Cuestionario de Examen

correspondiente a la asignatura de

CALCULOS

redactado por

LAURO CLARIANA RICART

Catedrático de la misma en la Universidad de Barcelona

Curso: 1899 ~ 1900

CUESTIONARIO DE EXAMEN

GRUPO 1º

I.- Variable en general.- Diferentes conceptos de variable.- Función.- Su clasificación.- Función dependiente de variable compleja.- Consideraciones geométricas aplicadas a la variable compleja

II.- Estudio general de las ecuaciones lineales diferenciales totales, aplicado en particular al sistema siguiente:

$$
\begin{aligned}
&dx_{m+1} = b_1^1 dx_1 + b_1^2 dx_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad + b_1^n dx_m \\
&dx_{m+2} = b_2^1 dx_1 + b_2^2 dx_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad + b_2^n dx_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&dx_{m+h} = b_h^1 dx_1 + \cdots\cdots b_h^h dx_h + \cdots\cdots\cdots b_h^i dx_h + \cdots\cdots + b_h^n dx_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&dx_{m+n} = b_n^1 dx_1 + b_n^1 dx_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad + b_n^n dx_m
\end{aligned}
$$

III.- Probar en las funciones ordinarias que las reglas de derivación se hacen extensivas a la cantidad compleja.

GRUPO 2º

I.- Razón por cociente entre dos variables.- Estudio de la cantidad en su mayor grado de generalidad.- Razón por cociente entre dos cantidades indefinidamente pequeñas o indefinidamente grandes.- División en órdenes de la cantidad conforme a sus tres categorías.- Consideraciones geométricas.- Fórmulas típicas.- Procedimientos distintos que pueden seguirse para la determinación del orden de una cantidad.

II.- Ecuaciones a las derivadas parciales de primer orden.- Importancia de la función *V(x,y,z,a,b)* = 0.- Integrales completas singular y general según Lagrange.- Integración para cuando $q = f(x, y, z, \rho)$ siendo *p* dependiente de una constante arbitraria.
Casos particulares: $f(y, p, q) = 0, \quad p = a, \quad f(q, p) = f(y, q) = 0$

III.- Determinación de la fórmula general: $l.z = l.r + \theta\sqrt{-1}$.
Casos particulares: $l\sqrt{-1} - 2K\pi\sqrt{-1}\, b - 1 = (2K+1)\pi\sqrt{-1}, \quad l\sqrt{-1} = \frac{4\pi l}{2}\pi\sqrt{-1}$
Aplicación de la fórmula anterior para la determinación de:

$$a = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) + \frac{4K+1}{2}\pi$$

siendo $\mathrm{arc.sen}\,\alpha = a$

GRUPO 3º

I.- Determinación del orden de una suma de un producto de un cociente y de una potencia de varias cantidades comprendidas en una misma o diferentes categorías.- Orden definitivo de una cantidad cuando esta no se refiere al orden fundamental.

II.- Estudio de Lagrange acerca de las ecuaciones a las derivadas parciales de primer orden.- Importancia de la serie de igualdades siguientes:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$$

Transformación para cuando la ecuación no contiene a la variable z.- Ejemplos.

III.- Integrar $z^2 dz$ a lo largo de una recta de longitud igual a la unidad, saliendo del origen y formando un ángulo de 45° con el eje de las a.- Integrar según el contorno de una elipse la función $\sqrt{z}\, dz,$ siendo $x = a.\cos\varphi$ é $y = b\,\mathrm{sen}\,\varphi$

GRUPO 4º

I.- Estudio de las cantidades que difieren entre si indefinidamente poco.- Consecuencias.- Orden de la razón a/b, cuando en vez de a y b se sustituyen otras cantidades que difieren de las primeras indefinidamente poco.- Probar que el orden de una suma cuyos sumandos tienen el mismo signo, no altera si se reemplazan todos o parte de los sumandos por otros que difieran indefinidamente poco de los primeros.- Observaciones notables de este último principio.- Fundamentos del cálculo diferencial e integral.

II.- Caso general de integración de la ecuación entre derivadas parciales de primer orden y primer grado dependiente de tres o cuatro variables.- Consecuencia para el estudio de ciertas superficies geométricas.- Integración de ecuaciones entre derivadas parciales de ordenes superiores al primero.

III.- Demostrar que se cumplen las condiciones de monogeneidad en las funciones siguientes: $a = \cos z,$ $a = e^z$ siendo z una cantidad compleja.

GRUPO 5º

I.- Método de los indivisibles, de los coeficientes indeterminados de Descartes, de las primeras y últimas razones, de los límites y de Newton.- Observaciones acerca de las cantidades que se desvanecen.- Teoría relativa a la derivada de Lagrange.- Método importante de Leibnitz.- Consideraciones filosóficas y comparativas de los métodos precedentes.

II.- Ecuaciones entre derivadas parciales.- Caso en que la ecuación diferencial se refiera a una sola variable.- Ejemplos.- Ecuaciones entre derivadas parciales de ordenes superiores al primero bajo condiciones análogas a las del caso anterior.- Determinar la integral correspondiente a la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + P\frac{\partial z}{dx} = Q$$

III.- Determinación de las integrales siguientes:

$$\int e^{az} \cos bxdx, \quad \int c^{az} \operatorname{sen} bbxdx$$

por medio de la cantidad compleja.

GRUPO 6º

I.- Determinación numérica de las cantidades como límites de variables, según el procedimiento de los griegos.- Valor numérico de una cantidad como resultado de una suma compuesta de un número indefinido de cantidades indefinidamente pequeñas.- Valor numérico de una cantidad como resultado de la razón por cociente de dos cantidades variables que se resuelven en una cualquiera de las tres categorías correspondientes a la cantidad.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales por medio de series.- Empleo de la serie de Maclaurin y de Taylor.- Casos en que no puede aplicarse la serie de Maclaurin.- Dada una integral bajo forma de serie, deducir su ecuación diferencial correspondiente.

III.- Derivadas sucesivas de: $u = \frac{x}{e^x - 1}$.- Relación importante con los números de Bernoulli.

