Superficie apsidal del Elipsoide

1894

Las condiciones analíticas y geométricas son suficientes para dar a conocer esa infinidad de superficies que luego se dividen en familias y especies; empero las precitadas condiciones pueden ser directas o indirectas, o sea únicas o derivadas de otras más o menos complejas. Las superficies que podríamos designar bajo el nombre de secundarias, engéndranse por medio de ciertas leyes aplicadas sobre la existencia de otras determinativas de las primeras superficies. Y si inmenso es el campo de investigaciones para dichas superficies secundarias, cuanto más no lo fuera si pasáramos a las superficies terciarias, cuaternarias, etc., etc.

La superficie apsidal, según M. Salmon, o sea la conjugada conforme la notación de M. Catalán, corresponde a las secundarias, ocupándose de ella también los distinguidos matemáticos Gilbert y Laurent, si bien bajo puntos de vista diferentes.

En este articulillo nos proponemos solamente demostrar que la superficie apsidal del elipsoide corresponde a la superficie de las ondas luminosas, punto de suma importancia para la física.

Supongamos que por un punto fijo *O* pasa un plano *P* que corte a una superficie *S* según una curva *C*, siendo *OM* una normal a esta curva trazada desde *O*, y *M* el pie de la normal; si luego, por el punto *O*, trazamos una perpendicular al plano *P* y sobre dicha perpendicular se toma *OM'*=*OM*, el lugar geométrico de los diferentes puntos *M'* que van resultando cuando el plano varía de posición, forma la superficie apsidal de la superficie *S*, relativa al punto *O*.

Sean $(x\ y\ z)$ y $(x'\ y'\ z')$ las coordenadas de los puntos M y M' relativos al punto *O*, tomado como origen de coordenadas; sean dx, dy, dz las componentes de un pequeño movimiento *ds* de la curva *C* desde *M*; y $\delta x, \delta y, \delta z$ las componentes de un nuevo movimiento δs del mismo punto *M* sobre la superficie *S* y octogonalmente al primero.

Si designamos por *r* la distancia de los puntos $(x\ y\ z)$ y $(x'\ y'\ z')$ al origen, así como por $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ y $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ los ángulos que las dos rectas *r* forman respectivamente con los ejes coordenados, cabrá escribir las igualdades siguientes, según principios bien conocidos de la geometría analítica:

$$(1)\quad x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2 \qquad (2)\quad \cos\alpha'\frac{dx}{ds}+\cos\beta'\frac{dy}{ds}+\cos\gamma'\frac{dz}{ds}=0$$

$$(3)\quad \cos\alpha\frac{dx}{ds}+\cos\beta\frac{dy}{ds}+\cos\gamma\frac{dz}{ds}=0 \qquad (4)\quad \cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0$$

$$(5)\quad \frac{\delta x}{\delta s}\frac{dx}{ds}+\frac{\delta y}{\delta s}\frac{dy}{ds}+\frac{\delta z}{\delta s}\frac{dz}{ds}=0$$

Si multiplicamos (2) y (3) por $r\,d\,s$, la (4) por r^2 y la (5) por $\delta's\,ds$, permitirá expresar las fórmulas anteriores por el grupo que sigue, conforme a Laurent:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$x'dx + y'dy + z'dz = 0$$
$$xdx + ydy + zdz = 0$$
$$xx' + yy' + zz' = 0$$
$$\delta x\,dx + \delta y\,dy + \delta z\,dz = 0$$

Por la diferenciación respectiva del sistema de igualdades que preceden, se obtienen fácilmente varias consecuencias importantes relativas a la superficie apsidal de otra superficie dada.

De suerte que si *S*’ es la superficie apsidal de *S*’ con relación al punto *O*, *S* será también la superficie apsidal de *S*’ con relación al mismo punto *O*.

Las direcciones dx, dy, dz y dx', dy', dz', respectivos a los dos puntos conjugados de las superficies *S* y *S*’, son paralelas.

La polar recíproca de la apsidal de la superficie *S* con relación a una esfera que tenga su centro en *O*, es la apsidal de la polar recíproca de esta superficie.

La apsidal de un plano es un cilindro de revolución.

La apsidal de una superficie de revolución es otra superficie de revolución.

La apsidal de una esfera es un toro.

Dejando estas consideraciones generales, pasemos inmediatamente al caso que nos ocupa.

Si por el centro de un elipsoide se considera una sección plana, y se traza por el centro de dicho elipsoide una perpendicular a la sección e igual a uno de los ejes de la misma, el lugar geométrico de las extremidades de la recta así trazada, cuando el plano de sección vaya tomando diferentes posiciones, no es más que la superficie de la onda luminosa, según se desprende de su ecuación: y como quiera que la construcción que precede corresponde a la determinación de la superficie apsidal, de ahí se infiere que la superficie de las ondas luminosas corresponde con la apsidal del elipsoide.

