Application de la Géométrie Analytique
a la Technie Musicale

1894

C'est par le génie des grands maîtres qu'ont été dévoilés successivement les éléments du système harmonique, et les règles de l'harmonie ne reposent encore aujourd'hui que sur des lois empiriques déduites de l'expérience ou observation des faits. Il est regrettable qu'il n'en soit pas de l'art musical comme des autres branches du savoir humain, où l'on n'a pas craint d'ouvrir un peu la porte à la métaphysique..

Il y a, néanmoins, un grand nombre de savants distingués qui se sont préoccupés de faire entrer la musique dans cette nouvelle voie à l'aide des mathématiques. Tels sont notamment Euler, Chladni, Marpurg, Herschell, Bary, Barbereau, Montferrier, Durutte, et plus particulièrement le remarquable philosophe Wronski. Ce dernier, dans sa «*Philosophie absolue de la Musique*», soutient que le son n'implique pas seulement des propriétés physiques s'assujettissant à des conditions logiques du goût, mais encore que celles-ci doivent être à leurs tours tributaires de la raison humaine.

Ces hautes conceptions qui forment la base de la métaphysique relative à l'esthétique musicale, suffisent pour indiquer que la musique, sans cesser pour cela d'être un art, peut être élevée à la catégorie de sciences. Malheureusement, parmi ceux qui s'adonnent à la composition musicale ou qui s'occupent de théorie harmonique, il n'en est aucun, jusqu'à ce jour, qui ait accepté le concours de l'élément scientifique; au contraire, ils persistent tous dans leur indifférence à cet égard, et continuent de se renfermer dans les limites étroites de leur méthode empirique.

Il n'en est pas moins vrai qu'ils sont obligés d'accepter sans conteste les lois d'acoustique auxquelles obéit le son tant au point de vue de l'espace que par rapport au temps: or, l'espace et le temps sont des facteurs des mathématiques, de sorte que, malgré leur résistance passive, les musiciens se trouvent tributaires de la science.

Rappelons à ce propos que seuls les sons doués d'une valeur esthétique doivent être utilisés dans la musique afin de constituer les tons et que ceux-ci dépendent de la durée des vibrations. En effet, les vibrations réalisées librement se développent en temps égaux, ce qui constitue ***l'isochronisme***, principe premier de la musique, base de la qualité *esthétique* du son. Ainsi donc, que le son soit grave ou aigu, du moment qu'il est assujetti à l'isochronisme des vibrations, il appartient à la musique, car ses qualités *esthétiques* se trouvent en relation non seulement avec les sons de la *gamme* ou *échelle musicale*, mais encore avec les sons secondaires qui en dérivent et qui prennent le nom d'*harmoniques*.

La série mathématique suivante:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

explique la formation de ces sons dits *harmoniques*, c'est-à-dire que si 1 représente la longueur de la corde qui produit le son principal, les sons qui correspondent aux longueurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots$, forment les sons harmoniques du premier.

Maintenant, si l'on considère le système indéfini de tonalité qu'expriment les différents termes de la série (A) ci-dessus, et si on se laisse emporter dans la sphère de l'idéal, on se demande tout d'abord si les fractions énoncées doivent se continuer indéfiniment, puis s'il faudrait remplir les intervalles qui restent de fraction à fraction pour établir la loi de continuité dans la musique. En un mot, si dans la série illimitée qui suit:

$$1\cdots, \frac{1}{2}\cdots, \frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{I}\cdots\cdots\frac{1}{I^2}\cdots\cdots\frac{1}{I^I}\cdots\cdots\frac{1}{I^{I\cdots}}\cdots$$

(où I représente un indéfiniment grand), on suppose que les intervalles de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$, de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}$ etc., soient remplis par toutes les valeurs imaginables, de manière à avoir aussi tous les sons dérivés de tous les tons imaginables, y a-t-il lieu de considérer cette série comme une vraie source de tonalité?

Si nous parvenons à répondre d'une manière satisfaisante à cette question, n'est-il pas évident que nous nous trouverons en possession d'une nouvelle musique, de la musique purement scientifique ou idéale? A présent, si de cette musique idéale nous déduisons par voie de corollaire celle que nous connaissons, ce résultat ne suffira-t-il pas pour nous inspirer toute confiance dans les données scientifiques de notre problème? Ne voyons-nous pas, en effet, les géomètres porter leurs investigations jusqu'à l'*hyperespace*, et se donner pour satisfaits si, en descendant à la géométrie de trois dimensions, leurs principes se trouvent ainsi confirmés?

Mais avant d'entrer plus avant dans notre sujet, nous devons ici rendre hommage au comte Durutte, un des auteurs les plus remarquables dont les efforts aient en pour objet de donner à la musique un caractère scientifique. Il a dû s'inspirer sans doute des œuvres de Wronski, notamment de la «*Réforme absolue du savoir humain*», ouvrage dont le but principal est d'atteindre à ce que l'on pourrait appeler la *loi suprême de l'harmonie.*

Sa technique musicale repose sur des formules algébriques: adoptant ses principes, nous ferons, comme lui, usage de l'algèbre, mais ce sera seulement pour aboutir à l'application de la géométrie, moyen graphique à l'aide duquel nous nous proposons de réduire tous les sons à de simples *multilatères* inscrits dans une même circonférence, ce qui nous permettra de mettre en relief et de rendre pour ainsi dire palpables les relations qui existent entre les accords musicaux et les lois auxquelles ils obéissent.

I I

La technique et l'organisation de la musique se fondent simplement sur l'*échelle des quintes*, de sorte que c'est sur cette échelle que nous nous appuierons constamment comme étant la base fondamentale de nos calculs et de nos considérations.

