Cuestionario de Ejercicios Prácticos

correspondiente a la asignatura de

Elementos de Cálculo Infinitesimal

1900

GRUPO 1º

I.- Determinar la primera diferencial de la función: $y = \dfrac{1+3x-3x^2}{3x^3-9x^2+9x-3}$ por dos procedimientos distintos.

Resultado: $dy = \dfrac{x^2-2}{(x-1)^4}dx$

II.- Determinar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{xdx}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2-a^2}{b^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}$

GRUPO 2º

I.- Dada la función: $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$ determinar la primera diferencial, aplicando los logaritmos.

Resultado: $dy = \dfrac{(x-2)^8}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}\left[x^2-7x+1\right]dx$

II.- Resolver la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^{\frac{1}{2}}+(x+b)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $\dfrac{2\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]}{3(a-b)} + \mathrm{C}$

GRUPO 3º

I.- Hallar la diferencial primera de la función: $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$

Resultado: $dy = \dfrac{da}{\cos^4 x}$

II.- Obtener la expresión de la integral: $\int \frac{dx}{x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x}+\mathrm{C}$

GRUPO 4º

I.- Determinar la diferencial primera de la función: $y = x\cos\left(lx-\frac{\pi}{4}\right)$

Resultado: $dy = \sqrt{2}\cos lx\, dx$

II.- Dada la integral: $\int \left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$, obtener la función que le corresponde.

Resultado: $\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\mathrm{C}$

GRUPO 5º

I.- Determinar la primera diferencial de la función siguiente: $y = l\,\frac{ae^x-\beta}{ae^x+\beta}$

Resultado: $dy = \frac{2a\beta}{a^2e^x-\beta^2e^{-x}}dx$

II.- Desarrollar la integral: $\int \frac{dx}{a\cos^2 x+b\operatorname{sen}^2 x}$

Resultado: $(ab)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}x\right]+\mathrm{C}$

GRUPO 6º

I.- Determinar la diferencial primera de: $y = \mathrm{T}h^2x+\mathrm{C}th^2x$

Resultado: $dy = -16\,\frac{\mathrm{C}h.2x}{\mathrm{S}h^3.2x}dx$

II.- Desarrollo de la integral siguiente: $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

Resultado: $\frac{1}{4}\left\{\frac{\operatorname{sen} 6x}{6}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+x\right\}+\mathrm{C}$

GRUPO 7º

I.- Diferencial de la siguiente expresión: $y = x - \mathrm{T}h.x - \frac{1}{3}\mathrm{T}h^3.x$

Resultado: $dy = Th^4 x\, dx$

II.- Desarrollo de la integral: $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

Resultado: $\frac{x \operatorname{arcsen} x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} + l\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}$

GRUPO 8º

I.- Determinar la diferencial de la función: $y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

Resultado: $dy = \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$

II.- Obtener el desarrollo de la integral siguiente: $\int x.\operatorname{arcsen}\left(\frac{2a-x}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

Resultado: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\left(\frac{2a-x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2a} - \frac{x}{8}\left(4a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}$

GRUPO 9º

I.- Determinar la diferencial de: $y = Arg.Th.\sqrt{\frac{Ch.x-1}{Ch.x+1}}$

Resultado: $dy = \frac{dx}{2}$

II.- Hallar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{e^{a.\text{arctg}\,x}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,x\,dx$

Resultado: $\displaystyle\frac{e^{a.\text{arctg}\,x}\left(xa-1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\text{C}$

GRUPO 10º

I.- Hallar la diferencial de $\displaystyle y = l\,\frac{1+\sqrt{\text{sen}\,x}}{1-\sqrt{\text{sen}\,x}}+2\,\text{arctg}\,\sqrt{\text{sen}\,x}$

Resultado: $dy = 2\,\sqrt{2\cos\sec 2x \sec x}\;dx$

II.- Determinar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{\left(x^2-x+2\right)}{x^4-5x^2+4}\,dx$

Resultado: $\displaystyle\frac{1}{3}\,l\,\frac{\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)}{\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)}+\text{C}$

GRUPO 11º

I.- Diferencia la expresión: $y = \text{arcsen}\left(Th\,\sqrt{1+x}\right)$

Resultado: $\displaystyle dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}\;Ch\,\sqrt{1+x}}$

II.- Hallar la integral que a continuación se expresa: $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+6x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\,dx$

Resultado: $\displaystyle l\,\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}+\text{C}$

