Funciones Elípticas

1892

Con ser tantos los puntos de vista que se conocen hoy para emprender el estudio de las funciones elípticas, siendo alguno de ellos difíciles y expuestos a desconfianza por no justificar suficientemente los autores sus principios, causa es sin duda de que permanezcan desgraciadamente estos conocimientos desconocidos

Podríamos decir que en los tiempos actuales no tanto interesa inventar como saber ordenar la materia científica, a fin de vulgarizarla y hacerla agradable, sobre todo en nuestro país.

Este es el fin que nos ha impulsado a escribir este artículo para que se vea que las consideraciones de Briot y Jordán son las que procuran con mas rapidez y claridad el conocimiento de las funciones elípticas λ, μ, ν, junto con sus propiedades.

Empecemos por el estudio de las funciones de Jacobi. La función principal es:

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{nz+n^2a}$$

El desarrollo de esta función puede expresarse por:

$$\begin{array}{l}
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
e^{2^2a} + \frac{2z}{1} e^{2^2a} + \frac{2^2z^2}{1.2} e^{2^2a} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
e^a + \frac{z}{1} e^a + \frac{z^2}{1.2} e^a + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
1 + 0 + 0 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
e^a - \frac{z}{1} e^a + \frac{z^2}{1.2} e^a + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
e^{2^2a} - \frac{2z}{1} e^{2^2a} + \frac{2^2z^2}{1.2} e^{2^2a} + \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .. \quad . \quad .
\end{array}$$

Sumando en forma de columnas, designando los coeficientes de z por $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$....... tendremos:

$$\Theta(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots..$$

fácilmente se comprende por el desarrollo que precede que: $\mu_1 = \mu_3 = \cdots\cdots = 0$. Luego

$$\Theta(z) = \mu_0 + \mu_2 z^2 + \cdots\cdots$$

de donde se deduce que:

$$\Theta(-z) = \Theta(z)$$

y por consiguiente que la función Θ es par.

La función Θ es simplemente periódica. En efecto, considerando e^{nz+n^2a}, si cambiamos *z*, en *z + 2πi*, se obtiene:

$$e^{nz+2\pi ni+n^2a} = e^{nz+n^2a}(\cos 2\pi n + i \operatorname{sen} 2\pi n) = e^{nz+n^2a}$$

luego:

$$\Theta(z+2\pi i) = \Theta(z)$$

De suerte que el período resulta ser: 2π*i.* La función Θ permite escribir:

$$\Theta(z+2ma) = e^{-m}(z+ma)\Theta(z)$$

Para probar esta igualdad empezaremos expresando la función Θ por:

$$\Theta(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}(z+2na)^2}$$

Cambiando *z* en *z + 2ma*, se tiene:

$$\Theta(z+2ma) = e^{-\frac{1}{4a}(z+2ma)^2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}[z+2(n+m)a]^2} = e^{-m(z+ma)} e^{-\frac{z^2}{4a^2}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}(z+2n'a)^2} = e^{-m(z+ma)}\Theta(z)$$

Si m = 1, se deduce:

$$\Theta(z+2a) = e^{-(z+a)\Theta(z)}$$

La función Θ se anula para todos los valores de *z* comprendidos en la fórmula:

$$z = (2m+1)\pi i + (2m'+1)a$$

en la cual *m* y *m´* expresan números enteros cualesquiera.

Sea:

$$\Theta(z)=e^{-\frac{z^2}{4a}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{\frac{1}{4a}\left[z+2(n+m_1)a\right]^2}=e^{-\frac{z^2}{4a}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{\frac{1}{4a}(z+2na)^2}$$

y como consecuencia:

$$\Theta(z)=\frac{1}{2}e^{-\frac{z^2}{4a}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{e^{\frac{1}{4a}\left[z+2(n+m_1)a\right]^2}+e^{\frac{1}{4a}(z-2na)^2}\right\} \quad (1)$$

Ahora bien, podemos escribir:

$$e^z+e^{z+(2n+1)\pi i}=e^z\left(1+e^{(2n+1)\pi i}\right)=e^z\left(1+\cos(2n+1)\pi+i\operatorname{sen}(2n+1)\pi\right)=e^z(1-1)=0$$

