Aplicación a la Mecánica

de la

Fórmula de L. Dirichlet

1900

Seguramente que una de las integrales más fecundas en aplicaciones es la integral de segunda especie de Euler, designada generalmente por la letra *gamma.*

Esta notable integral, no solo sirve para resolver problemas de la geometría general, sino que se enlaza con las funciones elípticas y series hipergeométricas, teniendo, en particular, importancia suma en las integrales múltiples, mediante la célebre fórmula de Dirichlet, la cual permite obtener, en muchos casos, el resultado apetecido directamente, sin necesidad de atender al pesado movimiento de los límites de cada una de las integrales componentes de la integral múltiple.

Vamos, pues, a presentar algunos ejemplos en corroboración de lo sentado anteriormente, y para ello haremos ver las ventajas que puede presentar la fórmula de Dirichlet, aplicada, en particular, a la Mecánica.

Generalmente en las obras de Cálculos o Análisis superior, se encuentra demostrada dicha fórmula para tres variables, resultando[1]:

$$\iiint x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz = \frac{a^p b^q c^r \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\alpha\beta\gamma\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)}$$

en el supuesto de que se tenga: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \leqq 1$

Empero este caso es particular de otro más general, correspondiente a lo que suele designarse bajo el nombre de hiper-espacio de *n* dimensiones, en el concepto de que entren *n* variables en la expresión siguiente:

$$\iiint \cdots\cdots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\cdots\cdots t^{s-1}dxdydz\cdots\cdots dt = \frac{a^p b^q c^r \cdots m^s}{\alpha\beta\gamma\cdots\sigma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{S}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\cdots\frac{S}{\sigma}\right)}$$

siendo:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}+\cdots\cdots+\left(\frac{t}{m}\right)^{\sigma} \geqq 1$$

[1] Véase nuestra obra de Cálculos

Con todo, no saliéndose del espacio ordinario, nos bastará la primera fórmula para el espacio de tres dimensiones, a la cual puede agregarse la que sigue para el espacio de dos dimensiones correspondiente a una integral doble, esto es:

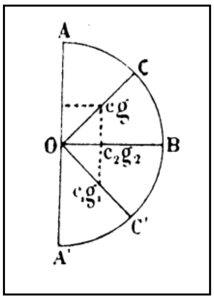
$$(2)\quad \int\int x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}$$

siendo:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} \leqq 1$$

Sin más preámbulos pasemos, pues, a las aplicaciones, tomando algunos problemas referentes a los centros de gravedad y momentos de inercia, como los más indicados cuando la figura o cuerpo se considera comprendido en los ejes positivos, conforme a los límites de las integrales que dan origen a las fórmulas (1) y (2).

PROBLEMA 1º Determinar el centro de gravedad de la superficie de círculo correspondiente al primer cuadrante, suponiendo su centro en el origen.



Según se desprende de la figura adjunta, debe determinarse el *c.g.* de AOBCA, y para ello podemos recordar las fórmulas generales:

$$(a)\quad x_1 = \frac{\int\int x\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} \qquad y_1 = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}$$

A fin de poder comparar el numerador de (*a*) con la fórmula (2), escribiremos:

$$\int\int x\,dx\,dy = \int\int x^{2-1}y^{1-1}dx\,dy$$

Además, como la ecuación de condición en este caso es: $\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2 = s$

inmediatamente se obtiene, según la precitada fórmula (2):

$$\int\int x\,dx\,dy = \int\int x^{2-1} y^{1-1} dx\,dy = \frac{r^2 r}{2.2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{r^3}{4.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{r^3}{3}$$

El denominador de (a) como expresión de la cuarta parte del círculo es $\frac{\pi r^2}{4}$; de cuyos valores resulta inmediatamente:

$$x_1 = \frac{r^3 : 2}{\pi r^2 : 4} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$$

Procediendo de un modo análogo al anterior, tendríamos:

$$y_1 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$$

Estas coordenadas determinan el punto *c.g.* sobre el eje de simetría OC.

Así también se tendría para el otro cuadrante A'OBC'A', considerado como primitivo el nuevo centro de gravedad $c_1 g_1$, bajo las mismas condiciones del primero; de suerte que uniendo por medio de una recta los dos centros de gravedad hallados, sin duda que en el punto donde ésta corte al radio de simetría, OB, del semicírculo, nos dará el centro de gravedad de este último, debiendo resultar:

$$\mathrm{O}c_2 g_2 = x_1 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$$

como se deduce sencillamente de la figura anterior.

Esta conclusión coincide como caso particular del centro de gravedad que se obtiene por los procedimientos ordinarios, cuando se trata de la superficie de un cuadrante de círculo, en el cual la masa específica de los diversos puntos es proporcional a la enésima potencia de su distancia al centro. En efecto, pues, la fórmula general que se obtiene en este caso es:

$$x_1 = \frac{n+2}{n+3}\frac{2r}{\pi}$$

de modo que al suponer r = 0, resulta:

$$x_1 = \frac{4r}{3\pi}$$

PROBLEMA 2º Determinar el centro de la superficie esférica comprendida en el ángulo triedro positivo, y estando el centro de la esfera en el origen de coordenadas.
Formulas generales:

$$(b) \quad x_1 = \frac{\int x\,ds}{s}, \quad y_1 = \frac{\int y\,ds}{s}, \quad z_1 = \frac{\int z\,ds}{s}$$

s, representa la parte de superficie esférica comprendida en el ángulo triedro supuesto.