GRUPO 12º

I.- Determinar el verdadero valor de: $\dfrac{1-(m+1)x^{m}+mx^{m+1}}{(1-x)^{2}}$ para $x=1$

Resultado: $\dfrac{m(m+1)}{2}$

II.-. Por dos procedimientos distintos, determinar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{x^{2}dx}{(x+1)(x+2)^{2}}$

Resultado: $\dfrac{4}{x+2}+l(x+1)+\mathrm{C}$

GRUPO 13º

I.- Determinar el verdadero valor de: $y=\dfrac{1}{x^{2}}-\cot^{2}x$ para $x=i$

Resultado: $\dfrac{2}{3}$

II.- Por coeficientes indeterminados hallar el desarrollo correspondiente a la integral:

$$\int \frac{3x^{2}+x-2}{(x-1)^{3}(x^{2}+1)}dx$$

Resultado: $\dfrac{3}{4}l\dfrac{x^{2}+1}{(x-1)^{2}}-\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2(x-1)^{2}}-\dfrac{5}{2(x-1)}+\mathrm{C}$

GRUPO 14º

I.- Dada la función siguiente: $y=(\cos ax)^{(\operatorname{cossec} bx)^{2}}$ determinar el valor de y para cuando $x=i$.

Resultado: $yi=e^{-\frac{a^{2}}{2b^{2}}}$

II.- Determinar el desarrollo de la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{5}+x^{4}+2x^{3}+2x^{2}+x+1}$

Resultado: $\dfrac{1}{4}l\dfrac{x+1}{(x^{2}+1)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x+1}{4(x^{2}+1)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\mathrm{C}$

GRUPO 15º

I.- Determinar el verdadero valor de x^x en el caso de ser $x = i$.- Consecuencias importantes para la fórmula de L. Dirichlet.

Resultado: 1

II.- Determinar la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$

Resultado: $\displaystyle\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\, l\, \frac{x^2+2^{\frac{1}{2}}x+1}{x^2-2^{\frac{1}{2}}x+1}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{2^{\frac{1}{2}}x}{1-x^2}+\mathrm{C}$

GRUPO 16º

I.- Deducir *dy* de la ecuación implícita: $xly - ylx = 0$

Resultado: $dy = \dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{lx-1}{ly-1}dx$

II.- Determinar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{1/2}}$.

Resultado: $2(x-1)^{\frac{1}{2}}\left[x+\frac{3}{5}(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{7}\right]+\mathrm{C}$

GRUPO 17º

I.- Dada la función implícita: $e^{3x^2-y^2}+\operatorname{sen}(ax+by)=0$ deducir dy

Resultado: $dy = \dfrac{6x\operatorname{tg}(ax+by)-a}{2y\operatorname{tg}(ax+by)+b}dx$

II.- Deducir la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $a^{-\frac{1}{2}}\, l\, \dfrac{(a+bx)^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C}$

GRUPO 18º

I.- Determinar *dy* de la función implícita: $1+xy=l\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)$

Resultado: $dy=-\dfrac{y}{x}dx$

II.- Hallar la integral siguiente: $\displaystyle\int (a+x)^{\frac{2}{3}}x^3dx$

Resultado: $3(a+x)^{\frac{5}{3}}\left[\dfrac{(a+x)^3}{14}-\dfrac{3a(a+x)^2}{11}+\dfrac{3a^2(a+x)}{8}-\dfrac{a^3}{5}\right]+\mathrm{C}$

GRUPO 19º

I.- Dada la función implícita siguiente: $y\operatorname{sen}x-\cos(x-y)=0$ determinar la diferencial de la función.

Resultado: $dy=\dfrac{1-2y\operatorname{sen}y+y^2}{1-\cos y-y\operatorname{sen}y}dx$

II.- Resolver la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Resultado: $\sqrt{1+x^2}\left(\dfrac{x^5}{6}-\dfrac{5x^3}{6.4}+\dfrac{5.3.x}{6.4.2}\right)-\dfrac{5.3}{6.4.2}\, l\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]+\mathrm{C}$

GRUPO 20º

I.- Dada la siguiente igualdad: $\operatorname{arcsen}\left(\frac{y^3+x^3-3x^2y}{y^3+x^3-3xy^2}\right)^{\frac{1}{3}}=a$ determinar la diferencial de *y*.

