Principios fundamentales referentes

a los grupos de

Fuchs

1894

Justa es la importancia que se concede hoy a los grupos de Fuchs, pues ellos constituyen la base de las funciones fuchsianas, tetafuchsianas, kleinianas y zetafuchsianas, que sin duda señalan los últimos adelantamientos en la ciencia matemática moderna, y cuyo objetivo principal es la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos. La teoría de los grupos de Fuchs consiste simplemente en una serie de sustituciones lineales: de esta suerte extiéndese el concepto de las funciones periódicas bajo un punto de vista más general que las ordinarias, amén de las elípticas.

Los distinguidos Poincaré, Klein, Forsyth, etc., ocúpanse con predilección de esta clase de funciones, cuyos principios tratamos de aclarar en beneficio de todos aquellos que pretendan conocer las investigaciones más atrevidas dentro del campo de la matemática.

La expresión de transformación en las sustituciones consecutivas, considérase siempre lineal y bajo la forma siguiente:

$$t = \frac{az+b}{cz+d}$$

t y *z* son variables imaginarias; *a, b, c, d* son cantidades reales, con la condición de satisfacer siempre a la igualdad que a continuación se expresa: $ad - bc = 1$.

La sustitución precedente suele darse bajo la forma simbólica siguiente:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

Estas sustituciones se van repitiendo, modificándose sucesivamente los valores *a, b, c, d.* Cuando la repetición se ha realizado *n* veces, se expresa la forma simbólica correspondiente por:

$$\left(z, \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right)$$

o también de un modo más breve por $f_n(z)$.

De otro modo, si z_n representa la variable; después de haber aplicado *n* veces la sustitución, y en el supuesto de que $z_0 = z$, $z_1 = t$, se tiene:

$$\frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta} = K^n \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

La condición para que la transformación sea periódica y del orden enésimo, es que $z_n = z$, lo cual exige que $\mathrm{K}^n = 1$, siendo k el multiplicador de la sustitución, y α y β los puntos comunes a t y z conforme determinaremos luego.

La sustitución:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

goza de la propiedad muy notable de la igualdad de ángulos.

Para demostrar este principio recordemos a Forsyth y a Riemann al suponer que una variable compleja u es función de otra, tal como z, siendo $\frac{du}{dz}$ independiente del movimiento de la diferencial elemental dz.

De esta suerte se llega a las condiciones siguientes:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

en el supuesto de que sea $w = u + iv$, y $z = x + iy$.

Ahora bien, sean P y p dos puntos en diferentes planos o en diferentes partes de uno mismo, conforme a las variables w y z, y a distancia finita. Sean q y r otros dos puntos, tales como $z + dz$ y $z + \delta z$, cerca de p; y sean, por fin, Q y R los puntos $w+dw$ y $w+\delta w$ correspondientes a los primeros. Fácilmente se concibe que puede escribirse:

$$dw = \frac{dw}{dz} dz, \qquad \delta w = \frac{dw}{dz} \delta z$$

de donde:

$$\frac{\delta w}{dw} = \frac{\delta z}{dz}$$

esta igualdad se obtiene en el supuesto de que $\left(\frac{dw}{dz} \right)$ se resuelva en la finitud.

Al expresar las diferenciales elementales en términos de sus módulos y argumentos, se tiene:

$$dz = \sigma e^{\theta i}, \qquad dw = \eta e^{\Phi i}$$
$$\delta z = \sigma' e^{\theta' i}, \qquad dw = \eta' e^{\Phi' i}$$

así, pues:

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\sigma'}{\sigma}, \qquad \Phi' - \Phi = \theta' - \theta.$$

La última igualdad es general, y comprende por consiguiente el caso de ser la función lineal, tal como corresponde en las sustituciones supuestas.

Además, uniendo los puntos hallados anteriormente, resultan dos triángulos semejantes, que procuran lo que se llama *relación funcional* entre las dos variables complejas, o sea la razón de semejanza entre dos elementos indefinidamente pequeños correspondientes, o sea, $\frac{\eta'}{\eta}$; esta relación constituye el módulo de $\frac{dw}{dz}$, expresado por m.