Tomando, pues, la diferencia de los exponentes de (1), e igualándola a $(2n+1)\pi$, tendremos los valores que reducen a cero la función $\Theta(z)$. Así pues:

$$\frac{1}{4a}\left[z+2(n-m_1)a\right]^2-\frac{1}{4a}(z-2na)^2=$$

$$=\frac{1}{4a}\left[z^2+4z(n-m_1)a+4(n-m_1)^2a^2\right]-\frac{1}{4a}\left[z^2-4nza+4n^2a^2\right]=(2n_1+1)\pi i$$

Después de algunas simples modificaciones, se obtiene:

$$2n(z-m_1a)-m_1(z-m_1a)=(2n_1+1)\pi i$$

o sea:

$$(2n-m_1)(z-m_1a)=(2n_1+1)\pi i$$

Para que se satisfaga esta igualdad bastará suponer:

$$m_1=2m'+1, \qquad z-m_1a=(2m+1)\pi i$$

de donde:

$$z=(2m'+1)a+(2m+1)\pi i$$

cuya fórmula es la que nos habíamos propuesto demostrar.

Nueva expresión de $\Theta(z)$.

Reemplazando z, por $\frac{2\pi z i}{\omega}$ en $\Theta(z)$, suponiendo además $a=\frac{\pi\omega' i}{\omega}$ resulta:

$$\Theta\left(\frac{2\pi z i}{\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2nz+n^2\omega'\right)}=e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega')^2}$$

Para mayor sencillez podemos suponer, como M. Briot, que cuando la función Θ haga referencia a $\frac{2\pi z i}{\omega}$, se escriba sencillamente $\Theta(z)$, y bajo este supuesto pueden admitirse las igualdades siguientes:

$$\Theta(z+\omega)=\Theta(z)$$

$$\Theta(z+m\omega')=e^{-\frac{m\pi i}{\omega}(2z+m\omega')}\Theta(z)$$

$$\Theta(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z)$$

$$z=(2m+1)\frac{\omega}{2}+(2m'+1)\frac{\omega'}{2}$$

FUNCIONES 0

Las cuatro funciones $0, 0_1, 0_2, 0_3$, que se consideran fundamentales y que enlazan con Θ, son las siguientes:

$$0_3(z)=\Theta(z)$$

$$0(z)=\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$$

$$0_2(z)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$0_1(z)=\frac{1}{i}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$$

Según la expresión de Θ, podremos escribir:

$$
\begin{aligned}
0_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2nz+n^2\omega'\right)} \\
0(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n\, e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2nz+n^2\omega'\right)} \\
0_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\omega\right]} \\
0_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n\, e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\omega'\right]}
\end{aligned}
\qquad (A)
$$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES 0

Los resultados obtenidos anteriormente demuestran que las funciones $0_3, 0, 0_2$, son pares, así como resulta 0_1 impar anulándose para cuando $z = 0$. Además la ecuación general:

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{2} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2}$$

que corresponde a los ceros de la función Θ, podrá utilizarnos para deducir los ceros de las funciones 0, puesto que se hallan enlazadas las funciones 0 y Θ por las fórmulas que preceden. Para 0_3, bastará tomar la misma fórmula anterior, ya que 0_3 y Θ se relacionan directamente.

En cuanto a $0, 0_2$, y 0_1, bastará suponer que la z se incrementa respectivamente de:

$$\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} \text{ y } \frac{\omega+\omega'}{2};$$

así, pues, resulta:

$$\text{Ceros de } 0_3(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{\omega + \omega'}{2} + (m\,\omega + m'\,\omega')$$

$$\text{Ceros de } 0\ (z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{\omega'}{2} + (m\,\omega + m'\,\omega')$$

$$\text{Ceros de } 0_2(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{\omega}{2} + (m\,\omega + m'\,\omega')$$

$$\text{Ceros de } 0_1(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = m\,\omega + m'\,\omega'$$

Las fórmulas (*A*) en el concepto de que $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, aun podrían tomar la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
0_3(z) &= \Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}} \\
0\ (z) &= \Theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}} \\
0_2(z) &= q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \Theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i z}{\omega}} \\
0_1(z) &= \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \Theta\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i z}{\omega}}
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

de cuyas nuevas fórmulas pueden deducirse las *20*, que a continuación se expresan, reemplazando sucesivamente en (*B*), *z*, por las expresiones:

$$z + \frac{\omega}{2},\ z + \frac{\omega'}{2},\ z + \omega,\ z + \omega',\ z + \frac{\omega + \omega'}{2}$$

suponiendo además para abreviar:

