(z)* permanece holomorfa en el intervalo comprendido entre el contorno exterior K y los interiores C, C'..., etc., se tendrá $\int k = \int c + \int c + \cdots$ tomándose las integrales todas en el mismo sentido respecto a las líneas de integración. En efecto, júntese el contorno exterior con los interiores, tal como lo manifiesta la adjunta figura: luego



$$\int_{ab} + \int_{c} + \int_{ba} + \int_{aue} + \int_{ed} + \int_{c'} + \int_{de} + \int_{ema} = 0$$

empero

$$\int_{ab} = -\int_{ba} \text{ y } \int_{ed} = -\int_{de}$$

así pues,

$$\int_{auema} + \int_{c} + \int_{c'} = 0$$

Tomando las circunferencias en sentido contrario del indicado por las flechas, resulta:

$$\int_{auema} = \int_{c} + \int_{c'}$$

3ª.- Si en el interior del contorno K, la función *f(z)* presenta puntos críticos aislados *aa'...etc,* se tendrá:

$$\int_{k} = \int_{c} + \int_{c'} + \cdots$$

en el concepto de ser *c, c'*.... círculos indefinidamente pequeños que envuelvan a los puntos críticos *a, a'*....

Este principio no es más que una consecuencia inmediata del anterior, y por consiguiente no necesita demostración

4º.- Si una función *f(z)* se anula cuando *z* = *a*, permaneciendo además continua y monodroma en los alrededores de este punto, podrá escribirse

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

en el concepto de ser *m* un número entero, y $\varphi(z)$ una función continua y monodroma en los alrededores del punto *a*, sin que se anule en dicho punto.

Para demostrar este principio tan importante, bastará suponer el desarrollo general, según la fórmula de Taylor para un punto próximo al *a*:

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \cdots\cdots$$

si *a* + *t* = *z*, resulta

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \cdots\cdots$$

Sea ahora $f^{(m)}(a)$ la primera de las derivadas sucesivas de *f* que no se anula para *z* = *a*, luego:

$$f(z) = (z-a)^m \left[\frac{f^{(m)}(a)}{1.2.3.\cdots m} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{1.2.3.\cdots(m+1)}(z-a) + \cdots\cdots \right]$$

designando la cantidad que está dentro del paréntesis por $\varphi(z)$, y en el concepto de que $z = a,$ queda con ello evidenciada la fórmula primera. La cantidad *a*, se llama un cero de la función *f(z)*, y *m* es su grado de multiplicidad.

5º.- Todo punto crítico *a* de $f(z)$, que es punto ordinario de $\frac{1}{f(z)}$ es un polo.

En efecto; la función $\frac{1}{f(z)}$ siendo continua y monodroma a los alrededores del punto *a*, se tendrá:

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z)$$

siendo $\varphi(z)$ también continua y monodroma en los alrededores de *a*, y sin que se anule en dicho punto, según lo demostrado anteriormente.

Ahora bien, la función $\frac{1}{\varphi(z)}$ gozará evidentemente de las mismas propiedades, y en su virtud puede escribirse:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\mathrm{A}_\circ+\mathrm{A}_1(z-a)+\cdots\cdots$$

Combinando debidamente las igualdades anteriores, se obtiene:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1(z-a)+\cdots}{(z-a)^m}=\frac{\mathrm{A}_0}{(z-a)^m}+\frac{\mathrm{A}_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{z-a}+\varphi(z)$$

En esta expresión debe considerarse la función $\psi(z)$ continua y monodroma a los alrededores del punto *a*, siendo *m* el grado de multiplicidad de lo que se llama el polo *a*.

6º.- Una función que no ofrezca más que ceros y polos, puede tomar la forma siguiente:

$$(1)\qquad f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

en que

$$\varphi(z)=\frac{\mathrm{A}_0}{(z-a)^m}+\frac{\mathrm{A}_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{z-a}$$

Integrando (1), después de multiplicar ambos miembros por *dz* y de haber hecho las sustituciones debidas de valores, resulta:

$$\int f(z)dz=\int\psi(z)dz+\mathrm{A}_{m-1}\log(z-a)+\cdots+\frac{\mathrm{A}_0}{(-m+1)(z-a)^{m-1}}$$

Cuando *z* describe, por ejemplo, una pequeña circunferencia alrededor del punto *a*, los términos que se hallan integrados toman el mismo valor en los dos límites de 0 y 2π; empero la expresión logarítmica, según lo explicado anteriormente, debe aumentar de 2πi, suponiendo la integración efectuada en sentido directo, o sea, dejando siempre a la izquierda la región del plano que se considera.