Como la función que se considera debe satisfacer a las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, && \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ &\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, && \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \qquad (1)$$

se deduce fácilmente:

$$m^2 = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Y en virtud de (1) aun puede escribirse

$$m^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

La función $t = \frac{az+b}{cz+d}$ es monógena. En efecto, desarrollando la derivada de t respecto a z, se tiene:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

y como este valor es único para un valor cualquiera de z, con ello queda demostrado el principio.

Si z describe una circunferencia, t describe otra, de modo que la sustitución $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ cambia las circunferencias en circunferencias.

Esta propiedad puede demostrarse de una manera general por medio de una representación geométrica dada a las cantidades complejas. En este concepto, la ecuación de la circunferencia es:

$$(z-\alpha-\beta i)(z_0-\alpha+\beta i)=r^2$$

y esto en el supuesto de que el centro sea (α β) y el radio de la circunferencia, *r*.

La precedente igualdad puede reducirse a la forma:

$$zz_0+\theta z+\theta_0 z_0+\gamma=0 \quad (2)$$

siendo:

$$-\theta=\alpha-\beta i, \qquad -\theta_0=\alpha+\beta i, \qquad \gamma=\theta\theta_0-r^2$$

De este resultado se infiere que la ecuación (2) representa una circunferencia, si θ y θ_0 son dos imaginarias conjugadas y γ real.

Cuando la circunferencia se halla sujeta a la transformación lineal:

$$t=\frac{az+b}{cz+d}$$

resulta:

$$z=\frac{-dt+b}{ct-a}$$

y en su virtud

$$z_0=\frac{-d_0t_0+b_0}{c_0t_0-a_0}$$

Procediendo a la sustitución correspondiente en la ecuación de la circunferencia:

$$zz_0+\theta z+\theta_0 z_0+\gamma=0 \quad (\mathrm{A})$$

se obtiene fácilmente la nueva expresión:

$$\partial' tt_0+\theta' t+\theta'_0 t_0+\gamma'=0 \quad (\mathrm{A'})$$

en el supuesto de que se tenga:

$$\begin{aligned}\delta' &= dd_0-\theta dc_0-\theta_0 cd_0+\gamma cc_0\\ \theta' &= -b_0d+\theta a_0d+\theta_0 cb_0-\gamma ca_0\\ \theta'_0 &= -bd_0+\theta_0 ad_0+\theta c_0b-\gamma c_0a\\ \gamma' &= bb_0-\theta a_0b-\theta_0 ab_0+\gamma aa_0\end{aligned} \quad (3)$$

Ahora bien, según las fórmulas de θ y θ_0 ya halladas, y suponiendo:

$$a = a_1 + a_2 i, \quad a_0 = a_1 - a_2 i, \cdots\cdots$$

después de las respectivas sustituciones en (3), queda justificado que θ' y θ'_0 son cantidades imaginarias conjugadas; y δ' y γ', cantidades reales.

Así, pues, si (A) es la ecuación de una circunferencia, la transformada (A') también lo será. La demostración que precede es debida a Mr. Forsyth. De cuanto precede se deduce la importante consecuencia: Dos circunferencias que se corten formando un cierto ángulo, se transforman por medio de

$$t = \frac{az + b}{cz + d}$$

en otras dos que se cortan también bajo el mismo ángulo.

Adelantando conocimientos, conviene tener presente que la razón anarmónica:

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} : \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}}$$

cabe escribirla bajo la forma siguiente:

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2}$$

si t_2, t_3, t_1, t_4, representan las distancias crecientes desde el origen. Al sustituir aquí sus equivalentes según las igualdades:

$$t_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} \qquad t_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

sin olvidar que *ad* - *bc* = S, después de toda simplificación, resulta:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \quad (\mathrm{B})$$

De cuya igualdad se infiere que la razón anarmónica constituida por los elementos ***t***, es igual a la formada por los elementos correspondientes de ***z***, constituyéndose así un sistema homográfico, motivo por el cual se llama la sustitución homográfica.

Si en vez de estar los puntos sobre rectas, se consideran puntos cualesquiera en el plano, aunque con la debida correspondencia, se tiene una generalización de la homografía, y sin duda esta idea constituye la base de las sustituciones que dan origen a los grupos de Fuchs.