ECHELLE DES QUINTES
TIERCES MINEURES

−15	−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
sol^{II}	re^{II}	la^{II}	mi^{II}	si^{II}	fa^{I}	do^{I}	sol^{I}	re^{I}	la^{I}	mi^{I}	si^{I}	*fa*	*do*	*sol*

TIERCES MAJEURES

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
re	*la*	*mi*	*si*	*fa*T	*do*T	*sol*T	*re*T	*la*T	*mi*T	*si*T	$fa^{\times}$	$do^{\times}$	$sol^{\times}$	$re^{\times}$	$la^{\times}$

Cela posé, de même que l'octave se représente numériquement par la relation exacte de 2:1, la quinte est déterminée par la relation de 3:2, ce qui signifie qu'à égalité de temps, quand une corde donne trois vibrations, l'autre n'en donne que deux.

En conséquence, la loi des quintes s'exprimera par la progression géométrique suivant:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\mathrm{I}} : \cdots\cdots \left(\frac{3}{2}\right)^{-8} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} : \left(\frac{3}{2}\right)^{0} : \left(\frac{3}{2}\right)^{1} : \left(\frac{3}{2}\right)^{2} : \cdots\cdots : \left(\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{I}}$$

Les termes de cette progression peuvent être considérés comme étant les nombres d'un système de logarithmes dont la base serait $\frac{3}{2}$, et dès lors pour se rendre compte des quintes qui se rapporteront à un accord, il suffira d'avoir égard aux logarithmes de ses termes, ou bien aux exposants, conformément à la progression arithmétique suivante:

$$-\mathrm{I}\cdots -3.-2.-1.0.1.2.3.\cdots\cdots +\mathrm{I}$$

Le zéro se rapporte généralement au *re*, comme origine des coordonnées, de la manière que cela est exprimé dans le tableau des quintes, où sont indiquées en outre les trente-et-une valeurs qui correspondent à une même octave.

Ce tableau est suffisant pour permettre d'établir les algorithmes qui se rapportent aux accords. En effet, de même que chaque son se trouve désigné par un nombre, de même aussi chaque accord se trouve déterminé par une formule qui lui est propre.

Adoptant la marche suivie par Durutte, nous désignerons la note fondamentale de l'accord par *x*, en lui ajoutant ensuite des groupes de deux termes formés par *x*, auquel on joindra les chiffres qui indiquent dans l'échelle des quintes les notes dont la fondamentale est accompagnée. L'addition de tous les termes avec leurs signes respectifs donnera une certaine fonction qui caractérisera la manière d'être de l'accord.

Prenons par exemple l'accord parfait majeur: la tierce s'exprimera par $x+4$, et sa quinte par $x+1$, puis on aura:

$$\varphi_3(x) = x + x + 4 + x + 1 = 3x + 5 \quad (\mathrm{B})$$

formule qui peut en général se représenter par

$$\varphi_3(x) = ax + b$$

et qui, selon la géométrie analytique, représente une droite. Dans la technique musicale, *a* et *b* indiqueront respectivement l'un le genre et l'autre l'espèce de l'accord.

Pour concrétiser davantage la question, supposons qu'il s'agisse de l'accord parfait majeur: *do, mi, sol*. Suivant l'échelle des quintes, il vient:

$$\left.\begin{array}{ll} do = & -2 \\ mi = & +2 \\ sol = & -1 \end{array}\right\} \text{Total } [-1]^{(1)}$$

Si dans (B) on suppose $x = -2$, on obtient aussi [-**1**]. En effet,

$$\varphi_3(-2) = 3 \times -2 + 5 = [-1]$$

Prenons pour second exemple: si^{I}, re, fa.

Comme $si^{\mathrm{I}} = -4,\ re = 0,\ fa = -3$, il en résulte pour total [7], valeur qui est aussi en entière concordance avec

$$\varphi_3(x) = \varphi_3(-4) = 3 \times -4 + 5 = [-7]$$

Si nous considérons à présent un accord de quatre notes, correspondant par exemple à la septième dominante, c'est-à-dire à celui formé par une tierce majeure, une quinte juste et une septième mineure, on a:

$$x, \quad x+4, \quad x+1, \quad x-2$$

(1) Nous nous servons de la parenthèse afin que l'on ne puisse pas confondre le chiffre relatif à l'accord, représentant la somme ou le total, avec celui qui figure sur l'échelle des quintes.

d'où

$$\varphi_4(x) = 4x + 3$$

Si nous supposons que la note fondamentale *x* soit $sol = -1,$ il en résulte:

$$\left.\begin{array}{rr} sol = & -1 \\ si = & 3 \\ re = & 0 \\ fa = & -3 \end{array}\right\} \text{Total } [-1]$$

Appliquant la formule (C), on a:

$$\varphi_4(-1) = 4 \times -1 + 3 = [-1]$$

Si nous considérons enfin: $la^{\mathrm{I}}, do, mi^{\mathrm{I}}, sol^{\mathrm{I}}$, on obtiendra, en opérant d'une manière analogue aux cas antérieurs:

$$\varphi_4(-6) = [-21]$$

Les expressions algébriques qui précèdent, de même que toutes les autres qui se rapporteraient à des accords plus ou moins complexes, peuvent être considérées comme des cas particuliers des formules fondamentales suivantes, dans lesquelles se trouve condensée la loi générale relative à la structure de tous les accords:

$$\varphi_m(x) = mx + 4t - 3t' \quad (\mathrm{M})$$

$$t + t' = \frac{m(m-1)}{1.2} \quad (\mathrm{N})$$

La fonction $\varphi_m(x)$ représente la somme totale des termes d'un accord composé de *m* sons, *x* étant la note fondamentale, *t* et *t'* deux nombres indéterminés que multiplient respectivement 4 et -3, qui représentent ici la tierce majeure et la tierce mineure. La fonction $\varphi_m(x)$ indique donc que la somme ou résultante d'un accord est égale à autant de fois sa fondamentale qu'il y a de sons dans le dit accord, plus un certain nombre de tierces majeures joint à un certain nombre de tierces mineures.