En cuanto a ψ(z), como esta función permanece finita y monodroma en el círculo supuesto, resulta también por los principios que anteceden

$$\int_c \psi(z)dz = 0$$

Si luego hiciéramos lo propio con respecto a los demás puntos *a'*, *a''*....resultaría definitivamente $\int_k + \int_c + \int_{c'} + \cdots = 2\pi i\left(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \cdots\right)$.

Los coeficientes $\mathrm{A}_1\, \mathrm{A}_2 \cdots$ se llaman residuos de la función *f(z)* respecto a los puntos críticos *a*, *a'*...., luego la integral $\int f(z)dz$ tomada en sentido directo de la longitud de un contorno cerrado R, en cuyo interior la función *f(z)* no tiene sino puntos críticos aislados, es igual a la suma de los residuos relativos a estos puntos críticos, multiplicados por 2π*i*.

7º.- La integral $\int f(z)dz$, tomada según una circunferencia indefinidamente pequeña *c* que tenga su centro en *a*, tiende hacia cero al mismo tiempo que el radio *r* del círculo, cualquiera que sea la función *f(z)*, cuando se cumple la condición $lim(z-a)f(z)=0$, para $z = a$.

En efecto; si M es el máximo del módulo $(z-a)f(z)$ del circulo c, se tendrá:

$$\text{módulo } f(z) \leqq \frac{\mathrm{M}}{\text{módulo}(z-a)} \leqq \frac{\mathrm{M}}{r}$$

Empero, si $z = x + yi$, resulta $dz = dx + idy$; de donde $\text{módulo}\, dz = \sqrt{d\varphi^2 + dy^2} = ds$, luego:

$$\text{módulo} \int_c f(z)dz \leqq \int_c \frac{\mathrm{M}}{r} ds \leqq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}} 2\pi r \leqq 2\pi \mathrm{M}$$

y como M tiende hacia cero, el límite de $\int_c f(z)dz$ es cero.

8º.- La integral $\int f(z)dz$, tomada según un círculo c que tiene su centro en el origen, tenderá hacia cero, si el radio R del círculo crece indefinidamente, cumpliéndose la condición: $lim\, z\, f(z)=0$, para $z=\infty$.

En efecto; si M es el máximo del módulo de *z f(z)* en el círculo supuesto, resulta:

$$\text{mód } f(z) \overline{\overline{<}} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}$$

luego

$$\text{mód} \int_{c} f(z)dz \overline{\overline{<}} \int_{c} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} ds \overline{\overline{<}} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} 2\pi\mathrm{R} \overline{\overline{<}} 2\pi\mathrm{M}$$

cuyo resultado confirma el teorema, por consideraciones análogas al caso anterior.

13º.- DETERMINACIÓN DE LA INTEGRAL $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$, siendo $p<1$

El primer procedimiento que podemos dar para demostrar esta integral, como el más elemental, esta indicado en la obra de Cálculos de M. Serret. Tomemos la expresión:

$$\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}, \text{siendo } m<n.$$

Al considerar

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

pueden expresarse las raíces de la ecuación binomia $1+z^{2n}=0$ por $e^{\pm\varphi_k\sqrt{-1}}$, dando a k los valores siguientes; 0, 1, 2,. . . . (n - 1). Según la teoría de las fracciones simples, los coeficientes indeterminados de los numeradores, expresados por A, B, C, ... vienen dados por:

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{F}(a)}{f'(a)}, \quad \mathrm{B}=\frac{\mathrm{F}(b)}{f'(b)}, \quad \mathrm{C}=\frac{\mathrm{F}(c)}{f'(c)}, \cdots\cdots$$

en el supuesto de que las funciones F y *f* representen respectivamente el numerador y el denominador de la fracción dada que se descompone en otras simples. Así pues,