Entre los puntos que se corresponden, bien cabe considerar dos, cuyos valores de *t* y *z* sean los mismos; a este fin, para determinarlos basta suponer ***t* = *z*** en $t=\dfrac{az+b}{cz+d}$; de donde se deduce $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Al desarrollar la ecuación de segundo grado, resulta:

$$z=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2-4bc}}{2c} \qquad (a)$$

Si consideramos la forma cuadrática-subradical, caben tres hipótesis, esto es:

$$(a-d)^2-4bc \lesseqgtr 0,$$

y según la ecuación de condición, *ad* - *bc* = 1, obtiénese:

$$(a+d)^2-4 \lesseqgtr 0,$$

o sea

$$(a+d)^2 \lesseqgtr 4$$

En el primer caso, la sustitución es elíptica; en el segundo, es parabólica, y en el tercero, es hiperbólica. Además de estas tres sustituciones existe otra que se llama loxodrómica, pero que no corresponde a los grupos de Fuchs, puesto que éstos se refieren a valores reales de ***a, b, c, d;*** mientras que la sustitución loxodrómica contiene valores puramente imaginarios de las precitadas cantidades, conforme a las sustituciones de ***Klein***.

En la sustitución elíptica, las dos raíces de (a) son imaginarias, y como deben ser conjugadas, determinan dos puntos simétricos respecto al eje polar, o sea respecto al eje de las cantidades reales; estas dos raíces suelen expresarse por α y β.

En la sustitución parabólica las raíces son iguales, dando origen a un solo punto α en el eje real.

En la sustitución hiperbólica, las dos raíces α y β determinan dos puntos α y β situados ambos a dos en el mismo eje real.

Hay que advertir que las sustituciones elíptica e hiperbólica pueden condensarse en una sola fórmula; en efecto, siendo α y β los puntos comunes de *t* y *z*, cabe escribir:

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \qquad \beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

y en su consecuencia

$$t - \alpha = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

después de toda simplificación, se obtiene:

$$t - \alpha = \frac{z - a}{(cz + d)(c\alpha + d)}$$

De un modo análogo se deduce:

$$t - \beta = \frac{z - \beta}{(cz + d)(c\beta + d)}$$

De la combinación de las dos últimas igualdades, resulta:

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

y si se supone

$$\frac{c\beta + d}{c\alpha + d} = \mathrm{K}$$

se tiene definitivamente:

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = \mathrm{K}\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

K constituye el multiplicador de la sustitución.

Si la sustitución es elíptica, K es imaginario y su módulo igual a la unidad; si la sustitución es hiperbólica, K es real y mayor que la unidad, en el concepto de que β diste del origen más que α. En efecto, en el primer caso, K adquiere la forma de:

$$\frac{c(\beta_1 + \beta_2 i) + d}{c(\beta_1 - \beta_2 i) + d}$$

que puede expresarse de una manera más sencilla por

$$\frac{a+bi}{a-bi} \text{ o sea } \frac{(a+bi)^2}{a^2-b^2}$$

de donde resulta:

$$\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

y para el módulo:

$$\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}=1$$

conforme al enunciado.

Para el segundo caso, se tiene:

$$\mathrm{K}=\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$$

y como α y β son reales , y además se supone $\beta > \alpha$, inmediatamente dedúcese que el multiplicador K es real y mayor que la unidad.

En el caso de que la sustitución sea parabólica, según las consideraciones que preceden, fácilmente compréndese que puede expresarse por la fórmula sencilla que a continuación se indica:

$$\frac{1}{t-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+c$$

Por fin, si designamos por M la cantidad $(a-d)^2-4bc$, resulta:

$$\mathrm{K}=\frac{a+d-\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}}{a+d+\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}}$$

de donde se deduce la fórmula siguiente muy importante:

$$\left(\sqrt{\mathrm{K}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}}}\right)^2=\frac{(a+d)^2}{ad-bc}$$

Con estos preliminares puede extenderse un poco más el círculo de acción respecto a las sustituciones homográficas, empero antes de pasar adelante, débese advertir que la parte imaginaria de *t* es positiva, nula o negativa, según que la imaginaria de *z* sea también positiva, nula o negativa; es decir, que la sustitución:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

conserva la parte real, así como la imaginaria por el mismo lado del eje referente a las cantidades reales.

