Integral de la Ecuación Diferencial:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} + z^2y = 0$$

1900

Entre la mucha variedad de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que pueden presentarse de alguna utilidad en el campo vasto de las matemáticas aplicadas, la que encabeza este breve trabajo es una de ellas, y en su virtud creemos conveniente dar a conocer un procedimiento sencillo que puede seguirse para obtener la integral expresada en funciones hiperbólicas, como síntesis de series que las representan.

A este fin, supondremos que la función ***y*** venga dada por la expresión siguiente en forma de serie:

$$y=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+1}+\cdots\right] \quad (1)$$

Tómese la primera y segunda derivada de (1), y tendremos:

$$\frac{dy}{dz}=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[a_1+2a_2z+\cdots na_nz^{n-1}+(n+1)a_{n+1}z^n+(n+2)a_{n+2}z^{n+1}+\cdots\right]-\left[a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z.$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[2a_2+\cdots+n(n-1)a_nz^{n-2}+(n+1)na_{n+1}z^{n-1}+(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n+\cdots\right]-$$

$$-\left[a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z+\left[a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z^2-$$

$$-\left[a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}-\left[a_1+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z$$

Al sustituir todos los valores que preceden en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy^2}{dz^2}+2z\frac{dy}{dz}+z^2y=0$$

se obtiene el desarrollo que a continuación se expresa:

$$e^{-\frac{z^2}{2}}\left[2a_2+\cdots+n(n-1)a_nz^{n-2}+(n+1)na_{n+1}z^{n-1}+(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n+\cdots\right]-$$

$$-\left[a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z+\left[a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z^2-$$

$$\left[a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}-\left[a_1+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}z+$$

$$2z\left\{e^{-\frac{z^2}{2}}\left(a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+(n+1)a_{n+1}z^n+\cdots\right)+\left(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots\right)e^{-\frac{z^2}{2}}\times-z\right\}+$$

$$+z^2\left[a_0+a_1z+\cdots+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots\right]e^{-\frac{z^2}{2}}=0$$

Según los principios de Descartes, al tomar el coeficiente del término en z^n debe resultar:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n+a_{n-2}-a_n-na_n+2na_n-2a_{n+2}+a_{n-2}=0$$

o sea:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n=0$$

Supóngase en esta fórmula general valores pares o impares para *n*, y con ello tendremos dos desarrollos en forma de series, que irán a resolverse respectivamente en funciones hiperbólicas. En efecto, se tiene:

$$a_2=a_0\frac{1}{1.2} \qquad a_3=a_1\frac{1}{2.3}$$

$$a_4=a_2\frac{1}{4.3}=a_0\frac{1}{1.2.3.4} \qquad a_5=a_3\frac{1}{5.4}=a_1\frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$$a_6=a_4\frac{1}{6.5}=a_0\frac{1}{1.2.3.4.5.6} \qquad a_7=a_5\frac{1}{7.6}=a_1\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$$

Así pues, al tomar por fin la igualdad (1), después de sustituir los valores que acabamos de hallar para lo coeficientes, se obtiene:

$$y=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[a_0+a_1z+a_0\frac{z^2}{1.2}+a_1\frac{z^3}{1.2.3}+a_0\frac{z^4}{1.2.3.4}+a_1\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]$$

o sea

$$y=e^{-\frac{z^2}{2}}\left\{a_0\left(1+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\cdots\right)+a_1\left(z+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right)\right\}$$

Pero por el análisis ordinario se sabe que:

$$Chz=1+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

$$Shz=z+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\cdots$$

De suerte que la integral pedida será:

$$y=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[a_0Chz+a_1Shz\right]$$

Y si por fin representamos a_0 y a_1 por C_0 y C_1 puesto que juegan el papel de constantes arbitrarias, tendremos que la integral general correspondiente a la ecuación diferencial de segundo orden dada, vendrá expresada por:

$$y=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[C.Chz+C_1.Shz.\right]$$

Barcelona a 15 de Junio de 1900
Lauro Clariana Ricart