Resultado: $dy=\frac{y}{x}dx$

II.- Desarrollo de la integral que sigue: $\int \frac{x^4dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Resultado: $\frac{x\left(3-x^2\right)}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}x+\mathrm{C}$

GRUPO 21º

I.- Determinar la diferencial de la función siguiente sin resolver bajo la forma implícita:

$$y^3-3y\operatorname{arcsen}x+x^3=0$$

Resultado: $dy=3y\frac{y-x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2y^3-x^3\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx$

II.- Determinar la integral: $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $2^{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{2^{\frac{1}{2}}x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C}$

GRUPO 22º

I.- En la igualdad siguiente: $y\operatorname{arctg}x-y^2+x^2=0$ determinar el valor de *dy*.

Resultado: $dy=\frac{y\left(y+2x+2x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)\left(1+x^2\right)}dx$

II.- Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Resultado: $2^{-\frac{1}{2}}\, l\, \dfrac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{C}$

GRUPO 23º

I.- Dado el sistema de las ecuaciones implícitas, tales como: $\left\{\begin{array}{l} x^3 + y^2 - 3z + a = 0 \\ z^2 - 2y^2 - x + b = 0 \end{array}\right.$ en el concepto de que *y* y *z* sean funciones de *x*, determinar sus primeras derivadas.

Resultado: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\left(1-2x^2 z\right)}{4y(z-3)}$, $\quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1-6x^2}{2(z-3)}$

II.- Hallar la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ valiéndose de las circulares.

Resultado: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \mathrm{C}$

GRUPO 24º

I.- Determinar las derivadas $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ del sistema: $\left.\begin{array}{r} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

Resultado: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-x}{y-x}$, $\quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x-y}{y-z}$

II.- Demostrar la siguiente igualdad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}}}\, l \left(\frac{\mathrm{B}}{2\sqrt{\mathrm{C}}} + \sqrt{\mathrm{C}}x + \sqrt{\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2} \right) + \mathrm{C}_1$$

GRUPO 25º

I.- Dado el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{r} u^2+x^2+y^2+z^2=a^2 \\ l(xy)+\dfrac{y}{z}=b \\ l\left(\dfrac{z}{x}\right)+zx=c \end{array}\right\}$ en el concepto de que *u, y, z* sean funciones de *x*: determinar las tres primeras derivadas: $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

Resultado: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-x)}{x(x+y)}$, $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(1-xz)}{x(1+xz)}$, $\quad \dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\left[\dfrac{y^2}{x}\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{z^2}{x}\dfrac{xz-1}{xz+1}-x\right]$

II.- Demostrar la siguiente igualdad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}}}\,Arg.Sh\frac{\mathrm{B}+2\mathrm{Cx}}{\sqrt{4\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}}+\mathrm{C}$$

GRUPO 26º

I.- Diferencial total de la expresión: $u=\operatorname{arcsen}\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $du=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}x}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}(ydx-xdy)$

II.- Hallar la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+2ax\cos\varphi+x^2}}$

Resultado: $l\left(a\cos\varphi+x+\sqrt{a^2+2ax\cos\varphi+x^2}\right)+\mathrm{C}$

GRUPO 27º

I.- Determinar *du* de la función: $u = l\,\dfrac{x+\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x-\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $du = \dfrac{2\left(ydx - xdy\right)}{y\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

II.- Determinación de la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$ según sea $1-x=u,\ u=\dfrac{1}{t},\ x=\cos y.$

Resultado: $-\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\mathrm{C}$

GRUPO 28º

I.- Determinar *du* de la función siguiente: $u = \arccos\dfrac{1-xy}{\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Resultado: $du = \dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{1+y^2}$

II.- Hallar la integral que sigue: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

Resultado: $-\sqrt{\dfrac{1+x}{x-1}}+\mathrm{C}$

GRUPO 29º

I.- Dada la función siguiente:

$u = \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} z + \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z + \cos x \cos y \cos z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos z$, determinar *du*.

Resultado: $du = \operatorname{sen}\left(x+y-z\right)\left(dz-dx-dy\right)$

II.- Determinar la integral: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ siendo $x = Chy$.