GRUPO 7º

I.- Procedimiento general para determinar la razón por cociente del incremento de una función a su variable independiente.- Estudio general de la derivada.- Consideraciones filosóficas acerca de las funciones continuas cuya derivada se resuelve en la tercera categoría de la cantidad.- Incremento y diferencial de una función ordinaria.- Incremento y diferencial de la variable independiente.- Coeficiente diferencial.- Consideraciones geométricas.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales simultaneas.- Ecuaciones diferenciales simultaneas de primer orden entre tres variables.- Aplicación a las formas normales.- Casos particulares que pueden ocurrir.

III.- Derivada n + 1 de u siendo $u = \operatorname{arctg} x$ con aplicación de la cantidad compleja y en el supuesto de que $u = \frac{\pi}{2} - y$.

GRUPO 8º

I.- Diferenciación de una función compuesta en el supuesto de que no haya más que una variable independiente.- Diferenciación de una función compuesta, suponiendo que hayan varias variables independientes.- Fórmulas generales.- Probar que si dos cantidades p y q dependen de x é y, siendo dichas cantidades una función de la otra, las derivadas respectivas son proporcionales.- Importancia del teorema recíproco.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sin término independiente de la variable.- Método de Euler.- Ecuación modular.- Estudiar los diferentes casos que pueden presentarse según sean las raíces desiguales, iguales o imaginarias.- Ejemplos.

III.- Determinar las diferenciales de las funciones hiperbólicas siguientes:

$$y = Th^2 x + Cth^2 x; \qquad y = (Shx)^x$$

GRUPO 9º

I.- Funciones hiperbólicas directas e inversas.- Preliminares acerca de los desarrollos en serie de las funciones: $e^2, \cos z, \operatorname{sen} z,$ para cuando z sea una cantidad compleja.- Estudio de la expresión $e^{tz\sqrt{-1}}$. Funciones hiperbólicas directas.- Paralelo entre las funciones circulares y las hiperbólicas directas. - Funciones hiperbólicas inversas.

II.- Integración de ecuaciones lineales de un orden cualquiera.- Caso en que el segundo miembro sea igual a cero.- Integración de la ecuación lineal completa.- Casos particulares que pueden ocurrir.

III.- Transformar en funciones circulares la expresión: $\frac{e^{x2\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\sqrt{-1}} - 1}$.- Importancia de esta fórmula para las funciones de Bernoulli.

GRUPO 10º

I.- Diferenciación de las funciones hiperbólicas directas.- Referencia a las funciones circulares.- Diferenciación de las funciones hiperbólicas inversas.- Aplicar diferentes procedimientos para la obtención de las fórmulas anteriores.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales de un orden superior al primero.- Reducción de la integral múltiple a otras simples.- Ecuación diferencial en que entran dos derivadas consecutivas de un orden cualquiera o que se diferencian en dos unidades.- Casos particulares de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a un orden inferior.- Ejemplos.

III.- Determinación de $\cos^m x,$ en función de los arcos múltiples.

GRUPO 11º

I.- Aplicación del cálculo diferencial a las determinantes en forma de matriz.- Caso en que los elementos de la matriz dependan de una sola variable, siendo o no todos los elementos funciones de la misma.- Caso en que los elementos de la matriz sean funciones de dos o más variables independientes.

II.- Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden.- Soluciones singulares deducidas de la integral general.- Significación de dicha integral.- Propiedades del factor integrable en esta clase de integrales.- Ejemplos.

III.- Area de la evoluta de una elipse, dada por la ecuación: $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$ siendo: $x = \frac{c^2}{a}\operatorname{sen}^3 \varphi, \quad y = \frac{c}{b}\cos^3 \varphi$.

GRUPO 12º

I.- Derivadas y diferenciales de diferentes ordenes correspondientes a una función ordinaria.- Consecuencias para una función trascendente.- Investigaciones importantes para descubrir ciertas leyes en el desarrollo de sus derivaciones.- Ejemplos.

II.- Ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera.- Consideraciones generales.- Caso en que la ecuación diferencial no contenga a las variables.- Ecuaciones diferenciales de M. Clairaut, dadas por las formas siguientes:

$$y = xF(p) + Q(p) \qquad y = px + Q(p)$$

III.- Area de la evoluta de una elipse referida a ejes polares, siendo:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad r = \frac{a^2 - cx}{a}, \quad x = a\cos\varphi$$

GRUPO 13º

I.- Fórmula de Leibnitz para la determinación de la derivada o diferencial de un orden cualquiera correspondiente a un producto de funciones ordinarias.- Demostrar que el desarrollo es general.- Aplicar el mismo principio a la división de funciones.- Determinación de las leyes a que se sujetan ciertos desarrollos.- Ejemplos.

II.- Estudio del factor que transforma en integrable el primer miembro de la ecuación diferencial $M.dx + N.dy = 0$.- Determinar dicho factor para cuando la ecuación sea homogénea.- Problema de las trayectorias en general.- Trayectorias ortogonales.

III.- Demostrar en la catenaria dada por la ecuación:

$$my = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

que la ordenada es la hipotenusa de un triángulo en que uno de sus catetos es la porción de arco contado desde el punto de arranque y el otro siempre igual a la ordenada mínima.

GRUPO 14º

I.- Derivadas sucesivas de algunas funciones para el valor particular de x = 0.- Importancia de la fórmula de Leibnitz para la resolución de este problema.- Determinación directa de las dos primeras derivadas.- Estudiar los valores resultantes de: $\operatorname{arcsen} x$ y $\operatorname{arctg} x$ según el grado de derivación sea par o impar.

II.- Ecuaciones diferenciales lineales.- Estudio de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy$$

Fórmulas notables de Jaime Bernoulli aplicadas a la ecuación: $\frac{dy}{dx} + Py = Qy$.- Justificar la ecuación de condición.- Aplicaciones.