Ahora bien, al suponer un punto de la superficie esférica y el radio correspondiente, podemos designar por ω, el ángulo que éste forma con el eje *x*, y en su virtud escribir:

$$x = r\cos\omega, \qquad dydz = ds\cos\omega$$

Así, pues, al tomar el numerador de la fórmula (*b*), se tiene:

$$\int x\,ds = \int\int r\cos\omega \frac{dz\,dy}{\cos\omega} = r\int\int dz\,dy$$

luego por consideraciones análogas a las del problema anterior según la fórmula (2), se halla inmediatamente:

$$\int x\,ds = r\int\int dz\,dy = r\,\frac{r^2}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{r^3}{4}\pi$$

Además, como

$$s = \frac{4\pi r^2}{8},$$

resulta:

$$x_1 = \frac{\frac{r^3\pi}{4}}{\frac{4\pi r^2}{8}} = \frac{r}{2}.$$

De un modo análogo tendríamos para y_1 y x_1, la misma fórmula, esto es:

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{r}{2}$$

PROBLEMA 3º Centro de gravedad del volumen del elipsoide comprendido en el primer ángulo triedro, estando el centro del mismo en el origen de coordenadas.

Fórmulas generales

$$(c) \quad x_1 = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}, \qquad y_1 = \frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}, \qquad z_1 = \frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}$$

En este caso la ecuación de condición es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = s$$

Al aplicar la fórmula (1), en el numerador de (c), se obtiene:

$$\iiint x\,dx\,dy\,dz = \frac{a^2bc}{8}\,\frac{\Gamma(1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{a^2bc}{16}\pi$$

Además el denominador de (c), por representar la octava parte del volumen del elipsoide, da:

$$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{\pi abc}{6}$$

luego

$$x_1 = \frac{\dfrac{a^2bc}{16}}{\dfrac{\pi abc}{6}} = \frac{3}{8}a$$

De un modo análogo se obtendría:

$$y_1 = \frac{3}{8}b, \qquad z_1 = \frac{3}{8}c$$

Si el elipsoide se transformara en una esfera, resultaría:

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{3}{8}r$$

siendo r el radio de la misma.

De manera que si consideramos los cuatro ángulos triedros correspondientes a la semiesfera, situada a un lado del plano *yz*, los centros de gravedad correspondientes a los cuatro ángulos triedros, determinan un plano paralelo al *yz*, que pasará a la distancia $\frac{3}{8}r$ del origen, cortando en su virtud al eje *x*, que lo es de simetría, a la misma distancia; resultando en definitiva como centro de gravedad dicha semiesfera: $x_1 = \frac{3}{8}r$. En fin para terminar, presentaremos una aplicación a los momentos de inercia.

PROBLEMA 4º Momento de inercia del elipsoide, referido al eje *z*.

Fórmula General

$$\mathrm{A}_z = \rho \int dx \int dy \int dz \left(x^2 + y^2\right)$$

Concretándonos a la primera integral múltiple, y atendiendo a todos los datos precedentes, según la fórmula (1), se tiene:

$$\iiint x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{a^3 b\, c}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)} = \frac{a^3 b\, c}{8} \frac{\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{120}\pi a^3 b\, c$$

Para los ocho ángulos triedros, resulta:

$$\frac{32}{120}\pi a^3 b\, c = \frac{4}{15}\pi a^3 b\, c$$

Respecto a la otra integral: $\iiint y^2 dx\, dy\, dz$, tendríamos de un modo análogo: $\frac{4}{15}\pi a\, b^3 c$

Sumando, pues, se obtiene:

$$\mathrm{A}_z = \rho \int dx \int dy \int dz \left(x^2 + y^2\right) = \frac{4\rho\pi abc}{15}\left(a^2 + b^2\right)$$

Ahora bien, si designamos por M la masa total, siendo ρ la masa específica, se halla:

$$\mathrm{M} = \frac{4}{3}\pi abc\rho$$

de suerte que sustituyendo este valor en la igualdad anterior, se obtiene por fin:

$$\mathrm{A_z} = \frac{\mathrm{M}}{5}\left(b^2 + c^2\right)$$

Como se puede comprender con la misma facilidad, obtendríamos las expresiones:

$$\mathrm{A_x} = \frac{\mathrm{M}}{5}\left(b^2 + c^2\right), \qquad \mathrm{A_y} = \frac{\mathrm{M}}{5}\left(a^2 + c^2\right)$$

Si el elipsoide se transformara en una esfera, resultaría inmediatamente:

$$\mathrm{A_x} = \mathrm{A_y} = \mathrm{A_z} = \frac{2}{5}\mathrm{M}a^2$$

siendo *a* el radio de dicha esfera.

Creemos que no hacen falta nuevos problemas, para quedar completamente demostrada la importancia que debe concederse a las integrales eulerianas, y por ende a la fórmula de Dirichlet, habiendo llenado así nuestro propósito al escribir el presente articulo.

Barcelona a 15 de Mayo de 1900
Lauro Clariana Ricart