Resultado: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \mathrm{C}$

GRUPO 30º

I.- Probar que la función y de x definida por la ecuación: $\operatorname{arccos}\frac{y}{2} = l\left(\frac{x}{b}\right)^n$ verifica la ecuación diferencial lineal siguiente:

$$x^2\,\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)\,x\,\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2n^2\,\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

II.- Determinar las integrales que a continuación se expresan:

$$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx, \qquad \int e^{ax}\operatorname{sen}^n bx\,dx$$

Resultados:
$$\begin{cases} \dfrac{a\cos bx + nb\operatorname{sen} bx}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx + \dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2b^2}b^2\displaystyle\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx \\[2ex] \dfrac{a\operatorname{sen} bx - nb\cos bx}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\operatorname{sen}^{n-1}bx + \dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2b^2}b^2\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}^{n-2}bx\,dx \end{cases}$$

GRUPO 31º

I.- Conocida la función: $y = \frac{x}{e^{x-1}}$ desarrollarla bajo forma de serie.

Resultado: $(e^x - 1)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots\cdots + e^x y = 0$

II.- Desarrollo de las integrales siguientes:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} x\, dx, \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen}^2 x\, dx, \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen}^3 x\, dx \cdots\cdots$$

$$\textit{Resultados}: \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2+1}\left(a \operatorname{sen} x - \cos x\right) + \mathrm{C}, \qquad \dfrac{e^{ax}\operatorname{sen} x}{4+a^2}\left(a \operatorname{sen} x - 2\cos x\right) + \dfrac{2}{4+a^2}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}, \\ \dfrac{e^{ax}\operatorname{sen}^2 x}{9+a^2}\left(a \operatorname{sen} x - 3\cos x\right) + \dfrac{6\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}}{\left(1+a^2\right)\left(9+a^2\right)}\left(a \operatorname{sen} x - \cos x\right) + \mathrm{C} \end{cases}$$

GRUPO 32º

I.- Determinar la derivada enésima de la función siguiente: e^{cx^2}

Resultado: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = e^{cx^2}\left[c^n (2x)^n + n(n-1)c^{n-1}(2x)^{n-2} + \cdots\cdots\right]$

II.- Desarrollo de las integrales siguientes:

$$\int e^{ax} \cos x\, dx, \qquad \int e^{ax} \cos^2 x\, dx, \qquad \int e^{ax} \cos^3 x\, dx \cdots\cdots$$

$$\textit{Resultados}: \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2+1}\left(a \cos x + \operatorname{sen} x\right) + \mathrm{C}, \qquad \dfrac{a\cos x + 2\operatorname{sen} x}{a^2+4} e^{ax}\cos x + \dfrac{2e^{ax}}{a\left(4+a^2\right)} + \mathrm{C} \\ \dfrac{e^{ax}\cos^2 x}{9+a^2}\left(a \cos x + 3\operatorname{sen} x\right) + \dfrac{6\mathrm{e}^{ax}}{\left(1+a^2\right)\left(9+a^2\right)}\left(a \cos x + \operatorname{sen} x\right) + \mathrm{C} \end{cases}$$

GRUPO 33

I.- Determinar las derivadas enésimas de las funciones: $y = \cos\left(x^2\right) \quad y = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$

$$\textit{Resultados}: \begin{cases} \dfrac{d^n \cos\left(x^2\right)}{dx^n} = (2x)^n \cos\left(x^2 + \dfrac{n\pi}{2}\right) + n\,(n-1)(2x)^{n-2}\cos\left(x^2 + \dfrac{n-1}{2}\pi\right) + \cdots\cdots \\ \dfrac{d^n \operatorname{sen}\left(x^2\right)}{dx^n} = (2x)^n \operatorname{sen}\left(x^2 + \dfrac{n\pi}{2}\right) + n\,(n-1)(2x)^{n-2}\operatorname{sen}\left(x^2 + \dfrac{n-1}{2}\pi\right) + \cdots\cdots \end{cases}$$

II.- Hallar en función hiperbólica la integral siguiente: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$

Resultado: $\dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha} Arg.Th\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + \mathrm{C}$

GRUPO 34

I.- Dada la función siguiente: $y = \dfrac{x}{a^2 + b^2x^2}$ determinar su diferencial enésima, según n sea par o impar

Resultado:
$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{x}{a^2+b^2x^2} = b^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}} n!\,\dfrac{\operatorname{sen}\left[(n+1)\operatorname{arctg}\dfrac{bx}{a}\right]}{\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\[2ex] \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{x}{a^2+b^2x^2} = b^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} n!\,\dfrac{\cos\left[(n+1)\operatorname{arctg}\dfrac{bx}{a}\right]}{\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \end{cases}$$