L'expression (N) indique que la somme des quantités indéterminées *t* et *t*' est égale au nombre des combinaisons qui peuvent être formées avec *m* objets pris de deux en deux.

Les deux formules (M) et (N) sont suffisantes pour assujettir la théorie musicale à des principes scientifiques, et par suite porter son étude dans la théorie des dérivés, sous la forme de coefficients différentiels, de la manière que cela va être exprimé ci-après.

Considérant deux termes d'un intervalle quelconque, tels que x et $x + n'$, si l'on désigne par $f_2(x)$ la fonction qui se rapporte à son produit, on a:

$$f_2(x) = x^2 + n'x$$

et en prenant la première dérivée:

$$f_2(x) = \frac{df_2(x)}{dx} = \varphi_2(x) = 2x + n'$$

Si nous considérons ensuite un accord de trois notes exprimé par $x,\ x+n',\ x+m'$ et nous procédions comme auparavant, on déduit:

$$f_3(x) = x(x+m')(x+n') = x^3 + (m'+n')x^2 + m'n'x$$

Opérant deux dérivations successives, on obtient:

$$f'_3(x) = 3x^2 + 2(m'+n')x + m'n'$$

$$f''_3(x) = 3.2.x + 2(m'+n')$$

puis

$$\frac{f''_3(x)}{1.2} = 3x + (m'+n')$$

Cependant, comme le second membre représente la fonction déjà trouvée $\varphi_3(x)$, on a en définitive:

$$\frac{f''_3(x)}{1.2} = \frac{d^2 f_3(x)}{1.2.dx^2} = \varphi_3(x) = 3x + (m'+n')$$

Continuant ainsi par induction, on finit par aboutir à la formule générale:

$$\frac{d^n f_{n+1}(x)}{1.2.3.\cdots n\, dx^n} = \varphi_{n+1}(x)$$

Pour terminer, nous ferons remarquer que, suivant l'échelle admise dans notre musique, on peut arriver à fournir jusqu'à des accords de sept notes, de sorte que la formule (N), c'est-à-dire

$$t + t' = \frac{m(m-1)}{1.2}$$

donnera les valeurs suivantes:

$$m = 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots t + t' = 3$$

$$m = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots t + t' = 6$$

$$m = 5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots t + t' = 10$$

$$m = 6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots t + t' = 15$$

$$m = 7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots t + t' = 11$$

Ces résultats permettent de déterminer scientifiquement toutes les combinaisons dont peuvent être susceptibles les accords de trois, de quatre, de cinq, de six ou de sept notes. Parmi ces combinaisons il y en a quelques-unes qui peuvent être considérées comme des dérivées des autres accords restants qui prennent le nom de naturels. Ces accords naturels sont justement les seuls dont nous nous occuperons ici, afin d'éviter que notre travail ne dépasse point les justes limites.

I I I

Nous commencerons tout d'abord par les accords naturels de trois sons.

Si, dans les formules générales (M) et (N), nous supposons m = 3, nous obtenons:

$$\varphi_3(x) = 3x + 4t - 3t' \quad (1)$$

$$t + t' = \frac{3.2}{1.2} = 3 \quad (2)$$

L'équation (2) peut se satisfaire par le moyen de nombres entiers et positifs de la manière ci-après:

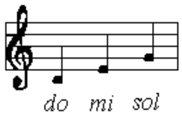
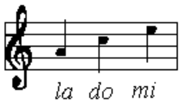
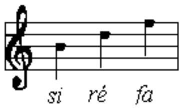
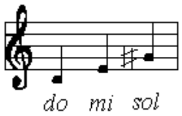
$$1^o \cdots\cdots t = 2 \cdots\cdots t' = 1$$

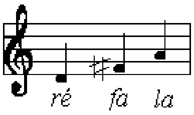
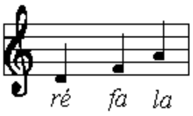
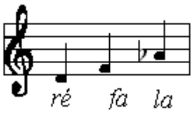
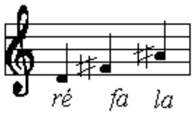
$$2^o \cdots\cdots t = 1 \cdots\cdots t' = 2$$

$$3^o \cdots\cdots t = 0 \cdots\cdots t' = 3$$

$$4^o \cdots\cdots t = 3 \cdots\cdots t' = 0$$

Ces quatre cas correspondent, suivant Durutte, aux accords naturels de trois sons désignés respectivement sous les noms de:

Accord parfait majeur ....

Accord parfait mineur ....

Accord de tierce et quinte mineures
appelé aussi accord de quinte diminuée..

Accord de tierce et quinte majeures,
désigné aussi sous le nom de quinte augmentée...

En prenant la note ***re*** comme fondamentale, les accords antérieurs se transformeront en:



Et par application des principes que nous avons déjà exposés, nous pourrons poser la série de formules suivantes:

***Accord parfait majeur*:**

$$\begin{cases} f_3(x) = x(x+4)(x+1) = x^3 + 5x^2 + 4x \\ \dfrac{d^2 f_3(x)}{1.2.dx^2} = \varphi_3(x) = 3x + 5 \end{cases}$$

***Accord parfait mineur*:**

$$\begin{cases} f_{3_\mathrm{I}}(x) = x(x-3)(x+1) = x^3 - 2x^2 - 3x \\ \dfrac{d^2 f_{3_\mathrm{I}}(x)}{1.2.dx^2} = \varphi_{3_\mathrm{I}}(x) = 3x - 2 \end{cases}$$