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{F}(a)}{f'(a)}=\frac{n\,e^{2m\varphi_k\sqrt{-1}}}{2n\,e^{(2n-1)\varphi_k\sqrt{-1}}}=\frac{1}{2}\frac{e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{e^{2n\varphi_k\sqrt{-1}}}$$

Ahora bien,

$$e^{2n\varphi_k\sqrt{-1}} = e^{(2k+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$$

luego

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{2}e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}$$

Las raíces de la ecuación binomia son todas imaginarias, y dos a dos conjugadas; podremos, pues, tomar el valor suma de las dos fracciones simples, que corresponde a dos raíces conjugadas, resultando:

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z-e^{\varphi_k\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z-e^{-\varphi_k\sqrt{-1}}}\right] = \sqrt{e^{-(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2m+1)\varphi_k + \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}{z-\cos\varphi_k - \operatorname{sen}\varphi_k\sqrt{-1}} + \frac{\cos(2m+1)\varphi_k - \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}{z-\cos\varphi_k + \operatorname{sen}\varphi_k\sqrt{-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k - 2\operatorname{sen}\varphi_k\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k} =$$

$$= \frac{-(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k + \operatorname{sen}\varphi_k\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k}$$

Multiplicando ambos miembros por *dz* e integrando desde -Z hasta +Z, se tiene:

$$\int_{-z}^{z}\mathrm{T}dz = -\frac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi_k\log\frac{(z-\cos\varphi_k)^2+\operatorname{sen}^2\varphi_k}{(z+\cos\varphi_k)^2\operatorname{sen}^2\varphi_k} + \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\left[\operatorname{arctg}\frac{z-\cos\varphi_k}{\operatorname{sen}\varphi_k} + \operatorname{arctg}\frac{z+\cos\varphi_k}{\operatorname{sen}\varphi_k}\right]$$

de donde:

$$\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{T}_{\mathrm{K}}dz = \pi\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k$$

Si suponemos $\alpha = \frac{2m+1}{2n}\pi$, podemos escribir: $(2m+1)\varphi_k = (2\mathrm{K}+1)\alpha$; luego

$$\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{T}_{\mathrm{K}}dz = \pi\operatorname{sen}(2\mathrm{K}+1)\alpha$$

Según los valores de T, se obtiene:

$$\frac{uz^{2m}}{1+z^{2n}} = T_0 + T_1 + \cdots\cdots + T_{n-1}$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{uz^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \pi[\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}3\alpha + \cdots\cdots \operatorname{sen}(2n-1)\alpha]$$

Si multiplicamos ambos miembros por $2\operatorname{sen}\alpha$, atendiendo que:

$$2\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}\operatorname{sen}\frac{B+A}{2} = \cos A - \cos B$$

en el concepto de ser A<B resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}\alpha\, nz^{2m}}{1+z^{2n}}dz = \pi\left[(1+\cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \cdots + [\cos(2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha]\right]$$

Ahora bien, el segundo miembro se reduce a $\pi(1-\cos 2n\alpha) = 2\pi$ y según el valor α, se halla:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nz^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Empero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+0} + \int_{0}^{\infty}$ produce dos integrales iguales por ser cuadrados los valores de *z*; así pues,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2nz^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Supongamos ahora $z = x^{\frac{1}{2n}}$ de donde:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2nz^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\frac{2m}{2n}} \times x^{\frac{1}{2n}-1}dx}{1+x}$$

o sea:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

por fin, si aceptamos que $\frac{2m+1}{2n} = p,$ resulta la fórmula definitiva:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

OTRA DEMOSTRACIÓN NOTABLE DE M. BRIOT

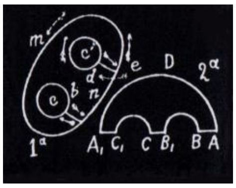
La función $\frac{z^{n-1}}{1+z}$ en que n designa un número positivo menor que la unidad, admite un polo que corresponde a z = -1 y además un punto crítico en el origen. Desde dicho origen como centro y con un radio indefinidamente grande podemos imaginar una semicircunferencia por la parte superior del eje x, luego otra semicircunferencia indefinidamente pequeña, y por fin, desde el polo otra también indefinidamente pequeña. Los radios vendrán designados respectivamente por R, E, E'.