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i z}{\omega}} = \lambda \qquad q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} = \mu$$

1º $0_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0(z),$ 2º $0\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0_3(z)$

3º $0_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-0_1(z),$ 4º $0_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0_2(z)$

5º $0_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_2(z),$ 6º $0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0_1(z)$

7º $0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_3(z),$ 8º $0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0(z)$

9º $0_3(z+\omega)=0_3(z),$ 10º $0(z+\omega)=0(z)$

11º $0_2(z+\omega)=-0_2(z),$ 12º $0_1(z+\omega)=-0_1(z)$

13º $0_3(z+\omega')=\mu\, 0_3(z),$ 14º $0(z+\omega')=-\mu\, 0_1(z)$

15º $0_1(z+\omega')=\mu\, 0_2(z),$ 16º $0_1(z+\omega')=-\mu\, 0_1(z)$

17º $0_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0_1(z),$ 18º $0\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_2(z)$

19º $0_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-i\lambda\, 0(z),$ 20º $0_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_3(z)$

Vamos a demostrar todos estos resultados:

1º.- Partiendo de la primera igualdad de (*B*), se tiene:

$$0_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}}=0(\mathrm{z})$$

2º.- Tomando la segunda igualdad de (*B*), resulta:

$$0\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}}=0_3(\mathrm{z})$$

3º.- De un modo análogo a los anteriores, tomando la tercera, se obtiene:

$$0_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}i\,\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}i\times\frac{i\,0_1(z)}{q\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=-0_1(z)$$

4ª.- Tomando la cuarta, se halla:

$$0_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}i\,\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}i\times\frac{i\,0_2(z)}{q\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=0_2(z)$$

5ª.- Volviendo a la primera de (*B*), se obtiene:

$$0_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

De la tercera igualdad de (*B*), se deduce:

$$\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{i}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}0_2(z)$$

pero como: $q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}=\lambda,$ resulta:

$$0_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,0_2(z)$$

6ª.- Teniendo a la vista las fórmulas (*B*), fácilmente se obtienen los resultados siguientes:

$$0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)$$

o sea

$$0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i\,0_1(z)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=\lambda\,i\,0_1(z)$$

7º.-

$$0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\Theta(z+\omega')$$

pero hemos hallado:

$$\Theta(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z)\cdots\cdots(\Delta)=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z)$$

luego:

$$0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}q^{\frac{1}{2}}q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}0_3(z)=\lambda\,0_3(z)$$

8ª.-

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$$

Para el desarrollo de

$$\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$$

tendremos presente la expresión (Δ) del caso anterior; luego:

$$\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right)=e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)+\omega'\right]}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times -1\times\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times -1\,0(z)$$

Sustituyendo este valor en la fórmula primera, se tiene:

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}q^{\frac{1}{2}}q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times -0(z)$$

o sea:

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\,q^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}0(z)=i\lambda\,0(z)$$

9ª.-

$$0_3(z+\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{\frac{2ni\pi(z+\omega)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}=0_3(z)$$

10ª.- La expresión $0(z+\omega)=0(z)$, se determinará inmediatamente tomando la fórmula segunda de *B*, y procediendo como en el caso anterior.

11ª.-

$$0_2(z+\omega)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i(z+\omega)}{\omega}}\Theta\left(z+\omega+\frac{\omega'}{2}\right)=-q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=-0_2(z)$$