III.- Area de una rama de lemniscata cuya ecuación es: $T = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

GRUPO 15º

I.- Diferenciación de funciones sin resolver.- Diferenciación de una función ordinaria sin resolver.- Diferenciación de dos funciones sin resolver compuestas cada una de tres variables, siendo dos de ellas funciones de la tercera.- Estudio en el caso de haber $\underline{n}$ ecuaciones con $\underline{n+1}$ variables.- Nuevos casos más generales que puedan presentarse.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden.- Separación de variables.- Casos en que es posible la integración.- Estudiar el caso en que la ecuación diferencial sea homogénea.- Caso en que faltando la homogeneidad por alguna transformación puede llevarse al primero.

III.- Volumen engendrado por la cicloide dada por las ecuaciones:

$$x = a(1 - \operatorname{sen} a) \quad y = a(1 - \cos a)$$

y en el concepto de girar alrededor del eje x.

GRUPO 16º

I.- Derivadas parciales de funciones compuestas de dos o más variables independientes.- Principio fundamental de dichas derivadas.- Diferenciales de ordenes superiores al primero de funciones compuestas en el caso más general.- Leyes generales que se observan en sus desarrollos.- Diferentes notaciones adoptadas.- Estudio para el caso en que algunas variables independientes se transformen en dependientes.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias.- Consideraciones generales.- Probar que toda ecuación diferencial del orden m, admite una integral que encierra m constantes arbitrarias.- Integrales particulares.- Ordenes respectivas de las ecuaciones diferenciales y de las integrales.- Regla general para conocer si una integral con m constantes, se refiere a una ecuación diferencial del orden m.

III.- Problema de Viviani, referente a la parte de la semiesfera que corresponde al cuadrado de su diámetro.

GRUPO 17º

I.- Diferenciales de diversos órdenes de funciones sin resolver.- Ley de los desarrollos según las funciones sean más o menos complicadas.- Eliminación de constantes.- Procedimiento general.- Aplicación de las cónicas.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales.- Ecuaciones diferenciales ordinarias.- Ecuaciones entre derivadas parciales.- Ecuación entre diferenciales totales.- Probar que todo sistema de m ecuaciones diferenciales entre x y m funciones $y_1 y_2 \cdots y_m$, de la primera variable, puede transformarse en otro donde no figuren más que las derivadas de primer orden.- Forma normal de un sistema simultaneo de m ecuaciones de primer orden.- Procedimiento general para deducir de un sistema de m ecuaciones diferenciales, una ecuación diferencial en que no entre más que x y una de las funciones.- Aplicación de reglas análogas a la formación de una determinante para deducir el orden de la ecuación diferencial definitiva.- Condiciones a que deben satisfacer las integrales además de las que corresponden a las ecuaciones diferenciales respectivas.- Aplicación a la Mecánica respecto al movimiento de un punto en el espacio.

III.- Consideraciones acerca del hiperespacio.- Aplicación a la hiperesfera.- Importancia de la Jacobiana:

$$\frac{\partial\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)}{\partial\left(\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n\right)}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\theta \\
x_2 &= R\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-2} &= R\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_{n-2} \\
x_{n-1} &= R\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= R\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

GRUPO 18º

I.- Eliminación de funciones arbitrarias.- Procedimiento general.- Consecuencias.- Aplicar el anterior procedimiento a las superficies regladas de plano director y a las superficies desarrollables.

II.- Cuadratura de superficies curvas.- Fórmula general.- Observación notable acerca de los límites de la integral doble que corresponde a la fórmula general.- Aplicación a la esfera.- Cuadratura de superficies de revolución.- Aplicaciones.

III.- Generalización del teorema de Green, siendo:

$$\Omega = \int\int\cdots v\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 n}{\partial x_n^2}\right) dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

Aplicación a las funciones esféricas representadas por la ecuación general:

$$u = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2\right)^{-\frac{n-2}{2}}$$

siendo

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2$$

Importancia de la fórmula: $\displaystyle\int\int \cdots\cdots \sum_i v x_i dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx\, R^{-n} = 0$.

GRUPO 19º

I.- Cambio de variables.- Estudiar el cambio de variables en la función siguiente:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\right)$$

Cambio de la variable independiente.- Cambio de la función *y* de la variable independiente.- Ejemplos.

II.- Volumen de cuerpos terminados por superficies cualesquiera.- Fórmulas generales.- Procedimientos varios para la determinación de un volumen.- Aplicación al elipsoide.- Volumen de cuerpos referidos a coordenadas polares.

III.- Teorema de M. Kronecker.

GRUPO 20º

I.- Del cambio de variables.- Funciones de la forma:

$$V = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdots\right)$$

Cambio de variables independientes.- Cambio de todas las variables.- Ejemplos.

II.- Volumen de cuerpos de revolución.- Aplicaciones en el concepto de que las generatrices generadoras de los diferentes cuerpos de revolución vengan expresados respectivamente por:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax - x^2\right) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \qquad y^2 = 2px$$

y en el concepto de que dichas generatrices giren alrededor del eje x.

III.- Transformación de la integral triple $\iiint dxdydz,$ en coordenadas polares.

GRUPO 21º

I.- Determinantes funcionales.- Consideraciones generales.- Forma de la determinante *U*.- Forma de la determinante de Jacobi expresada por *J*.- Consecuencias.- Determinante *H*.- Relaciones notables entre las determinantes *J* y *H*.-

II.- Rectificación de curvas.- Sentido verdadero de dicha rectificación.- Aplicaciones a los ejemplos siguientes:

$$y^2 = 2px, \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

Consideraciones generales acerca del origen de las integrales elípticas.- Determinación de sus tres especies.

III.- Consideraciones notables acerca de la integral: $\int_{-1}^{+1} dx$.

GRUPO 22º

I.- Diferencial de una función dependiente de variable compleja.- Condiciones para que la función imaginaria: $f(z) = u + vi$, admita una derivada.- Función monógena.- Consecuencias importantes para dos funciones que tengan derivadas iguales.

II.- Aplicaciones geométricas del cálculo integral.- Cuadratura de figuras planas.- Ejemplos de cuadratura de curvas referidas a coordenadas cartesianas y polares.