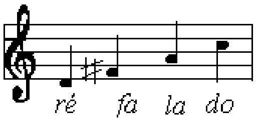
Accord de tierce et quinte mineures:

$$\begin{cases} f_{3_{\mathrm{II}}}(x) = x(x-3)(x-6) = x^3 - 9x^2 + 18x \\ \dfrac{d^2 f_{3_{\mathrm{II}}}(x)}{1.2.dx^2} = \varphi_{3_{\mathrm{II}}}(x) = 3x - 9 \end{cases}$$

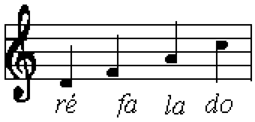
Accord de tierce et quinte majeures:

$$\begin{cases} f_{3_{\mathrm{III}}}(x) = x(x+4)(x+8) = x^3 + 12x^2 + 32x \\ \dfrac{d^2 f_{3_{\mathrm{III}}}(x)}{1.2.dx^2} = \varphi_{3_{\mathrm{III}}}(x) = 3x + 12 \end{cases}$$

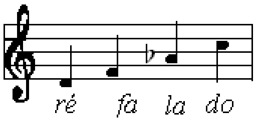
Passant aux accords naturels de quatre sons, on a:



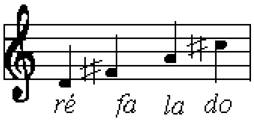
-------------------------------1re espèce



-------------------------------2me espèce



-------------------------------3me espèce



-------------------------------4me espèce

Si nous leur appliquons ensuite les formules qui leur correspondent, nous obtenons:

1er Espèce:

$$\begin{cases} f_4(x) = x(x+4)(x+1)(x-2) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x \\ \dfrac{d^3 f_4(x)}{1.2.3.dx^3} = \varphi_4(x) = 4x + 3 \end{cases}$$

2me Espèce:

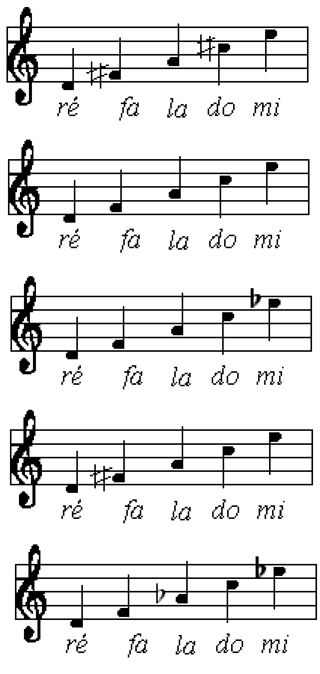
$$\begin{cases} f_{4_{\mathrm{I}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x \\ \dfrac{d^3 f_{4_{\mathrm{I}}}(x)}{1.2.3.dx^3} = \varphi_{4_{\mathrm{I}}}(x) = 4x - 4 \end{cases}$$

3me Espèce:

$$\begin{cases} f_{4_{\mathrm{II}}}(x) = x(x-3)(x-6)(x-2) = x^4 - 11x^3 + 36x^2 - 36x \\ \dfrac{d^3 f_{4_{\mathrm{II}}}(x)}{1.2.3.dx^3} = \varphi_{4_{\mathrm{II}}}(x) = 4x - 11 \end{cases}$$

4me Espèce:

$$\begin{cases} f_{4_{\mathrm{III}}}(x) = x(x+4)(x+1)(x+5) = x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 20x \\ \dfrac{d^3 f_{4_{\mathrm{III}}}(x)}{1.2.3.dx^3} = \varphi_{4_{\mathrm{III}}}(x) = 4x + 10 \end{cases}$$

ACCORS NATURELS DE CINQ SONS:

Ces relations réduites à des formes algorithmiques mathématiques nous fournissent les expressions suivantes:

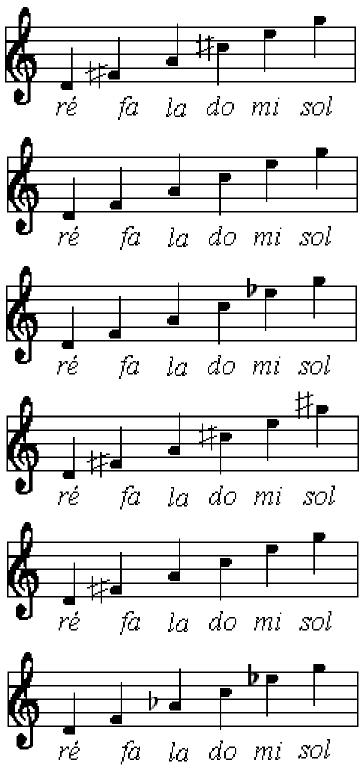
$$\begin{cases} f_5(x) = x(x+4)(x+1)(x+5)(x+2) = x^5 + 12x^4 + 49x^3 + 78x^2 + 40x \\ \dfrac{d^4 f_5(x)}{1.2.3.4.dx^4} = \varphi_5(x) = 5x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{5_{\mathrm{I}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x+2) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x \\ \dfrac{d^4 f_{5_{\mathrm{I}}}(x)}{1.2.3.4.dx^4} = \varphi_{5_{\mathrm{I}}}(x) = 5x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{5_{\mathrm{II}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x-5) = x^5 - 9x^4 + 21x^3 + x^2 - 30x \\ \dfrac{d^4 f_{5_{\mathrm{II}}}(x)}{1.2.3.4.dx^4} = \varphi_{5_{\mathrm{II}}}(x) = 5x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{5_{\mathrm{III}}}(x) = x(x+4)(x+1)(x-2)(x+2) = x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 16x \\ \dfrac{d^4 f_{5_{\mathrm{III}}}(x)}{1.2.3.4.dx^4} = \varphi_{5_{\mathrm{III}}}(x) = 5x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{5_{\mathrm{IV}}}(x) = x(x-3)(x-6)(x-2)(x-5) = x^5 - 16x^4 + 91x^3 - 216x^2 + 180x \\ \dfrac{d^4 f_{5_{\mathrm{IV}}}(x)}{1.2.3.4.dx^4} = \varphi_{5_{\mathrm{IV}}}(x) = 5x - 16 \end{cases}$$