La función propuesta, siendo holomorfa dentro de la línea cerrada supuesta, cumplirá con la condición de que la integral

$$\int \frac{z^{n-1}}{1+z}dz,$$

según el contorno dado, sea nulo. La parte de la integral relativa a la semicircunferencia de radio indefinidamente grande es nula; la del centro, indefinidamente pequeña, también lo es en virtud de las propiedades 6ª y 7ª del número precedente. Para la integral relativa a la semicircunferencia indefinidamente pequeña trazada desde el polo puede suponerse $z = -1 + \mathrm{E}'e^{\theta' i}$ lo que da:

$$\int_\pi^0 \frac{z^{n-1}\mathrm{E}'e^{\theta' i}id\theta'}{\mathrm{E}'e^{\theta' i}} = i\int_\pi^0 z^{n-1}d\theta' = -i\int_0^\pi z^{n-1}d\theta'$$



Debe advertirse que el movimiento de la variable se realiza en sentido de la flecha, según indica la adjunta figura y respecto a la primera integral.

Cuando E' sea indefinidamente pequeña, z^n tiene por valor $e^{n\pi i}$, puesto que $z = -1 = e^{\pi i}$.

Así pues, la integral anterior se transforma en:

$$-i\int_0^{\pi} e^{n\pi i - \pi i} d\,\theta' = -i\int_0^{\pi} \frac{e^{n\pi i}}{e^{\pi i}} d\,\theta' = -i\int_0^{\pi} \frac{e^{n\pi i}}{-1} d\,\theta' = i\,e^{n\pi i}\int_0^{\pi} d\,\theta' = i\,\pi\,e^{n\pi i}$$

La recta BA da una integral que tiene un límite determinado, expresado por: $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$,

en cuanto a las rectas $A_1\ B_1$ y $C_1\ B_1$ se tiene:

$$\theta = \pi, \qquad \mathrm{z}^{\mathrm{n}} = r^n e^{n\pi' i}\,(1), \qquad z = -r$$

si tomamos la diferencial de (1) $nz^{n-1}dz = nr^{n-1}e^{n\pi i}dr$ y sustituimos valores en la integral primera, se obtiene:

$$e^{n\pi i}\int_{\mathrm{R}}^{1+\mathrm{E'}} \frac{r^{n-1}}{1+r} dr + \int_{1-\mathrm{E'}}^{\mathrm{E}} \frac{r^{n-1}}{1+r} dr = -e^{n\pi i}\left(\int_{\mathrm{E}}^{1-\mathrm{E'}} \frac{r^{n-1}}{1+r} dr + \int_{1+\mathrm{E'}}^{\mathrm{R}} \frac{r^{n-1}}{1-r} dr\right)$$

Advirtiendo ahora que la suma de las integrales relativas a las diversas partes del contorno cerrado debe ser nula, sabiendo además que las cuatro primeras partes tienden hacia límites determinados, resulta que la suma de las dos últimas integrales debe tener también su límite.

Este límite es lo que Cauchy llama el ***valor principal*** de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{1-r} dr,$$

y que puede expresarse por K.

En totalidad pues, podemos escribir:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x}dx + \pi i e^{n\pi i} - \mathrm{K}e^{n\pi i} = 0,$$

de donde

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1-x}dx = (\mathrm{K} - \pi i)(\cos n\pi + i \operatorname{sen} n\pi) = (\mathrm{K}\cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi) + i(\mathrm{K}\operatorname{sen} n\pi - \pi\cos n\pi)$$

Empero, atendiendo a que el primer miembro hace referencia a cantidades reales, se deduce:

$$\mathrm{K}\operatorname{sen} n\pi - \pi\cos n\pi = 0$$

o sea

$$\mathrm{K} = \pi\cos n\pi$$

De suerte que en definitiva se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = \pi\cos n\pi\cos n\pi + \pi\operatorname{sen} n\pi = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$$

fórmula exactamente igual a la anterior, según el método elemental de M. Serret.

Barcelona, Noviembre 1891 a Julio 1892
Lauro Clariana Ricart