III.- Estudio de la integral siguiente: $\int_{-1}^{+1} dx,$ siendo $x = \sqrt{t}$.

GRUPO 23º

I.- Fórmula de Lagrange para el desarrollo de una función cualquiera de *z* según una serie ordenada de potencias enteras y positivas de x, siendo $z = a + x\varphi(z)$ y que se desarrolla en las derivadas consecutivas de la serie.- Casos particulares que pueden originarse de la fórmula general de Lagrange.- Ejemplos

II.- Integrales múltiples en general.- Reducción de dichas integrales.- Método general.- Aplicaciones.- Método de Dirichlet con aplicación al volumen del elipsoide.

III.- Integrales de Fresnel partiendo de: $\int_0^I e^{-a\pi^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi a}^{-\frac{1}{2}}$.

GRUPO 24º

I.- Diferencial del área correspondiente a una curva plana.- Diferencial de un arco de curva plana.- Fórmulas generales correspondientes a la tangente, subtangente, normal y subnormal de curvas planas referidas a ejes polares.- Diferencial de un arco o área correspondiente a una curva plana referida a los mismos ejes polares.- Aplicación a la familia de las espirales.

II.- Integrales Eulerianas de primera y segunda especie.- Transformaciones de las mismas por sustitución.- Propiedades.- Importancia de la expresión:

$$B(p,q) = \frac{\mathrm{T}(p)\mathrm{T}(q)}{\mathrm{T}(p+q)}$$

y su demostración.- Determinación de la curva Gamma.

III.- Desarrollo de la integral:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx$$

según x sea menor o mayor que la unidad.
Expresión de:

$$u' = \int_x^I e^{-x^2} dx = \int_x^I \frac{1}{2x} e^{-x^2} 2x dx \quad \text{para cuando x > 1.-}$$

Fórmula notable de Laplace:

$$u = \int_i^I e^{-x^2} - \int_x^I e^{-t^2} dt \ \text{ siendo } \ u = e^{x^2} \int_x^I e^{-t^2} dt .$$

GRUPO 25º

I.- Contacto de curvas planas.- Línea osculatriz.- Círculo osculador.- Curvatura de curvas planas.- Curvatura media.- Curvatura de una curva en un punto dado.- Círculo de curvatura.- Relación entre el círculo de curvatura y el osculador.

II.- Deducir de la integral conocida:

$$\int_i^I e^{-ax} \cos bx dx dt = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

la expresión siguiente:

$$\int_i^I \frac{e^{-ax} - e^{-ax}}{x} \cos bx dx = \frac{1}{2}\, l\, \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}.$$

Deducir de la integral conocida:

$$\int_i^I e^{-ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

a siguiente:

$$\int_i^I \frac{e^{-ax} - e^{-ax}}{x} \operatorname{sen} bx dx = \operatorname{arctg} \frac{b\,(a - x)}{b^2 + ax}$$

Determinar por procedimientos distintos la integral:

$$\int_i^I e^{-x^2} dx.$$

Importancia de la cantidad compleja para la determinación de ciertas integrales.

III.- Cambiar la variable independiente ***a*** en ***t*** en la expresión:

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\left(1 - x^2\right) \frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 - x} = 0$$

siendo $x = \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ y valiéndose de las funciones hiperbólicas.

GRUPO 26º

I.- Determinar el sentido de la curvatura en una curva plana cerca de un punto dado.- Diferentes formas del radio de curvatura.- Estudiar el caso en que el arco represente la variable independiente o que la función no se halle resuelta.- Expresión del radio de curvatura en ejes polares.

II.- Determinación de integrales definidas por medio de la diferenciación e integración bajo el signo integral.- Pasar de la integral

$$\int_a^b F(x)dx$$

a la siguiente

$$\int_a^b F(xz)dx$$

según los limites de dicha integral sean constantes o dependientes de la variable.- Diferenciación e integración bajo el signo integral en general.- Aplicar los principios precedentes a las integrales que a continuación se expresan:

$$\int_i^I \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2}a^{-\frac{1}{2}}, \qquad \int_i^I e^{-ax}dx = \frac{1}{a}, \qquad \int_i^I e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)x}dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}}$$

a fin de obtener las nuevas siguientes:

$$\int_i^I \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^{n+1}} = \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2n}\frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}; \qquad \int_i^I e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

$$\int_i^I e^{-ax}x^{n-1}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{(n-1)!\operatorname{sen} n\theta}{p^n}; \qquad \int_i^I e^{-ax}x^{n-1}\operatorname{sen} bx\,dx = (n-1)!\cos n\theta$$

siendo: $a+b\sqrt{-1} = \rho\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta\right)$.

III.- Transformar la ecuación: $x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$ en coordenadas polares.- Procedimientos distintos.

GRUPO 27º

I.- Aplicación del radio de curvatura a las cónicas.- Fórmula común.- Radio de curvatura en la circunferencia, cicloide y espiral logarítmica.

II.- Determinar si la integral

$$\int_a^b F(x)dx$$

tiene un valor finito y determinado cuando uno de sus límites se convierte en una cantidad indefinidamente grande.
Averiguar si la integral:

$$\int_a^b F(x)dx$$

tiene un valor finito y determinado cuando *F(x)* se transforma en una cantidad indefinidamente grande para el valor de la variable que corresponde a uno de los límites de la integral.- Caso en que la función *F(x)* resulte indefinidamente grande por un valor de la variable que este comprendido entre los límites de dicha integral

III.- Fórmula de Gauss, partiendo de $f(m,x)=\int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}dt$

GRUPO 28º

I.- Evolutas y envolventes en las curvas planas.- Propiedades notables de las mismas.- Fórmulas fundamentales.- Determinación de las evolutas en algunas curvas conocidas.