ACCORDS NATURELS DE SIX SONS:

Les formules mathématiques correspondantes sont:

$$\begin{cases} f_6(x) = x(x+4)(x+1)(x+5)(x+2)(x-1) = x^6 + 11x^5 + 37x^4 + 29x^3 - 38x^2 - 40x \\ \dfrac{d^5 f_6(x)}{5!dx^5} = \varphi_6(x) = 6x + 11 \end{cases}$$

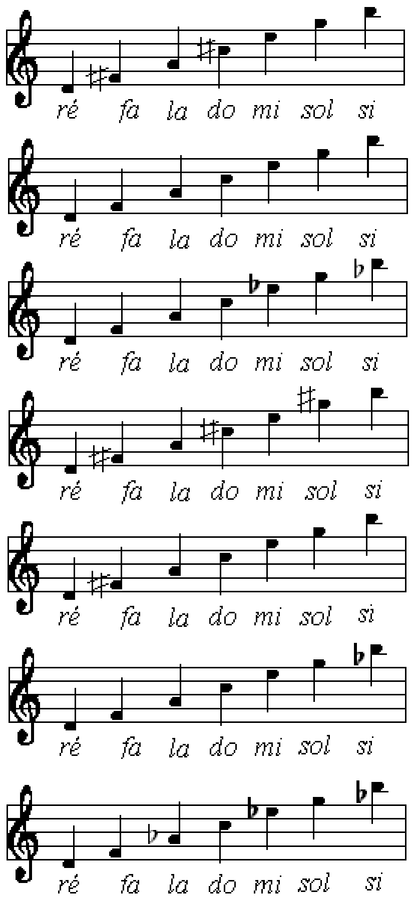
$$\begin{cases} f_{6\mathrm{I}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x+2)(x-1) = x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 15x^3 + 4x^2 - 12x \\ \dfrac{d^5 f_{6\mathrm{I}}(x)}{5!dx^5} = \varphi_{6\mathrm{I}}(x) = 6x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{6\mathrm{II}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x-5)(x-1) = x^6 - 10x^5 + 30x^4 - 20x^3 - 31x^2 + 30x \\ \dfrac{d^5 f_{6\mathrm{II}}(x)}{5!dx^5} = \varphi_{6\mathrm{II}}(x) = 6x - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{6\mathrm{III}}(x) = x(x+4)(x+1)(x+5)(x+2)(x+6) = x^6 + 18x^5 + 121x^4 + 372x^3 + 508x^2 + 240x \\ \dfrac{d^5 f_{6\mathrm{III}}(x)}{5!dx^5} = \varphi_{6\mathrm{III}}(x) = 6x + 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{6\mathrm{IV}}(x) = x(x+4)(x+1)(x-2)(x+2)(x-1) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 4x^2 + 16x \\ \dfrac{d^5 f_{6\mathrm{IV}}(x)}{5!dx^5} = \varphi_{6\mathrm{IV}}(x) = 6x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{6\mathrm{V}}(x) = x(x-3)(x-6)(x-2)(x-5)(x-1) = x^6 - 17x^5 + 107x^4 - 307x^3 + 396x^2 - 180x \\ \dfrac{d^5 f_{6\mathrm{V}}(x)}{5!.dx^5} = \varphi_{6\mathrm{V}}(x) = 6x - 17 \end{cases}$$

ACCORDS NATURELS DE SEPT SONS:

Leurs formules mathématiques respectives sont établies ainsi qu'il suit:

$$\begin{cases} f_7(x) = x(x+4)(x+1)(x+5)(x+2)(x-1)(x+3) = x^7 + 14x^6 + 70x^5 + 140x^4 + 49x^3 - 154x^2 - 120x \\ \dfrac{d^6 f_7(x)}{6!\,dx^6} = \varphi_7(x) = 7x + 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{I}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x+2)(x-1)(x+3) = x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{I}}}(x)}{6!\,dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{I}}}(x) = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{II}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x-5)(x-1)(x-4) = x^7 + 14x^6 + 70x^5 - 140x^4 + 49x^3 + 154x^2 - 120x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{II}}}(x)}{6!\, dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{II}}}(x) = 7x - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{III}}}(x) = x(x+4)(x+1)(x+5)(x+2)(x+6)(x+3) = x^7 + 21x^6 + 175x^5 + 735x^4 + 1624x^3 + 1764x^2 + 720x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{III}}}(x)}{6!\, dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{III}}}(x) = 7x + 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{IV}}}(x) = x(x+4)(x+1)(x-2)(x+2)(x-1)(x+3) = x^7 + 7x^6 + 7x^5 - 35x^4 - 56x^3 + 28x^2 + 48x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{IV}}}(x)}{6!\, dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{IV}}}(x) = 7x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{V}}}(x) = x(x-3)(x+1)(x-2)(x+2)(x-1)(x-4) = x^7 - 7x^6 + 7x^5 + 35x^4 - 56x^3 - 28x^2 + 48x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{V}}}(x)}{6!\, dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{V}}}(x) = 7x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7_{\mathrm{VI}}}(x) = x(x-3)(x-6)(x-2)(x-5)(x-1)(x-4) = x^7 - 21x^6 + 175x^5 - 735x^4 + 1624x^3 - 1764x^2 + 720x \\ \dfrac{d^6 f_{7_{\mathrm{VI}}}(x)}{6!.dx^6} = \varphi_{7_{\mathrm{VI}}}(x) = 7x - 21 \end{cases}$$