II.- Determinar los diferentes valores que pueden resultar en la integral:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} \quad \text{según} \quad a \gtreqless b$$

Resultados:
$$\begin{cases} a > b & \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x\right) + \mathrm{C} \\[2ex] a < b & \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\,\dfrac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x} + \mathrm{C} \\[2ex] a = b & \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x + \mathrm{C} \end{cases}$$

GRUPO 35

I.- Determinar la derivada de primero y segundo orden de la función que a continuación se expresa: $u = \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x_2 + y^2}}$

Resultados: $\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2y^2 x}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2yx^2}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{4xy\left(x^4 - x^2 y^2 + y^4\right)}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{6x^2 y^4 + 4x^4 y^2 - 2x^6}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$

II.- Desarrollo de la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$

Resultado:

$$-\frac{b\,\mathrm{sen}\,x}{(n-1)\left(a^2 - b^2\right)(a + b\cos x)^{n-5}} - \frac{n-2}{(n-1)\left(a^2 - b^2\right)}\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)\left(a^2 - b^2\right)}\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}}$$

GRUPO 36

I.- Determinar la derivada del orden $m+n$ respecto de x e y de la función: $u = x^a y^b$

Resultado: $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)x^{a-m}\ b\ (b-1)(b-2)\cdots(b-n+1)y^{b-n}$

II.- Dada la ecuación diferencial siguiente: $du = \dfrac{dx}{\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}} + adx + 2bydy$ encontrar la expresión de u.

Resultado: $u = by^2 + ax + l\,\mathbf{C}\left[x + \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

GRUPO 37º

I.- Determinar la derivada del orden *m+n* con respecto a *x* e *y* de la función: $u = \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + \gamma)$

Resultado: $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \alpha^m \beta^n \operatorname{sen}\left(\alpha x + \beta y + \gamma + \frac{(m+n)\pi}{2}\right)$

II.- Dada la ecuación diferencial siguiente: $du = \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{dy}{y} - \frac{xdy}{y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ determinar: $u = l\,\mathrm{C}\left[x + \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

GRUPO 38

I.- Dada la función implícita: $y^5 - 5axy + x^5 = 0$ determinar la segunda diferencial de y.

Resultado: $d^2 y = -\frac{6axy\left(x^3y^3 + 2a^2\right)}{\left(y^4 - ax\right)^3} dx^2$

II.- Dada la siguiente ecuación diferencial: $du = (\operatorname{sen} y + y \cos x)dx + (\operatorname{sen} x + x \cos y)dy$ determinar su integral.

Resultado: $u = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \mathrm{C}$

GRUPO 39

I.- Determinar las dos primeras derivadas de la función: $4y^3 - 3y + \operatorname{sen} x = 0$

Resultado: $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{3(\operatorname{sen} x - 2y)}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12y^3 \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen} x\left(2 + \operatorname{sen}^2 x\right) - 6y^2\left(\operatorname{sen}^2 x + 1\right)}{9(2y - \operatorname{sen} x)^3}$

II.- Dada la ecuación diferencial: $du = \frac{ydx}{a-z} + \frac{xdy}{a-z} + \frac{xydz}{(a-z)^2}$ encontrar la integral.

Resultado: $u = \frac{xy}{a-z} + \mathrm{C}$

GRUPO 40º

I.- Dada la ecuación del elipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ determinar alguna de sus derivadas.

Resultados:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4\left(b^2-y^2\right)}{a^2b^2z^3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4\left(a^2-x^2\right)}{a^2b^2z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$$

II.- Determinar el valor de la integral limitada siguiente: $\int_i^I \frac{z^2dz}{\left(1+z^1\right)^5}$

Resultado: $\frac{1}{2}\frac{5.3.1}{6.4.2}\frac{\pi}{2}$

GRUPO 41

I.- Dada la función: $z^2+xy^2-x=0$ aplicar la expresión siguiente: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial z\partial y}\right)^2$

Resultado: $\frac{4}{27z^4}$

II.- Determinar la integral limitada siguiente: $\int_i^I \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+r^2x^2\right)}$

Resultado: $\frac{\pi}{2}\frac{r}{1+r}$

GRUPO 42

I.- Eliminación de *m* en la siguiente función: $(a+mb)\left(x^2-my^2\right)=mc^2$

Resultado: $axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(bx^2-ay^2-c^2\right)\frac{dy}{dx}-bxy=0$