II.- Desarrollos de integrales definidas para cuando uno o los dos límites de la integral pasen a la categoría de cantidades indefinidamente grandes.- Determinación de las integrales siguientes:

$$\int_i^I e^{-x}dx,\quad \int_i^I \frac{dx}{x},\quad \int_i^I \cos x dx,\quad \int_i^I e^{-ax}dx,\quad \int_i^I e^{ax}dx,\quad \int_{-I}^I \frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_{-I}^I \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$$

$$\int_i^I e^{-ax}\cos bx dx, \qquad \int_i^I \frac{y^{m-1}}{(1+y)^x} \quad \text{siendo } m<n, \qquad \int_i^I x^n e^{-x} dx.$$

III.- Determinación de la serie: $l.T(x)=\left(x-bx+\frac{1}{2}sx-\frac{1}{2}s_0x^3+\cdots\right)$ partiendo de la fórmula de Gauss: $\Gamma(l)=\frac{m^x 1.2.\cdots\cdots m}{2.x\cdots\cdots(x+m)}$

GRUPO 29º

I.- Estudio de las involutas y envolventes planas.- Procedimiento general para determinar la envolvente de varias involutas correspondientes a una misma función.- Consideraciones acerca de las tangentes comunes.- Aplicaciones a varios ejemplos.

II.- Determinación de las integrales definidas siguientes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \operatorname{sen}^{2m} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \operatorname{sen}^{2m+1} x dx, \quad \int_0^1 \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fórmula de Wallis.

III.- Expresión de $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ y determinación en general de $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ por medio de la fórmula de Gauss.

GRUPO 30

I.- Puntos singulares en las curvas planas.- Puntos singulares a que da origen una misma rama de curva.- Puntos singulares que resultan del encuentro de varias ramas.- Estudiar el caso en que la ecuación se presente bajo forma implícita.

II.- Nociones generales acerca de las integrales definidas.- Determinación de las siguientes:

$$\int_i^1 x^m dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \int_i^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Determinación de las siguientes integrales definidas en el concepto de que m, sea par o impar.

$$\int_{i}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx, \quad \int_{i}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx, \quad \int_{i}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^m x dx$$

III.- Demostrar la igualdad siguiente: $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$ partiendo de la fórmula de Gauss y sabiendo además que:

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\cdots$$

GRUPO 31

I.- Líneas alabeadas.- Funciones que la determinan.- Ecuaciones de la tangente y del plano normal en un punto de una línea alabeada.- Diferencial de un arco referido a ejes coordenados cartesianos o polares.

II.- Integración de funciones diferenciales con tres variables independientes.- Condición de integrabilidad.- Determinar la expresión general correspondiente a la integral de dichas funciones diferenciales.- Ejemplos.

III.- Determinación de: $\frac{\partial^2 l\,\Gamma(x)}{\partial x^2}$ sabiendo que: $l\,\Gamma(x) = -Cx - l.x + \frac{s_2 x^2}{2} - \frac{s_3 x^3}{3} + \cdots\cdots$.- Deducir luego la notable fórmula:

$$\frac{\partial l\,\Gamma(x+1)}{\partial x} = -C + x\left[\frac{1}{1(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} + \cdots\cdots\right]$$

GRUPO 32

I.- Plano osculador.- Conceptos diferentes que pueden conducir al conocimiento de la expresión de dicho plano.- Ecuación correspondiente.- Movimiento circulatorio a que obedecen las cantidades que entran en dicha ecuación.- Aplicación a la hélice.

II.- Integración de funciones diferenciales compuestas de dos o más variables independientes.- Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de dichas funciones.- Estudiar el caso particular de una función compuesta de dos variables independientes.- Ejemplos.

III.- Constante de Euler, expresada por: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}-l-m$

siendo m indefinidamente grande.- Fórmula fundamental: $l.m=l(m-1)+l\left(1-\frac{1}{m-1}\right)$

GRUPO 33

I.- Superficies curvas.- Ecuación del plano tangente.- Plano tangente en un punto del elipsoide.- Ecuaciones de la normal.- Ángulos de la normal con los ejes coordenados.- Superficie envolvente de otro móvil.

II.- Integración por medio de series.- Principios importantes que deben tenerse en dichos desarrollos.- Procedimiento general.- Integración por series de las expresiones:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{1+x}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

Valores aproximados de algunas integrales irreducibles a forma finita.- Aplicación a la integral elíptica de primera especie.

III.- Cálculo de la constante de Euler partiendo de las fórmulas siguientes:

$$\frac{\partial l\,\Gamma(x+1)}{\partial x}=-C+x\left[\frac{1}{1(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{3(x+3)}+\cdots\cdots\right]=-C+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right).$$

GRUPO 34

I.- Curvatura de las líneas en el espacio.- Expresión del primer radio de curvatura.- Círculo osculador.- Centro de dicho círculo.- Normal principal.- Cosenos de los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

II.- Deducir de la fórmula general:

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^m x\,dx=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1}x\cos^{m-1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2}x\cos^m x\,dx$$

la integral:

$$\int \operatorname{sen}^m x\,dx$$

en el supuesto de que n = 0 y según m sea por si impar.

Deducir de la expresión:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^m x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

la que corresponde a

$$\int \cos^n x\,dx$$

bajo condiciones análogas a las del caso anterior.
Deducir de la fórmula:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x \operatorname{sen}^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx$$

la correspondiente a

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx$$

en el supuesto de que se tenga n = - m.
Deducir de la fórmula:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx$$

la inmediata

$$\int \cot^m x\,dx$$

siendo m = - n

III.- Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_i^I \frac{\operatorname{sen} bx}{x^n}dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}$$

hallándose *n* comprendido entre 1 y 2.

Fórmulas fundamentales:

$$\Gamma(n)=\int_i^I e^{-x^2}x^{n+1}dx,\quad \int_i^I \operatorname{sen} bx\, z^{-tx}dx=\frac{b}{b^2+t^2},\quad \frac{t^2}{b^2}=\partial^2,\quad \int_i^t \frac{\theta^{\frac{n}{2}-1}}{1+\theta}d\,\theta=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{n.\pi}{2}}$$

GRUPO 35

I.- Angulo de flexión o de segunda curvatura.- Cosenos de los ángulos que forma una recta perpendicular al plano osculador con los ejes coordenados.- Fórmula del radio de curvatura de segunda especie.