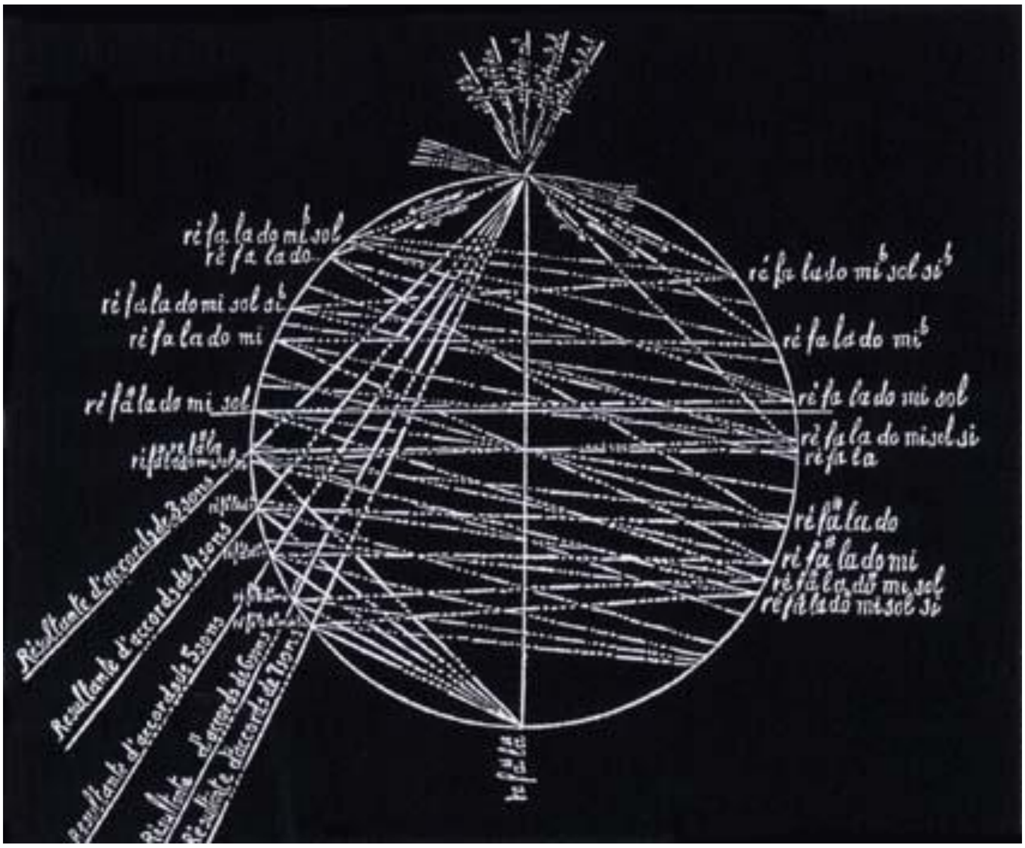
IV

Ces formules algébriques étant ainsi posées, nous allons maintenant leur appliquer la géométrie pour arriver à la construction ou représentation graphique des multilatères dont il a été déjà question.

Avant tout, nous ferons observer que les fonctions x correspondant aux accords composés du même nombre de sons, donnent des droites parallèles et équidistantes. Or, à mesure que le nombre des sons de l'accord va en augmentant, la distance des parallèles va se rapprochant, et il arrive toujours que, si l'on multiplie cette distance, prise dur l'axe, par le nombre de sons que renferme l'accord, le produit donne constamment le nombre sept, base des différentes notes constitutives de notre échelle musicale.

En outre, la direction des faisceau des droites parallèles se trouve déterminée par le coefficient de *x*, et comme celui-ci est toujours égal au nombre des sons de l'accord, on conclut de là que, à mesure que le nombre des sons augmente, la direction des droites du faisceau se rapproche de la perpendicularité relativement à l'axe *x*; de sorte que si nous pouvions atteindre la musique parfaite en marchant toujours appuyés sur la loi de continuité, la dite perpendicularité nous amènerait à un accord composé d'un nombre indéfiniment grand de sons, séparés par des intervalles indéfiniment petits, limite de toutes les conceptions possibles dans le domaine de ***l'hyper-physique*.**

Descendons à présent de ces hautes régions, et imaginons, conformément aux calculs qui précèdent, une circonférence dans laquelle se fera la projection régulière de tous les accords et dont le diamètre, indiqué par l'axe *x,* sera divisé en sept parties égales, correspondant au nombre des différentes notes de la gamme musicale.



La représentation géométrique, des quatre fonctions trouvées

$$\varphi_3(x) = 3x + 5, \qquad \varphi_{3_{\mathrm{I}}}(x) = 3x - 2,$$

$$\varphi_{3_{\mathrm{II}}}(x) = 3x - 9, \qquad \varphi_{3_{\mathrm{III}}}(x) = 3x + 12,$$

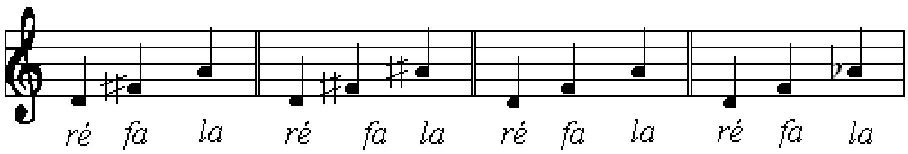
correspondant aux accords de trois sons, fournit quatre droites, dont la détermination dépendra de leurs segments respectifs sur les axes coordonnés, suivant que x ou $\varphi_3(x)$ sera égal à zéro. Quand $\varphi_3(x) = 0$, il en résulte respectivement

$$x = -\frac{5}{3} \qquad x = \frac{2}{3} \qquad x = 3 \qquad x = -4$$

valeurs dont on déduit que la distance sur l'axe *x*, d'une droite à une autre, est constamment égale à $2\frac{1}{3}$, de sorte que si nous multiplions la distance par 3, nous aurons la quantité du diamètre qui est égale à *sept*. Ainsi donc, si nous divisons le diamètre en trois parties égales, en traçant par les points de division des droites parallèles suivant l'angle correspondant, les points d'intersection de ces droites avec la circonférence représenteront les accords de trois sons.