II.- Demostrar la igualdad que a continuación se expresa:

$$\int_i^I \frac{\operatorname{arctg} r\,x}{x\left(1+x^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}l\left(1+r\right)$$

GRUPO 43º

I.- Eliminar los parámetros de la ecuación correspondiente a la parábola:

$$y^2 - 2axy + a^2x^2 + 2by + 2cx + c = 0$$

Resultado: $5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} = 0$

II.- Fórmula de Gauss, partiendo de: $f(m,x) = \int_i^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}dt$

Resultado: $\Gamma(x) = \frac{m^x 1.2.3.4.\cdots m}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

GRUPO 44º

I.- Eliminar todos los parámetros de la ecuación: $y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

Resultado: $40\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} + 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 \frac{d^5y}{dx^5} = 0$

II.- Determinar el siguiente valor: $\int_i^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_i^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Resultado: $\frac{\pi}{4}$

GRUPO 45º

I.- Eliminación de las funciones arbitrarias en la expresión: $z = \varphi(ay+bx)\psi(ay-bx)$

Resultado: $a^2\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] - b^2\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = 0$

II.- Determinación de la serie: $l\Gamma(x) = -Cx - lx + \frac{1}{2}S_2x^2 - \frac{1}{3}S_3x^3 + \cdots\cdots$ partiendo de la fórmula de Gauss: $\Gamma(x) = \frac{m^x 1.2.3.\cdots m}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

GRUPO 46

I,. Cambiar la variable independiente *x* en *t* en la función:

$$\mathrm{V} = \left(a^2 + x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} \text{ siendo } x = \frac{a}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

Resultado: $\mathrm{V} = \frac{d^2y}{dt^2}$

II.- Determinar la igualdad siguiente: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ por medio de la fórmula de Gauss.

GRUPO 47º

I.- Cambiar la variable independiente *x* en *t* en la función siguiente:

$$(a+x)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3(a+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + by = 0 \text{ siendo } a + x = e^t$$

Resultado: $\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0$

II.- Demostrar la igualdad siguiente: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}$ partiendo de la fórmula de Gauss y sabiendo además que: $\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$

GRUPO 48º

I.- Tomar *t* por variable independiente en la función:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx}by = 0 \text{ siendo } x = e^t$$

Resultado: $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$

II.- Determinación de la constante de Euler, según la fórmula general:

$$1 - C = l\frac{3}{2} + (S_3 - 1)\frac{1}{3.2^2} + (S_5 - 1)\frac{1}{5.2^4} + \cdots\cdots \text{ siendo } S_3 = 1{,}2020569 \text{ , } S_5 = 1{,}0369278 \text{ ,}$$

Resultado: $C = 0{,}5772\cdots$

GRUPO 49º

I.- Cambiar la variable independiente *x* en *t* en la función siguiente:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \text{ siendo } x=\cos t$$

Resultado: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$

II.- Determinar la igualdad que a continuación se expresa:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

en el supuesto de que: $B(p,p)=2\displaystyle\int_i^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$ y además $\dfrac{1}{2}-x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$

GRUPO 50º

I.- Cambiar la variable independiente *x* en *t, en la expresión:*

$$\left(1-x^2\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{1-x}=0 \text{ siendo } x=Th.t$$

Resultado: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+ay\left(e^{2t}+1\right)=0$

II.- Determinar la integral:

$$\int_i^I\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(t+1)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \text{ siendo } t+1=z \text{ y } z=\frac{1}{u}$$

GRUPO 51º

I.- Transformar la ecuación: $(a+x)^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\dfrac{dy}{dx}+by=0$ en otra en que *t* sea la variable independiente siendo: $t=l.(a+x)$

Resultado: $\dfrac{d^3y}{dt^3}+by=0$

II.- Determinar la integral: $\displaystyle\int_i^I \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ siendo $x=\dfrac{1}{t}$

Resultado: $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$

GRUPO 52º

I.- Tomar *t* por variable independiente en la expresión:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0 \text{ siendo } x^2=4t$$

Resultado: $t\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+y=0$

II.- Integrales de Fresnel, partiendo de: $\displaystyle\int_i^I e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}}$

Resultado: $\begin{cases}\displaystyle\int_i^I \cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ \displaystyle\int_i^I \operatorname{sen} x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{cases}$

GRUPO 53º

I.- Transformar la siguiente expresión: $\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ en otra en que y sea la variable independiente.