II.- Deducir de la fórmula general:

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x dx=\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x\cos^{n-2} x dx$$

el desarrollo que corresponde a:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x}dx$$

en el supuesto de que n sea negativa.- Deducir de la fórmula general:

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\, dx=\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cos^{n+1} x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\cos^n x dx$$

el desarrollo correspondiente a:

$$\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x}dx$$

considerando m negativa.- Deducción de las últimas integrales:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x},\quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x},\quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx,\quad \int \frac{dx}{\cos x},\quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx$$

III.- Deducir la integral siguiente:

$$\int_i^I \frac{\operatorname{sen} 2x\pi}{x^{1-s}}\,dx = \frac{(2\pi)^{1-s}}{4\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}}$$

GRUPO 36

I.- Determinar en la hélice el primero y segundo radio de curvatura.- Diferenciales de los cosenos correspondientes a los ángulos que con los ejes coordenados forman la tangente, la normal principal y la binormal referentes a un punto de una línea alabeada.- Importancia de las fórmulas que expresan las diferenciales de los cosenos correspondientes a los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

II.- Determinación de las integrales que a continuación se expresan:

$$\int e^{ax}\cos bx dx,\quad \int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx,\quad \int \operatorname{sen}^m x\cos^n x dx$$

Consideraciones acerca de las última integrales

$$\int dx,\quad \int \cos x dx,\quad \int \operatorname{sen} x dx,\quad \int \operatorname{sen} x\cos x dx$$

III.- Determinar la igualdad que a continuación se expresa:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

en el supuesto de que:

$$B(p,p) = 2\int_i^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$$

GRUPO 37

I.- Determinar la expresión de la superficie polar de una línea cualquiera.- Sistema de ecuaciones indispensable para poder deducir la ¿¿¿¿ de una línea.- Aplicación a la hélice. Deducir la superficie polar de una línea.- Aplicación a la hélice.

II.- Integración de funciones trascendentes.- Estudio de las siguientes integrales:

$$\int F(x)dx, \quad \int F(\operatorname{sen} x)\cos x dx, \quad \int F(\operatorname{arcsen} x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int F(\operatorname{sen} x\cos x)dx,$$

$$\int F(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \cdots\cdots \cos x \cos 2x)dx$$

Hallar el desarrollo de la integral $\int Pzdx$ siendo P una función algebraica y z una trascendente.

III.- Determinar la integral

$$\int_i^I \frac{dt}{t^2(t+1)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

suponiendo: $t+1=2$ y $z=\dfrac{1}{u}$

GRUPO 38

I.- Esfera osculatriz.- Expresión del radio de dicha esfera osculatriz.- Evolutas en las líneas alabeadas.- Consideraciones notables acerca de las normales principales trazadas en los diferentes puntos de una línea alabeada.- Ecuaciones que determinan las evolutas de un a línea dada.

II.- Aplicación de las integrales binomias:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{x^{m-n+1}\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a\,(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}\left(a+bx^n\right)^p dx$$

$$\int x^{-m}\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{x^{-m+1}\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{a\,(-m+1)} - \frac{b(m-np-n-1)}{a\,(m-1)}\int x^{-m+n}\left(a+bx^n\right)^p dx$$

a las expresiones siguientes:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Deducir sus diferentes desarrollos según m sea par o impar.- Integral correspondiente al péndulo circular: $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{n-x^2}}$

III.- Determinar la integral siguiente: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ siendo $x=\frac{1}{t}$

GRUPO 39

I.- Teoría de la curvatura en las superficies de curvatura de una línea cualquiera trazada sobre una superficie.- Radios de curvatura correspondientes a una sección oblicua o normal.- Teorema de Meusmie.

II.- Deducir la segunda fórmula correspondiente a los binomios:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{x^{m+1}\left(a+bx^n\right)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}dx$$

Deducir la tercera:

$$\int x^{-m}\left(a+bx^n\right)^p dx=-\frac{x^{-m+1}\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{a\left(m+1\right)}-\frac{b\left(m-np-n-1\right)}{a\left(m-1\right)}\int x^{-m+n}\left(a+bx^n\right)^p dx$$

Deducir la cuarta:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^{-p} dx=\frac{x^{m+1}\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{an\left(p+1\right)}+\frac{-m-n+np-1}{an\left(p-1\right)}\int x^m\left(a+bx^n\right)^{-p+1}dx$$

III.- Integrar la expresión $\int F\left(\operatorname{sen} x \cos x\right)dx$ considerando la expresión de dentro del signo integral referida a una función racional siendo $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x.-$ Aplicación a:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x},\quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

GRUPO 40

I.- Secciones principales en un punto de una superficie.- Teorema de Euler.- Probar que la suma de las curvaturas de dos secciones normales perpendiculares entre si es constante e igual a la suma de las curvaturas máxima y mínima en el punto considerado de la superficie.- Importancia de los puntos umbilicales.- Ecuaciones que determinan dicho punto.

II.- Integración de las diferenciales binómicas.- Casos generales de integración.- Deducir la fórmula siguiente:

$$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{x^{m-n+1}\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{b\left(np+m+1\right)} - \frac{a\left(m-n+1\right)}{b\left(np+m+1\right)} \int x^{m-n}\left(a+bx^n\right)^p dx$$

III.- Preparar la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos a - \cos x}$ dentro de las funciones racionales.

GRUPO 41

I.- Cálculo de los radios de curvatura principales en un punto dado cualquiera de una superficie.- Ecuación que determina la dirección de las secciones principales en un punto dado cualquiera de una superficie.- Relación de las fórmulas finales con las que se requieren a las líneas de curvatura que pasan por el punto considerado de la superficie.

II.- Determinar las funciones que corresponden a las integrales que a continuación se expresan:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \quad \int \frac{\left(dx+B\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{A+Bn+Cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{Bx+Cx^2}}$$

III.- Determinación de las integrales:

$$\int \operatorname{tg} x dx, \int \cot x dx$$

en el supuesto de que los términos sean homogéneos y de grado par.