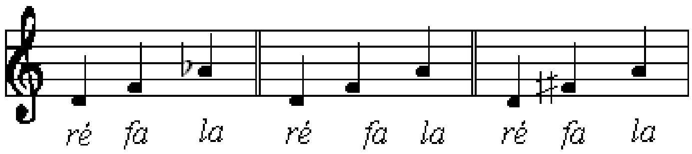
Ici nous devons faire observer, avant toutes choses, que le point d'origine des coordonnées doit être placé à trois divisions à partir de l'extrême droite du diamètre qui, comme nous l'avons déjà dit, se trouve divisé en sept parties égales. En outre, il est une circonstance dont il conviendra de tenir compte, c'est que les accords naturels de trois sons se trouvent, ainsi que nous l'avons déjà fait ressortir, au nombre de quatre: majeur, mineur, quinte diminuée et quinte augmentée, tandis que pour les autres accords de 4, 5, 6 ou 7 sons, le nombre des accords naturels est égal au nombre des notes du dit accord. Donc, pour opérer régulièrement la construction des multilatères dans la circonférence, il y aura lieu, dans les accords de trois sons, de n'en prendre que trois comme naturels et de laisser le plus irrégulier comme point de référence pour tous les autres accords.

Ainsi, dans cette conception de quatre accords de trois notes:



nous prendrons l'accord *ré fa*T*la*T comme point de référence ou pôle, et nous placerons ce point à l'extrémité gauche du diamètre, de la manière que cela est représenté dans la figure jointe à notre mémoire.

Pour la détermination des multilatères on supposé que les droites parallèles de chacun des faisceaux vont coupant successivement différentes régions de la circonférence, de sorte que les côtés du multilatère de trois notes suivront l'ordre ci-après:



Afin de mettre ces principes en corrélation avec les mathématiques modernes, on peut supposer que la droite qui unit les points extrêmes *ré fa la*$^{\mathrm{I}}$ et *ré fa*T*la*, exprime la résultante ou somme syncatégorématique des accords de trois sons.

Si maintenant nous passons aux accords naturels de quatre sons, nous avons:

$$\varphi_4(x) = 4x + 3, \qquad \varphi_{4_{\mathrm{I}}}(x) = 4x - 4,$$
$$\varphi_{4_{\mathrm{II}}}(x) = 4x - 11, \qquad \varphi_{4_{\mathrm{III}}}(x) = 4x + 10,$$

Procédant ensuite comme dans le cas antérieur, il nous vient un faisceau de quatre droites parallèles, qui sont toujours éloignées, l'une de l'autre, de la quantité constante $1\frac{3}{4}$ comptée sur l'axe *x*, de sorte que multipliant cette valeur par 4, nous obtiendrons comme dans le cas précédent le nombre sept. Cependant, pour que l'extrémité droite de ce multilatère se confonde avec celle du multilatère précédent, on doit supposer un mouvement de translation de tout le faisceau s'opérant vers la droite parallèlement à sa direction primitive, et sur une distance de $\frac{1}{4}$ calculée sur l'axe *x*. Après cela, il suffit de diviser le diamètre en quatre parties égales pour avoir les points par où passent chacune des droites du faisceau; on régularise ainsi le développement de tous les multilatères qui peuvent alors partir constamment d'un même point comme pivot, c'est-à-dire de l'extrémité droite du diamètre auquel se rapportent tous les accords musicaux.

Pour les accords de cinq sons, on a les fonctions suivantes:

$$\varphi_5(x) = 5x + 12 \qquad \varphi_{5_{\mathrm{I}}}(x) = 5x - 2 \qquad \varphi_{5_{\mathrm{II}}}(x) = 5x - 9$$
$$\varphi_{5_{\mathrm{III}}}(x) = 5x + 5 \qquad \varphi_{5_{\mathrm{IV}}}(x) = 5x - 16$$

La distance respective de ces droites sur l'axe *x* est constamment de $\frac{1}{2}$.

Si nous multiplions cette valeur par 5, nous obtenons aussi le nombre *sept*, correspondant au diamètre de la circonférence, et si nous faisons mouvoir tout le faisceau vers la gauche, parallèlement à sa première direction, sur une distance de $\frac{1}{5}$ calculée aussi sur l'axe *x*, après avoir préalablement divisé le diamètre en cinq parties égales, il suffira de tracer par les points de division les droites du faisceau, avec l'inclinaison convenable, pour avoir le multilatère de cinq côtes.

En ce qui concerne les accords de six sons, on a:

$$\varphi_6(x)=6x+11, \quad \varphi_{6_I}(x)=6x-3, \quad \varphi_{5_{II}}(x)=6x-10,$$
$$\varphi_{6_{III}}(x)=6x+18, \quad \varphi_{6_{IV}}(x)=6x+4, \quad \varphi_{6_V}(x)=6x-17$$

La distance constante est dans ce cas de $1\frac{1}{6}$, et si on la multiplie par 6, on obtient aussi *sept*, correspondant au diamètre de la circonférence, de manière que si l'on fait mouvoir le faisceau vers la droite et sur une distance de $\frac{1}{6}$ en procédant comme précédemment, il suffira ensuite de diviser le dit diamètre en six parties égales pour déterminer le multilatère de six côtés.