12ª.- Vamos a demostrar: $0_2(z+\omega)=-0_1(z)$. La 4ª relación que hemos hallado, o sea:

$$0_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0_2(z)$$

permite la transformada siguiente:

$$0_1(z+\omega)=0_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$$

pero hemos hallado:

$$0_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-0_1(z)$$

luego:

$$0_1(z+\omega)=-0_1(z)$$

13º.- La igualdad $0_3(z+\omega')=\mu_1 0_3(z)$ se determina fácilmente sabiendo que al aumentar la función $0_3(z)$, o sea $\Theta(z)$ del incremento ω', queda multiplicada por el factor exponencial:

$$q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}=\mu$$

luego:

$$0_3(z+\omega')=\mu\, 0_2(z)$$

14ª.- Para la expresión $0(z+\omega')=-\mu\, 0(z)$, tomaremos la fórmula 6ª ya hallada, esto es,

$$0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0_1(z)$$

siendo:

$$\gamma=q^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$$

luego:

$$0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i\,0_1(z)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}$$

añadiendo a ambos miembros: $\frac{\omega'}{2}$, resulta

$$0(z+\omega)=\frac{i\,0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\omega}}}=\frac{i\,0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}q^{\frac{1}{2}}}$$

pero

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\,0(z)$$

así pues, cabe escribir:

$$0(z+\omega)=\frac{i\,i\lambda 0(z)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i(z)}{\omega}}q^{\frac{1}{2}}}=-q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}0(z)=-\mu\,0(z)$$

15ª.- Deduciremos la expresión:

$$0_2(z+\omega')=\mu\,0_2(z)$$

tomando la 7ª, o sea:

$$0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,0_3(z)$$

en el supuesto de añadir a *z*, la cantidad $\frac{\omega'}{2}$, luego:

$$0_2(z+\omega')=\lambda\,q^{\frac{1}{2}}0_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

empero sabemos que:

$$0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,0_2(z)$$

de donde:

$$0_2(z+\omega')=\lambda^2\,q^{-\frac{1}{2}}0_2(z)=q^{-\frac{2}{4}}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}q^{-\frac{1}{2}}0_2(z)=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}0_2(z)=\mu\,0_2(z)$$

16ª.- Sea

$$0_1(z+\omega')=\mu\,0_1(z).$$

Al considerar la fórmula 8ª o sea:

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\,0(z)$$

bastará añadir a *z*, la cantidad $\frac{\omega'}{2}$; así pues:

$$0_1(z+\omega')=i\lambda\,q^{-\frac{1}{2}}\,0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

pero:

$$0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\,0_1(z)$$

luego:

$$0_1(\mathrm{z}+\omega')=i\lambda q^{-\frac{1}{2}} i\lambda 0_1(\mathrm{z})=-q^{-\frac{2}{4}} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} q^{-\frac{1}{2}} 0_1(\mathrm{z})=-q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} 0_1(\mathrm{z})=\mu\, 0_1(\mathrm{z})$$

17ª.- Los cuatro grupos siguientes resultan, al añadir $\frac{\omega+\omega'}{2}$, a las funciones típicas de 0, así pues para probar que:

$$0_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0_1(z)$$

bastará tomar la 1ª fórmula:

$$0_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0(z)$$

y luego añadir $\frac{\omega'}{2}$, de donde:

$$0_3\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right), \text{pero}: 0\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda\, 0_1(z) \;\; \text{luego}: 0_3\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=i\, 0_1(z)$$

18ª.- La igualdad

$$0\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_2(z),$$

se demostrará tomando la 2ª fórmula

$$0\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0_3(z)$$

añadiendo $\frac{\omega'}{2}$ a z luego:

$$0\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=0_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

pero

$$0_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_2(z)$$

así pues

$$0\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\, 0_4(z)$$

19ª.- Sea

$$0_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-i\lambda\, 0(z)$$

Tomando la 3ª fórmula:

$$0_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-0_1(z)$$

y procediendo como en los casos anteriores, resulta:

$$0_2\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

pero

$$0_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\lambda 0(z)$$

luego:

$$0_2\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-i\lambda 0(z)$$

20ª.- y última. Para probar

$$0_1\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda 0_3(z)$$

bastará tomar la 4ª o sea:

$$0_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=0_2(z)$$

y proceder como antes, así pues,

$$0_1\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

pero

$$0_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda 0_3(z)$$

luego

$$0_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda 0_3(z)$$

¤ ¤ ¤ ¤

Después de estas generalidades acerca de las funciones 0, veamos cual es la importancia de las funciones inversas correspondientes a las integrales elípticas, para venir a deducir las funciones elípticas, comparando por vía de cociente las funciones 0.