GRUPO 42

I.- Definición de línea indicatriz.- Estudio y consecuencias importantes de dicha línea.- Líneas de curvatura situadas sobre una superficie.- Lugar geométrico de las normales a dichas líneas.- Superficie como lugar geométrico de los centros de curvatura de las precitadas líneas.

II.- Integración de funciones irracionales.- Caso en que los radicales contengan cantidades monomias.- Integración de funciones de la forma:

$$F\left(x, \sqrt{a + bx \pm x^2}\right).$$

Integración de funciones especiales que pueden reducirse fácilmente a la forma racional.

III.- Determinar la forma de reducción: $x^{m+1}(bx)^n = (m+1)A_n + mA_{n-1}$, siendo:

$$\int x^m (bx)^n \, dx - A$$

Valores de $A_0\, A_1\, A_2 \cdots\cdots$.

GRUPO 43

I.- Superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.- Ecuaciones entre derivadas parciales de las superficies antedichas.- Consideraciones generales acerca de las superficies designadas bajo el nombre de corroides desarrollables y regladas.- Ecuaciones entre derivadas parciales de las precitadas superficies.-

II.- Procedimientos generales para la integración de funciones fraccionadas racionales.- Integración en cada uno de los cuatro casos que pueden presentarse.- Estudiar el caso más general de expresión racional.- Aplicaciones.

III.- Principios de Cauchy.- Función monodroma o monotropa.- Función politropa.- Función sinecdoque u holomorfa.- Función racional.- Polos.- Función meromorfa.- Estudio de la función lz.- Consideraciones geométricas.- Puntos críticos.- Diferentes regiones del plano de la variable.- Camino elemental.- Líneas cortantes.- Reducción de un camino cualquiera a una combinación de caminos elementales.

GRUPO 44

I.- Triángulos indefinidamente pequeños.- Triángulo cuyos tres ángulos tienden hacia α, β y γ como cantidades finitas y los tres lados a, b, c hacia los indefinidamente pequeños de un mismo orden.- Triángulo ABC en que A tiende hacía un ángulo recto y los lados contiguos hacia los indefinidamente pequeños de primer orden.- Orden infinitesimal de diversos líneas que pueden considerarse en un triángulo rectángulo que tenga un cateto y un ángulo adyacente indefinidamente pequeño.- Triángulo que tiene un lado indefinidamente pequeño respecto a su contiguo.- Triángulo que tiene dos ángulos indefinidamente pequeños de primer orden.- Triángulo que tiene un ángulo indefinidamente pequeño de primer orden comprendido entre dos lados indefinidamente pequeños también de primer orden.

II.- Integración por partes.- Fin que se propone dicha integración.- Modo de disponer los datos para poder aplicar el principio de la integración por partes.- Integración por sustitución.- Observaciones acerca de los límites de la integral.- Reglas prácticas que pueden tenerse en cuenta para alcanzar las integrales por sustitución.- Ejemplos.

III.- Estudio de una función algebraica *u* definida por la ecuación:

$$D = Au^m + Bu^{m-1} + \cdots = F(z,u)$$

Determinación de las diferentes ramas de curvas pertenecientes a la función anterior.- Puntos críticos.- Reducción de un camino cualquiera a caminos elementales.- Ley de permutación.- Clasificación de los puntos críticos.

GRUPO 45

I.- Orden infinitesimal de líneas cuando entran en comparación unas con otras.- Consideraciones generales acerca de la curvatura de las líneas.- Diferencia de curvatura de las dos mitades de un arco indefinidamente pequeño de primer orden.- Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y su cuerda.- Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y la tangente trazada a una de las extremidades del arco y terminada en la ordenada trazada por la otra extremidad de dicho arco.- Diferencia de curvaturas extremas en un arco indefinidamente pequeño.- Expresión de la perpendicular trazada desde la extremidad de un arco indefinidamente pequeño a la tangente que pasa por el otro extremo.- Angulo formado por la cuerda de un arco indefinidamente pequeño de primer orden con la tangente que pasa por el punto medio de este arco.- Arco comprendido entre el punto medio de un arco indefinidamente pequeño de primer orden y el punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda de este arco.- Ángulos formados por las tangentes a las extremidades de un arco indefinidamente pequeño con la cuerda respectiva.- Diferencia entre las tangentes precitadas.

II.- Nociones preliminares acerca del cálculo integral.- Relación entre el cálculo diferencial e integral.- Integral de una suma de diferenciales.- Integración inmediata.- Ejemplos.

III.- Integrales de funciones monodromas.- Probar que el cálculo numérico de la integral definida

$$\int_L (f,z)dz$$

puede referirse a las integrales de funciones *dz* variable real.- Consecuencias de las integrales curvilíneas.

GRUPO 46

I.- Expresión en forma de matriz de las líneas de curvatura de la superficie $f(x,y,z)=0.-$ Líneas de curvatura en el elipsoide. Líneas de curvatura en las superficies de revolución.- Líneas de máxima y mínima pendiente.-

II.- Cálculo de las variaciones.- Consideraciones generales.- Principio fundamental de esta teoría.- Variación de una integral definida según los límites de dicha integral sean o no fijos.- Máximo o mínimo absoluto de una integral definida.- Ecuación indefinida.- Ecuación de los límites.- Máximo o mínimo relativo.- Aplicación notable a las líneas geodésicas de una superficie.-

III.- Demostrar que la integral:

$$\int_L f(z)dz$$

no cambia de valor si sufre la línea de integración una deformación cualquiera conservándose los extremos fijos y con tal que dicha línea no pase por los puntos críticos de f(z).-
El valor de la integral:

$$\int_K f(z)dz$$

tomada a lo largo del contorno K dentro del cual la función f(z) permanece finita y monodroma es igual a cero.- Si c y c' son dos contornos cerrados en el interior de K y si además f(z) permanece finita y monodroma en todo el intervalo comprendido entre K y c,c' puede escribirse

$$\int_K = \int_C + \int_{C'}$$

tomados los movimientos en el mismo sentido.- Consecuencias.