Enfin, pour les accords de sept sons, nous prendrons les fonctions suivantes:

$$\varphi_7(x)=7x+14, \quad \varphi_{7_I}(x)=7x, \quad \varphi_{7_{II}}(x)=7x-14,$$
$$\varphi_{7_{III}}(x)=7x+21, \quad \varphi_{7_{IV}}(x)=7x+7, \quad \varphi_{7_V}(x)=7x-7$$
$$\varphi 7_{VI}(x)=7x-21.$$

La distance est ici constamment égale à l'unité, de sorte qu'il n'est pas besoin de faire mouvoir le faisceau pour construire le multilatère correspondant, dont la détermination s'opérera d'ailleurs en procédant comme dans les cas précédents.

Nous ferons observer que les multilatères, suivant que le nombre des sons est pair ou impair, se dirigent au-dessus ou au-dessous de l'axe, à partir du point servant de pivot commun, afin que tous aillent aboutir à la partie supérieure de la circonférence.

En résumé, si l'on prend le point *ré fa*T*la*T comme pôle, et l'axe *x* comme axe polaire pour tous les multilatères, comme les rayons vecteurs qui vont du dit pôle à l'extrémité des multilatères doivent nécessairement être perpendiculaires aux résultantes de ces multilatères, ils pourront, pour l'uniformité de la construction géométrique, être substitués aux dites résultantes, conformément aux valeurs consignées dans le tableau suivant:

			MODULE		ARGUMENT	
Accords de	Trois	Sons	4,9	Approximativement	45º	Approximativement
»	Quatre	»	4,3	»	52º	»
»	Cinq	»	3,7	»	58º	»
»	Six	»	3,3	»	62º	»
»	Sept	»	3,0	»	65º	»

V

CONCLUSION

Si nous fixons notre attention sur la figure où se trouvent condensés les résultats de nos formules, nous remarquons certains faits d'une importance considérable. Tout d'abord nous voyons que le point de départ de chaque accord, c'est-à-dire le premier sommet de chaque multilatère, renferme la même quantité potentielle pour augmenter bientôt graduellement à mesure que le multilatère possède un plus grand nombre de côtés: ce point, représentant différentes phases d'un même accord, pourrait donc fort bien être désigné sous le nom de ***point multiple musical***. Nous observons ensuite que les points symétriques, eu égard au point le plus élevé de la circonférence, signe représentatif de la tonique, expriment des accords qui, eux aussi, sont symétriques à leur tour, comme s'ils étaient en marche pour arriver à l'accord parfait majeur à l'instar des différentes positions d'un pendule qui tend à la verticale, c'est-à-dire au repos. Enfin, il est une autre circonstance bien digne d'attention, c'est que l'arc de la circonférence que nous avons décrit selon les notes de notre gamme ne pas au delà d'environ 130 degrés à compter du pivot de droite: mais, dans le cas où de nouveaux sons seraient obtenus en rétrécissant un peu plus les distances dans l'octave, les degrés de cet arc augmenteraient nécessairement.

Il n'est pas douteux que si l'on parvient quelque jour à accroître le nombre des sons dans la gamme, ces nouveaux éléments fourniront des trésors inappréciables entre les mains des vrais génies, dont les procédés tendent généralement à rétrécir autant que possible les distances des sons. C'est ce qu'on peut observer notamment dans le *Tannhäuser* de Wagner, où une des principales inspirations du compositeur consiste dans une phrase mélodique qui se développe par demi-tons, limite minimum des distances que concède la musique actuelle.

Dans ces conditions, on pourrait très bien considérer la musique idéale ou scientifique comme une limite des différentes phases du perfectionnement dont peut être encore susceptible notre musique actuelle, malgré les progrès qui se sont accomplis depuis l'évolution survenue avec Beethoven, et quoique ces progrès ne se soient jamais manifestés que d'une manière empirique.

La composition musicale ne doit pas se borner à être comme le résultat d'une simple divination; il faut qu'elle découle de principes purement scientifiques. C'est à la science qu'il doit toujours appartenir de décider de ce qui est ou n'est pas admissible dans l'art, tout au moins pour ce qui concerne sa partie technique. C'est la science enfin qui seule est en état de fournir naturellement à l'esthétique musicale le développement dont elle pourra être susceptible le jour où elle sera basée sur une loi génératrice de sons et sur l'intelligence humaine.

En résumé, en accommodant les règles de la composition et les lois des accords à de simples constructions graphiques, nous croyons avoir suffisamment démontré que l'introduction des mathématiques dans l'étude de la musique aurait pour objet de créer une nouvelle technique musicale qui, représentée par des formules géométriques, contiendrait en germe des accords et des enchaînements d'accords que l'instinct musical abandonné à lui-même ne saurait découvrir.

Cependant, tout en faisant de l'élément scientifique une base fondamentale de l'art musical, nous n'avons pas la prétention d'en faire exclusivement et rigoureusement sa partie prépondérante. La composition d'une œuvre d'art, et particulièrement celle d'une œuvre musicale, met en jeu les trois facultés de l'âme: la sensibilité, l'intelligence et la volonté, mais surtout la sensibilité qui, suivant les impressions qu'elle reçoit, fait naître en l'âme des mouvements divers et l'élève quelquefois jusqu'à l'inspiration, sans laquelle il ne saurait y avoir de vrai chef-d'œuvre. Les mathématiques, qu'on accuse à tort d'aridité, sembleront peut-être, aux yeux de quelques-uns, devoir entraver les élans de cette manifestation de l'âme; mais nous soutenons, au contraire, que les formules de notre technique musicale ouvriront de nouveaux horizons à l'inspiration, et qu'elles lui serviront d'appui dans ces régions inexplorées de *l'indéfini* où elle se perdrait si sa flamme n'y rencontrait nécessairement son véritable foyer, Dieu, unique source du vrai et du beau, centre de toute perfection.

Bruxelles, 3 au 8 Septembre 1894
Lauro Clariana Ricart

Compte Rendu du troisième Congrès Scientifique International des Catholiques tenu a Bruxelles du e au 8 septembre 1894.