La integral elíptica de 1ª especie

$$\int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)},$$

en el supuesto de que:

$$\Delta(z)=\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}$$

y que tenga por valor inicial + *1*, siendo K^2 una cantidad cualquiera diferente de *cero* y *uno*, es una generalización de la función

$$\text{arc.sen.}z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

correspondiendo con ésta, cuando $K = 0$. Si suponemos $z = \text{sen}\,\mu$, esta última expresión se transforma en:

$$\mu = \int_0^{\text{sen}.\mu} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

de la cual se deduce $\cos\mu = \sqrt{1-\text{sen}^2\mu}$, debiéndose escoger de los dos valores del radical, aquel que de + *1* para cuando μ = 0.

Las dos funciones sen.*u* y cos.*u*, definidas por las ecuaciones que preceden, son más interesantes que arc.sen., pues además de ser monodromas en toda la extensión del plano de la variable, es decir, de no presentar para cada valor de la variable sino un solo valor para la función, ofrece ésta además la gran ventaja de su periodicidad.

Esta observación, promovió la idea de estudiar en lugar de la integral elíptica

$$\mu = \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)}$$

la función inversa *sn.u*, definida por la ecuación

$$\mu = \int_0^{sn\,\mu} \frac{dz}{\Delta(z)}$$

junto con otras dos funciones asociadas *cn u*, *dn u*, definidas por las ecuaciones

$$cn\,\mu = \sqrt{1-sn^2\mu}$$

$$dn\,\mu = \sqrt{1-K^2 sn^2\mu}$$

debe advertirse que los radicales que figuran en estas tres relaciones están tomados de tal manera, que reducen dichas expresiones a + *1*, para cuando *u* = 0.

Estas tres funciones toman el nombre de funciones elípticas, y se designan en general por λ, μ, ν.

Jacobi, las expresa por sen.am.*u*, cos.am.*u* y Δ am.*u*. La notación que indicamos más arriba, es debida a Gudermann. Las funciones elípticas pueden tener dos origines:

1º.- Como funciones inversas de las integrales elípticas.
2º.- como resultado de funciones doblemente periódicas.

Ahora bien, está probado que dos funciones doblemente periódicas compuestas de los mismos ceros y de los mismos infinitos, su relación por cociente debe ser una constante; según este mismo principio, las tres relaciones diferentes:

$$\frac{0_1}{0}\ \frac{0_2}{0}\ \frac{0_3}{0} \qquad (1)$$

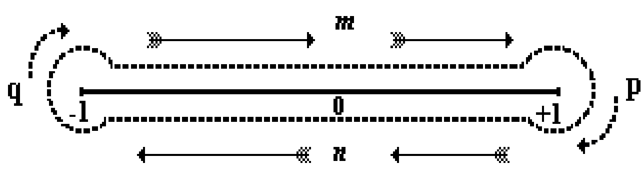
que resultan de todas las que pueden formarse de las cuatro $0, 0_1\, 0_2\, 0_3$; son funciones doblemente periódicas, con los mismos ceros e infinitos que ofrecen las funciones elípticas; así es que en virtud de lo dicho anteriormente podremos expresar las funciones elípticas por las tres relaciones (1) afectas de constantes, cuyos valores podrán determinarse por condiciones especiales, conforme a las funciones elípticas. En virtud de todo lo que precede podremos escribir:

$$\lambda(z) = A\frac{0_1(z)}{0(z)}, \qquad \mu(z) = B\frac{0_2(z)}{0(z)}, \qquad \nu(z) = C\frac{0_3(z)}{0(z)} \qquad (\pi)$$

Para determinar las constantes *A*, *B*, *C* necesitaremos recordar algún principio referente a las integrales elípticas. Al considerar la integral de 1ª especie

$$\mu = \int_0^{sn\,\mu} \frac{dz}{\Delta(z)}$$

si nos fijamos con los valores reales ± *1* que anulan al denominador, en el supuesto de



recorrer la variable el camino *m p n*, dará el doble de lo que corresponda a la integral de *m* a *p*, o sea:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)}$$

si luego continua el movimiento de la variable siguiendo el camino *n q m*, dará por razones análogas, el doble de la misma integral. llegando al punto *m* de partida, con el mismo valor primitivo, obteniendo así el valor del período $2\,\omega$ real; luego podremos escribir:

$$2\omega = 4\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)}, \quad \text{o sea} \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)}$$

de donde se deduce: $sn.\frac{\omega}{2} = 1$ cuyo resultado podemos expresar por: $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$.