Para demostrar el principio que precede, empezaremos tomando la ecuación del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Concibiendo una sección plana bajo las condiciones anteriores, compréndese fácilmente que el plano que contiene el eje de la sección y a la perpendicular a la misma, debe contener la normal al punto correspondiente del elipsoide. Así pues, conforme a la notación adoptada, el plano anterior debe contener el origen de coordenadas, el punto del elipsoide $(x\ y\ z)$ y el correspondiente $(x'\ y'\ z')$ de la superficie apsidal, y además la normal al elipsoide. Si consideramos la ecuación del plano:

$$Ax + By + Cz = 0$$

con ello tenemos que se cumplen ya dos condiciones: pasar por el punto $(x\ y\ z)$ del elipsoide y además por el centro u origen de coordenadas.

Si tomamos $Ax' + By' + Cz' = 0$, indica que el plano, además de pasar también por el origen, contiene el punto $(x'\ y'\ z')$ de la superficie apsidal.

Y si, por fin, tómanos la ecuación general del plano que pasa por un punto $(x\ y\ z)$, se tiene:

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0 \quad (\alpha)$$

y como dicho plano debe contener la normal a la superficie elipsoidal, cuyas ecuaciones son:

$$X - x = -\frac{dz}{dx}(Z - z) = \frac{xc^2}{za^2}(Z - z)$$

$$Y - y = -\frac{dz}{dy}(Z - z) = \frac{yc^2}{zb^2}(Z - z)$$

Al sustituir estos valores en (α), resulta:

$$A\frac{x}{a^2} + B\frac{y}{b^2} + C\frac{z}{c^2} = 0$$

Al eliminar los parámetros *A*, *B*, *C* entre las tres ecuaciones halladas

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0 \\ Ax' + By' + Cz' &= 0 \\ A\frac{x}{a^2} + B\frac{y}{b^2} + C\frac{z}{c^2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

para lo cual bastará suponer el desarrollo de la matriz siguiente:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ \frac{x}{a^2}, & \frac{y}{b^2}, & \frac{z}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

se tiene:

$$(yz' - zy')\frac{x}{a^2} + (zx' - xz')\frac{y}{b^2} + (xy' - yx')\frac{z}{c^2} = 0 \quad (\beta)$$

Ecuación que nos enlaza las tres coordenadas $(x'\ y'\ z')$ de la superficie apsidal..

Veamos como por ciertos artificios de cálculo podemos eliminar $(x\ y\ z)$ para quedarnos sencillamente con una ecuación dependiente tan solo de $(x'\ y'\ z')$ y que va a corresponder con la superficie de las ondas luminosas.

Ante todo, la ecuación (β) la podemos expresar bajo la forma que a continuación se expresa:

$$x'y\,z\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + y'z\,x\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + z'xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

Por el movimiento rotatorio que se descubre en esta ecuación, fácilmente se concibe que:

$$\left[y^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right]\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \left[x^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right]\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) +$$
$$+\left[x^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\right]\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

debe reducirse a cero. Además, el coeficiente del primer término de la expresión anterior, puede reducirse, en efecto:

$$y^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \left(\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{r^2}{a^2} - 1 = \frac{r^2 - a^2}{a^2}$$

De un modo análogo tendríamos para el coeficiente del segundo término:

$$\frac{r^2 - b^2}{b^2}$$

Y para el tercero

$$\frac{r^2-c^2}{c^2}$$

Ahora bien: si suponemos

$$\frac{a^2x'}{x\left(r^2-a^2\right)}=\frac{b^2y'}{y\left(r^2-b^2\right)}=\frac{c^2z'}{z\left(r^2-c^2\right)}=\rho \quad (\delta)$$

Y si sustituimos los valores de $x'\ y'\ z'$ en (γ), veremos que dichas coordenadas corresponden a la superficie apsidal; en efecto, pues resulta:

$$\rho\, x\, yz\frac{r^2-a^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\rho\, x\, yz\frac{r^2-b^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\rho\, x\, yz\frac{r^2-c^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0$$

Ecuación que se transforma en una identidad por lo que precede.

Así, pues, las relaciones (δ) se refieren a la superficie apsidal del elipsoide, las cuales pueden modificarse del modo siguiente:

$$\frac{\frac{a^2x'^2}{r-a^2}}{xx'}=\frac{\frac{b^2y'^2}{r-b^2}}{yy'}=\frac{\frac{a^2z'^2}{r-c^2}}{zz'}=\rho$$

o sea:

$$\frac{a^2x'^2}{r-a^2}+\frac{b^2y'^2}{r-b^2}+\frac{a^2z'^2}{r-c^2}:\left(xx'+yy'+zz'\right)=\rho$$

Según el grupo de fórmulas generales que en un principio hemos hallado, resulta que el divisor $xx'+yy'+zz'$ si bien es un absurdo considerarlo cero, podemos, no obstante, suponer, según la ley de continuidad, que alcance los indefinidamente pequeños, y para que la relación del primer miembro de la última igualdad se resuelva en una cantidad finita, tal como ρ es indispensable que el dividendo se resuelva en los indefinidamente pequeños, lo cual, dentro de la finitud, es como si fuese cero; en su virtud, cabe escribir

$$\frac{a^2x'^2}{r-a^2}+\frac{b^2y'^2}{r-b^2}+\frac{a^2z'^2}{r-c^2}=0$$

como ecuación de la superficie apsidal del elipsoide, no siendo más que la que dan los autores de física al tratar de la superficie correspondiente a las ondas luminosas.

Barcelona, 1º de Agosto de 1894
Lauro Clariana Ricart