En su virtud, si *z* describe una circunferencia cuyo centro esté en el eje real, *t* describirá también una circunferencia, hallándose su centro en el mismo eje.

Si z_1 y z_2 son dos cantidades imaginarias conjugadas, los valores correspondientes de t_1 y t_2 darán también cantidades imaginarias conjugadas.

Todas estas consecuencias se deducen de la fórmula:

$$t = \frac{az+b}{cz+d}$$

Según la relación (B) hallada, resulta:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}$$

en el supuesto que α y β sean valores de *z*; γ y δ los correspondientes a *t*; y además α', β', γ', δ', los conjugados α, β, γ, δ.

Adoptando la abreviación de Mr. Poincaré, se tiene:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = (\alpha, \beta)$$

Ahora bien, sabiendo que dos figuras son congruentes cuando una de ellas es la transformada de la otra, mediante una sustitución real, o sea cuando *a*, *b*, *c*, *d* son reales, conforme el caso que se estudia; si se supone que las sustituciones se van continuando, se forma lo que se llama un grupo.

Los grupos pueden resultar de un número finito o no de sustituciones; el caso más importante y que se refiere a los grupos de Fuchs es cuando el número de sustituciones es ilimitado; y aquí caben dos hipótesis, pues puede suponerse que en el grupo se escoja una sustitución:

$$\left(z; \frac{az_1+b}{cz_i+d}\right)$$

que difiera indefinidamente poco de z_i, cualquiera que sea el valor de esta variable, y en este caso la sustitución llámase infinitesimal, y luego cabe que esta condición no se realice a pesar de ser la sustitución ilimitada: los primeros grupos son continuos; los segundos, discontinuos.

Para los grupos Fuchsianos debe considerarse el grupo discontinuo; así, pues, bien puede afirmarse que la investigación de los grupos Fuchsianos se refiere, según Mr. Poincaré, al siguiente problema: Subdividir de un modo regular el plano, o una parte del plano en una infinidad de partes con la condición precisa de que sean congruentes entre sí.

Para dar fin a estos preliminares, creo del caso desarrollar alguna fórmula que, aparte de su importancia, solo se encuentran indicadas en las obras de los grandes maestros.

Si en dos figuras congruentes, el punto γ es homólogo de α, y δ lo es de β, se tiene: $(\alpha\beta)=(\gamma\delta)$; en el concepto de considerar α’, β’, γ’, δ’ como conjugados a los primeros, por lo que precede, puede escribirse:

$$(\beta) \quad (\alpha\beta)=\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}$$

fácilmente se comprende que los cuatro puntos α, β, α’, β’ son puntos de una circunferencia cuyo centro está en el eje real.

Supongamos además que α y β estén situados encima de dicho eje; esta circunferencia lo cortará en dos puntos *h* y *k*, el comprendido en el arco αα’.

De esta suerte, y en el supuesto de que se tenga

$$(a') \quad [\alpha,\beta]=\frac{\alpha-h}{\alpha-k}\frac{\beta-k}{\beta-h}$$

puede deducirse la fórmula siguiente:

$$(b') \quad [\alpha,\beta]=\frac{4[\alpha,\beta]}{([\alpha,\beta]+1)^2}$$

Según la teoría de las cantidades imaginarias, $a-h$ resulta ser la recta αh; $\beta-k$, la βk; $\alpha-k$, la αk; y $\beta-h$, la βh; así, pues, la representación geométrica de $[\alpha,\beta]$; es:

$$\frac{\sqrt{hb}}{\sqrt{kb}}\frac{\sqrt{kd}}{\sqrt{dh}}$$

De un modo análogo se tiene que $\alpha - \alpha_1$, representa la recta $\alpha\alpha_1$; $\beta - \beta'$, la $\beta\beta'$; $\alpha - \beta'$, la $\alpha\beta'$; y $\beta - \alpha'$, la $\beta\alpha$; además fácilmente se deduce:

$$\alpha\alpha' = 2\alpha\beta = 2\sqrt{kb.bh}; \qquad \beta\beta' = 2\alpha\beta = 2\sqrt{kd.dh}$$

pero como quiera que $\alpha\beta' = \alpha'\beta$, resulta con aplicación de la fórmula (ß):

$$(\alpha\beta) = \frac{4\sqrt{kb.bh}\sqrt{kd.dh}}{\overline{\alpha\beta'}^2} \quad (\mathrm{A})$$