Además por ser:

$$cn.u = \sqrt{1 - sn^2u}, \quad dn.u = \sqrt{1 - K^2m^2u}$$

para u = 0, y según lo que precede, cabe también escribir: $\mu(0) = 1,\ \nu(0) = 1$.

Con estos datos podremos modificar las formulas (π) en el supuesto de ser $z = \frac{\omega}{2}$ en la 1^a, y $z = 0$, en las dos últimas, luego:

$$A = \frac{0\left(\frac{\omega}{2}\right)}{0_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad B = \frac{0\left(\frac{\omega}{2}\right)}{0_2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad C = \frac{0\left(\frac{\omega}{2}\right)}{0_3\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

El valor *A*, aun puede modificarse, tomando las fórmulas 2^a y 4^a correspondiente a las 0, para cuando z = 0, esto es,

$$0\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = 0_3(z), \qquad 0_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = 0_2(z)$$

de donde

$$0\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0_3(0), \qquad 0_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0_2(0)$$

Así pues

$$\mathrm{A} = \frac{0\left(\frac{\omega}{2}\right)}{0_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{0_3(0)}{0_2(0)}$$

Supongamos ahora:

$$\sqrt{K} = \frac{0_2(0)}{0_3(0)}, \qquad \sqrt{K'} = \frac{0(0)}{0_3(0)}$$

luego:

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{0_1(z)}{0(z)}, \qquad \mu(z) = \sqrt{\frac{K'}{K}} \frac{0_2(z)}{0(z)}, \qquad \nu(z) = \sqrt{K'} \frac{0_3(z)}{0(z)}$$

Con estos preliminares pueden darse ya las principales propiedades de las funciones elípticas.

FUNCION λ

Vamos a estudiar los períodos. Consideremos:

$$\lambda(z+\omega) = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{0_1(z+\omega)}{0(z+\omega)}.$$

Hemos hallado

$$0_1(z+\omega) = -0_1(z) \qquad 0(z+\omega) = 0(z)$$

luego

$$\lambda(z+\omega) = \frac{1}{\sqrt{K}} \times -\frac{0_1(z)}{0(z)} = -\lambda(z)$$

Si añadimos ω, otra vez a *z*, resulta:

$$\lambda(z+2\omega) = -\lambda(z+\omega) = \lambda(z)$$

de donde se infiere que 2ω, es uno de los períodos de λ.

Sea ahora

$$\lambda(z+\omega') = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{0_1(z+\omega')}{0(z+\omega')}.$$

Sabemos que:

$$0_1(z+\omega') = -\mu\, 0_1(z)$$

$$0(z+\omega') = -\mu\, 0(z)$$

luego

$$\lambda(z+\omega') = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{0_1(z)}{0(z)} = \lambda(z)$$

de donde resulta que ω', es el segundo período de λ; así podremos escribir en general:

$$\lambda\left(\mathrm{z}+2m\omega+m'\omega'\right)=\lambda\left(\mathrm{z}\right)$$

siendo *m* y *m´*, números enteros.

Para conocer los ceros de λ, basta tomar la fórmula de los ceros correspondientes a 0, o sea $z=m\omega+m'\omega'$, la cual nos da 0 y ω, en el primer paralelógramo elemental, constituido por los dos períodos *2*ω y ω´. Los infinitos se determinarán buscando los ceros de la función 0, o sea:

$$z=\frac{\omega'}{2}+\left(m\omega+m'\omega'\right)$$

lo que da en el primer paralelógramo los valores $\frac{\omega'}{2},\frac{\omega'}{2}+\omega$

Hay que advertir que los ceros e infinitos se reproducen en cada uno de los paralelógramos elementales, según los valores que vayan tomando *m* y *m´*.

La función λ guarda alguna analogía con $\frac{\pi z}{\omega}$, respecto al período real *2*ω.

FUNCION μ.