Resultado. $\frac{d^2x}{dy^2} + x - e^y = 0$

II.- Determinar la igualdad siguiente:

$$\int_i^I \frac{\operatorname{sen} bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}$$

hallándose n comprendida entre 1 y 2. Fórmulas fundamentales:

$$\Gamma(n) = \int_i^I e^{-x}x^{n-1}dx, \qquad \int_i^I \operatorname{sen} b\,x\,e^{-tx}dx = \frac{b}{t^2+b^2}, \qquad \frac{t^2}{b^2} = \theta, \qquad \int_i^I \frac{\theta^{\frac{n}{2}-1}}{1+\theta}\,d\theta = \frac{n}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}$$

GRUPO 54º

I.- Tomar la y como variable independiente en la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{mx}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + n\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Resultado: $\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{mx}{y^2} + n\frac{dy}{dx} = 0$

II.- Transformación de la integral triple: $\iiint dxdydz$ en coordenadas polares.

Resultado: $\frac{1}{3}\iint r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$

GRUPO 55º

I.- Cambiar las variables *x* e *y* en *u* y *t* en la ecuación: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ siendo las fórmulas de transformación $x + y = u,\ x - y = t$.

Resultado: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} = 0$

II.- Aplicación de la fórmula de L. Dirichlet al volumen del elipsoide:

Resultado: $\frac{4}{3}\pi abc$

GRUPO 56º

I.- Cambiar las variables *x* e *y* de la función: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en *r* siendo *u* función de *r* y estando ligadas las variables independientes por la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Resultado: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r} = 0$

II.- Aplicación de la fórmula de L. Dirichlet al momento de inercia referido al eje *z*.

Resultado: $\mathrm{A}_2 = \frac{M}{5}\left(a^2 + b^2\right)$

GRUPO 57º

I.- Pasar de las coordenadas cartesianas a las polares, en la función: $\mathrm{V} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + \frac{dy}{dx}y}$

Resultado: $\mathrm{V} = r\frac{d\theta}{dr}$

II.- Aplicación de la fórmula de L. Dirichlet a la determinación del centro de gravedad del elipsoide comprendido en el primer ángulo triedro, estando el centro en el origen y siendo los ejes rectangulares.

Resultado: $x_1 = \frac{3}{8}a, \quad y_1 = \frac{3}{8}b, \quad z_1 = \frac{3}{8}c$

GRUPO 58º

I.- Cambiar las variables independientes en la expresión:

$$\mathrm{W}=\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}\qquad \text{siendo}\qquad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Resultado: $\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^x}}$

II.- Area de la evoluta de una elipse, dada por la ecuación:

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\qquad \text{siendo}\qquad \begin{cases} x=\dfrac{c^2}{a}\,\mathrm{sen}^3\,\varphi \\ y=\dfrac{c^2}{b}\cos^3\varphi \end{cases}$$

Resultado: $\dfrac{3}{8}\pi\dfrac{c^4}{ab}$

GRUPO 59º

I.- Tomar r y θ por variables en la función:

$$\mathrm{V}=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\qquad \text{siendo}\qquad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Resultado: $\dfrac{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}$

II.- Área de una rama de lemniscata, cuya ecuación es: $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

Resultado: $\dfrac{a^2}{2}$

GRUPO 60º

I.- Transformar la expresión: $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en coordenadas polares.

Resultado: $\dfrac{du}{d\theta}$

II.- Volumen engendrado por el cicloide, dada por las ecuaciones:

$$x = a(u - \operatorname{sen} u) \qquad y = a(1 - \cos u)$$

en el concepto de girar alrededor del eje *x*.

Resultado: $\mathrm{V} = 5a^3\pi^2$

GRUPO 61º

I.- Pasar de coordenadas cartesianas a polares en la expresión: $\mathrm{V} = x\dfrac{dz}{dx} + y\dfrac{dz}{dy}$

Resultado: $r = \dfrac{dz}{dr}$

II.- Problema de Viviani referente a la parte de la semiesfera que corresponde al cuadrado de su diámetro.

GRUPO 62º

I.- Pasar del sistema de coordenadas cartesianas al de polares, las derivadas de primer orden de una función *u* siendo las fórmulas de paso:

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, \quad z = r\cos\theta$$

Resultados:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\cos\psi + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\operatorname{sen}\psi}{r\operatorname{sen}\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\psi}{r} + \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r\operatorname{sen}\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} \end{cases}$$

II.- Determinar la superficie engendrada por la línea expresada por la función:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

cuando gira alrededor del eje *x*.