GRUPO 47

I.- Coordenadas curvilíneas.- Coordenadas curvilíneas en un plano.- Radio de curvatura de una curva cualquiera en un punto (¿,u).- Coordenadas curvilíneas de un punto sobre una superficie curva.- Radio de curvatura de una sección normal en una superficie cualquiera referido a coordenadas entre líneas.

II.- Cálculo de las diferencias.- Consideraciones generales acerca del cálculo de las diferencias.- Desarrollo de las expresiones $\Delta^n\mu_0$ y μ_n .−Determinación de las diferencias sucesivas en funciones de diferente naturaleza.- Cálculo inverso de las diferencias.- Generalidades.- Relación con los principios fundamentales del cálculo integral.- Integración de algunas funciones según diferencias finitas.- Desarrollo de la expresión $\sum\mu$ en serie, conforme a los principios de Euler.- Integración por partes en las diferencias finitas.

III.- Residuos de una función correspondiente a sus puntos críticos.- Determinación de sus valores en forma de serie, cuando los puntos críticos son polos.
La integral:

$$\int_C f(z)dz,$$

tomada según una circunferencia indefinidamente pequeña c, que tenga su centro en el punto dado a tenderá hacia cero al mismo tiempo que el radio r de la circunferencia cualquiera que sea la posición de z, con tal de satisfacerse la condición lim (z-a)f(z) = 0, para z = a.
La integral:

$$\int_K f(z)dz,$$

tomada según una circunferencia c, que tenga por centro el origen, tiende hacia cero cuando K crece indefinidamente, si se cumple la condición: lim.zf(z) = 0, para z = o.

GRUPO 48

I.- Sistema de coordenadas elípticas.- Determinación de las fórmulas:

$$x=\frac{\Delta\mu\nu}{cb}, \qquad y=\frac{\sqrt{\left(u^2-b^2\right)\left(b^2-\nu^2\right)\left(\lambda^2-b^2\right)}}{b\sqrt{c^2-b^2}}, \qquad z=\frac{\sqrt{\left(\lambda^2-c^2\right)\left(c^2-\mu^2\right)\left(c^2-\nu^2\right)}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

Deducir como caso particular las siguientes:

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \qquad y = \rho\frac{\sqrt{\left(u^2 - b^2\right)\left(b^2 - \nu^2\right)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \qquad z = \rho\frac{\sqrt{\left(c^2 - \mu^2\right)\left(c^2 - \nu^2\right)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

II.- Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_K \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a)$$

en el supuesto de que f(z) sea una función continua y monodroma en el interior del contorno K, y estar a en su interior. Consecuencias.- Aplicaciones al teorema de Taylor.- Teorema de Laurent.- Grado de multiplicidad de los ceros y polos de la función f(z) si la función f(z) no tiene sino polos en el interior del contorno ¿¿¿¿¿¿¿ debe resultar:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = M - N$$

siendo M el número de ceros y N el de polos de f(z), situados en el interior del contorno y contados según su grado de multiplicidad.- Notable aplicación del principio anterior al numero de raíces de una función algebraica racional y entera.

III.- Aplicación de la fórmula de Dirichlet al volumen del elipsoide, momentos de inercia y centros de gravedad.

GRUPO 49

I.- Estudio particular de las coordenadas curvilíneas de Lamé.- Parámetro de primera y segunda especie.- Desarrollo de los grupos de fórmulas de Lamé con sus clases respectivas.- Relaciones recíprocas.- Importancia de los grupos siguientes:

$$\frac{\partial \dfrac{f}{f^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}}{\partial\rho_1} = \frac{\partial \dfrac{f}{h_2^2}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}}{\partial\rho}$$

II.- Procedimientos varios para la determinación de las cuadraturas.- Planimetría.

III.- Aplicación de los diferentes procedimientos de las cuadraturas a la curva de M. Agnesi.

GRUPO 50

I.- Teorema de M. Bouquet acerca de la más corta distancia entre dos rectas sucesivas de un sistema continuo en el espacio.- Probar que cuando las rectas de la serie supuesta ¿¿¿ tangentes a una misma curva en el espacio se cumple la condición: $dado - dp`.? = 0.-$ Determinar la condición para que la curva anterior sea plana.

II.- Número de Bernoulli.- Estudio de la función:

$$u = \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} \text{ .}$$

Demostrar que esta función es par.
Deducir la formula general:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1.2\cdots n} = \frac{\text{A}}{1.2.\cdots(n+1)} + \frac{\text{B}_1}{1.2.1.2\cdots(n-1)} + \frac{\text{B}_2}{1.2.3.4.1.2\cdots(n-3)} + \cdots\cdots$$

Valores particulares de $\text{A, B}_1\ \text{B}_2 \cdots\cdots .-$ Funciones de Bernoulli

III.- Integración de la ecuación diferencial siguiente: $\frac{dy}{dx} - ay = z^4$ por dos procedimientos distintos.

GRUPO 51

I.- Integración gráfica.- Propiedades importantes.- Métodos generales de integración gráfica.- Consecuencias.-

II.- Estudio de la función: $u = \left(1 - 2xz + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} .-$ Polinomios de Legendre.- Importancia de la fórmula: $(n+1)\text{X}_{n+1} - (2n+1)z\,\text{X}_n + n\text{X}_{n-1} = 0 .-$ Consecuencias.- Generalización de los polinomios de Legendre.

III.- Determinar la integral correspondiente a la ecuación diferencial siguiente:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^m$$

GRUPO 52

I.- Goniometría elíptica enlazada con la circular e hiperbólica.- Fórmulas correspondientes a la suma de argumentos.- Sus consecuencias.

II.- Estudio de la función $\Theta(z)$ de Jacobi.- Propiedades de dicha función.- Demostrar la igualdad siguiente:

$$\Theta(z+2ma)=e^{-m(2+ma)}\Theta(z)$$

Importancia de la expresión:

$$z=(2m+1)\pi\sqrt{-1}+(2m+1)a$$

Estudio de las cuatro funciones θ,.- Estudio de las funciones λ, μ, ν con la representación gráfica de las mismas.

III.- Integración de la ecuación entre derivadas parciales siguientes:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^m+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^m-z^m=0$$

☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