Determinemos los períodos de dicha función. Sea:

$$\mu\left(z+\omega\right)=\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{0_2\left(z+\omega\right)}{0\left(z+\omega\right)}$$

Recordemos que:

$$0_2\left(z+\omega\right)=-0_2\left(z\right)$$

$$0\left(z+\omega\right)=0\left(z\right)$$

luego

$$\mu\left(z+\omega\right)=-\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{0_2\left(z\right)}{0\left(z\right)}=-\mu\left(z\right)$$

añadiendo ω, a *z* otra vez, se tiene:

$$\mu\left(z+2\omega\right)=-\mu\left(z+\omega\right)=\mu\left(z\right)$$

de donde se infiere que 2ω, es un período de la función μ.

Supongamos ahora:

$$\mu(z+\omega')=\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{0_2(z+\omega')}{0(z+\omega')}$$

pero sabemos que:

$$0_2(z+\omega')=\mu\,0_2(z)$$

$$0(z+\omega')=-\mu\,0(z)$$

luego

$$\mu(z+\omega')=-\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{0_2(z)}{0(z)}=-\mu(z)$$

Si añadimos ω, a *z*, resulta:

$$\mu(z+\omega+\omega')=-\mu(z+\omega)=\mu(z)$$

luego ω + ω´, es el otro período de la función μ, o sea el lado contiguo al real del paralelógramo formado por los dos períodos.

Para determinar los ceros de esta función, basta tomar los que corresponden a 0_2, o sea:

$$\mathrm{z}=\frac{\omega}{2}+(m\omega+m'\omega')$$

que realizados en el primer paralelógramo elemental dan:

$$\frac{\omega}{2}\ \mathrm{y}\ \frac{3\omega}{2}$$

En cuanto a los infinitos de μ, basta tomar como en el caso anterior los ceros de la función 0, pero como quiera que el paralelogramo elemental resulta en este segundo caso alterado, se comprende que no lo serán los mismos de la función λ, sino:

$$\frac{\omega'}{2}+\omega,\quad \frac{\omega'}{2}+2\omega$$

La función μ guarda analogía con $\frac{\pi z}{\omega}$, respecto al período real 2ω.

FUNCION ν

Empecemos por determinar los períodos. Sea

$$\nu(z+\omega)=\sqrt{K'}\,\frac{0_3(z+\omega)}{0(z+\omega)}$$

Sabemos que:

$$0_3(z+\omega)=0_3(z)$$

$$0(z+\omega)=0(z)$$

luego

$$\nu(z+\omega)=\sqrt{K'}\,\frac{0_3(z)}{0(z)}=\nu(z)$$

de donde se infiere que ω, es un período de la función ν.

Tomemos ahora:

$$\nu(z+\omega')=\sqrt{K'}\,\frac{0_3(z+\omega')}{0(z+\omega')}$$

no olvidando que:

$$0_3(z+\omega')=\mu\,0_3(z),\quad 0(z+\omega')=-\mu\,0(z)$$

luego:

$$\nu(z+\omega')=\sqrt{K'}\times\frac{-0_3(z)}{0(z)}=-\nu(z)$$

añadiendo a *z*, la cantidad ω’, resulta:

$$\nu(z+2\omega')=-\nu(z+\omega')=\nu(z)$$

de donde se infiere que 2ω’, es el otro período de ν.

Para los ceros basta tomar los ceros que corresponden a 0_3, o sea:

$$z=\frac{\omega+\omega'}{2}+(m\omega+m'\omega')$$

lo que nos da en el primer paralelógramo elemental, los valores respectivos:

$$\frac{\omega+\omega'}{2},\quad \frac{\omega+\omega'}{2}+\omega'$$

En cuanto a los infinitos resultan de la misma función que en los dos casos anteriores, pero cuyos resultados diferirán por la nueva situación del paralelogramo elemental, siendo en este caso:

$$\frac{\omega'}{2} \quad \frac{3\omega'}{2}$$

Aunque sean muy reducidos los conocimientos que acabamos de exponer respecto a las funciones elípticas, tenemos, no obstante, la esperanza de que ellos han de ser suficientes para adquirir el fundamento de esa bella rama de la matemática, que elevándose entre las funciones hiperelípticas, abelianas, etc., etc., nos señala cuales sean las últimas conquistas alcanzadas dentro del cálculo integral.

Barcelona a 25 de Agosto de 1892
Lauro Clariana Ricart