Ahora bien, el triángulo $\alpha d \beta'$ nos da:

$$\overline{\alpha\beta'^2} = \overline{\alpha d^2} + \overline{d\beta'^2} + 2\alpha\beta.d\beta' = \overline{\alpha b^2} + \overline{db^2} + \overline{db'^2} + 2\alpha\beta.d\beta' = kb.bh + \overline{db^2} + kd.dh + 2\alpha b.d\beta' +$$

$$+ kb.bh + bd(bh - dh) + kd.dh + 2\alpha b.d\beta = bh(kb + bd) + dh(kd - bd) + 2\alpha b.d\beta =$$

$$= bh.kd + dh.kb + 2\alpha\beta.d\beta = bh.kd + dh.kb + 2\sqrt{kb.bh.kd.dh} = \left(\sqrt{bh.kd} + \sqrt{dh.kb}\right)^2$$

Sustituyendo esta expresión en (A), se tiene:

$$(\alpha\beta) = \frac{4\sqrt{kb.bh}\sqrt{kd.dh}}{\left(\sqrt{bh.kd} + \sqrt{dh.kb}\right)^2}$$

Al dividir ambos términos de este quebrado por *kb.dh*, resulta definitivamente:

$$(\alpha\beta) = \frac{4\dfrac{\sqrt{bh}}{\sqrt{kb}}\dfrac{\sqrt{kd}}{\sqrt{dh}}}{\left(\dfrac{\sqrt{bh}}{\sqrt{kb}}\dfrac{\sqrt{kd}}{\sqrt{dh}} + 1\right)^2} = \frac{4[\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta] + 1)^2}$$

cuya fórmula es la que nos habíamos propuesto determinar.

Como corolario de las fórmulas anteriores pueden darse las que a continuación se expresan:

$$[\alpha, \gamma][\gamma, \beta] = [\alpha, \beta], \qquad [\alpha, \beta] = [\gamma, d]$$

En efecto, de (*a*') resulta inmediatamente:

$$[\alpha, \beta][\gamma, \beta] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k}\frac{\gamma - k}{\gamma - h}\frac{\gamma - h}{\gamma - k}\frac{\beta - k}{\beta - h} = \frac{\alpha - h}{\alpha - k}\frac{\beta - k}{\beta - h} = [\alpha, \beta]$$

Considerando ahora la igualdad (*b*'), se tiene:

$$(\alpha,\beta)=\frac{4[\alpha,\beta]}{([\alpha,\beta]+1)^2}, \qquad (\gamma,d)=\frac{4[\gamma,d]}{([\gamma,d]+1)^2}$$

y como para la igualdad (*c*') se supone *a priori* que $(\alpha,\beta)=(\gamma,d)$, naturalmente que si los primeros miembros de las igualdades que preceden son iguales, deben serlo también los segundos, y como ambos tienen la misma forma, debe realizarse forzosamente que:

$$[\alpha,\beta]=[\gamma,d]$$

El distinguido Mr. Poincaré, por medio de los preliminares que preceden, llega a completar la teoría de los grupos Fuchsianos; y al considerar un polígono normal generador, obtiene la división en ciclos, según el número de vértices del polígono, resultando así siete familias que luego, a la vez, se subdividen en géneros.

Los grupos discontinuos formados por sustituciones lineales, hállanse ya consignados en el estudio del módulo de una función elíptica, siendo a este punto notables los trabajos de Mr. Hermite, que luego Mr. Schwarz procura extender, probando que los grupos discontinuos pueden referirse a funciones superiores, a las elípticas, contribuyendo al desarrollo de esa bella rama matemática varios distinguidos sabios, tales como MM. Dedekind, Klein, Iburwitz y Dycks.

Barcelona, Marzo a Julio de 1894
Lauro Clariana Ricart