Resultado: $\mathrm{A}=2\pi r.2\pi\beta$

GRUPO 63º

I.- Pasar en el espacio del sistema de coordenadas cartesianas al de polares, la derivada segunda: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Resultado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\psi+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos^2\psi\operatorname{sen}\theta}{r}-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r}=$$

$$=-2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{sen}\theta}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi+\operatorname{sen}^2\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cos\theta\frac{\operatorname{sen}^2\psi-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\psi}{r^2\operatorname{sen}\theta}-2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{sen}\theta}$$

II.- Determinar el volumen engendrado por el círculo: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ al girar alrededor del eje *x*.

Resultado: $\mathrm{V}=\pi r.2\pi\beta$

GRUPO 64º

I.- Transformación de la derivada: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ al pasar de ejes cartesianos a polares, en el espacio.

Resultado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta^2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\psi}{r}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r}+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\psi+\cos^2\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cos\theta\frac{\cos^2\psi-2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi}{r^2\operatorname{sen}\theta}-2\frac{\partial u}{\partial\psi}\cos\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

II.- Determinar el área comprendida entre la curva de M$^{\mathrm{lle}}$. Agnesi y los ejes coordenados siendo *r* el radio de la circunferencia que la engendra.

Resultado: $2\pi r^2$

GRUPO 65º

I.- Determinar la transformación de: $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ al pasar de ejes cartesianos a polares en el espacio.

Resultado: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}$

II.- Integrar la ecuación diferencial lineal siguiente: $\frac{dy}{dx} - ay = x^4$

Resultado: $y = \mathrm{C}e^{ax} - \frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} - \frac{4.3.x^2}{a^3} - \frac{4.3.2x}{a^4} - \frac{4.3.2.1}{a^5}$

GRUPO 66º

I.- Determinar la transformación que debe sufrir la derivada: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ al pasar en el espacio, de sus ejes cartesianos a polares.

Resultado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r} + + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\psi}{r} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\cos\theta\left(\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\psi\right)}{r^2\operatorname{sen}\theta} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial siguiente: $\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx}$

Resultado: $y = \mathrm{C}e^{-ax} + \frac{1}{m+a}e^{mx}$

GRUPO 67º

I.- Hallar la relación entre la derivada: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ y las que resultan de referirse a ejes polares.

Resultado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\psi-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\psi\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\psi}{r\operatorname{sen}\theta}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\frac{\operatorname{sen}\psi}{r^2}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\psi\left(\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta\right)}{r^2}$$

II.- Integral de la ecuación diferencial siguiente: $\frac{dy}{dx}-ay=e^{mx}\cos px$

Resultado: $y=\mathrm{C}e^{ax}+e^{mx}\frac{(m-a)\cos px+p\operatorname{sen}px}{(m-a)^2+p}$

GRUPO 68º

I.- Paso de la derivada: $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ a ejes polares.

Resultado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\cos\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\psi}{r}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r\operatorname{sen}\theta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\psi\partial\theta}\frac{\cos\psi}{r^2}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\left(\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\psi}{r^2}$$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^n$

Resultado: $y=x^n-n(n-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+\mathrm{C}\cos x+\mathrm{C'}\operatorname{sen}x$

GRUPO 69º

I.- Pasar la expresión: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ a ejes polares.

Resultado: $r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + c \operatorname{tg} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o$

II.- Integral de la ecuación diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$

Resultado: $y = e^{2x}(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}'x) + \frac{3}{8} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$

GRUPO 70º

I.- Transformar la siguiente expresión: $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ en coordenadas polares.

Resultado: $\dfrac{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}}{\operatorname{sen}\theta \left(r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial r}{\partial \theta}\right)}$

II.- Integración de la ecuación diferencial: $\frac{d^2 y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} + z^2 y = 0$ por medio de las funciones hiperbólicas.

Resultado: $y = e^{-\frac{z^2}{2}} \left[\mathrm{C}_1 \mathrm{C}h.z + \mathrm{C}_2 \mathrm{S}h.z\right]$

GRUPO 71º

I.- Determinar la diferencial de una línea alabeada en función de λ, μ, ν, sabiendo que:

$$x = \frac{\lambda,\mu,\nu}{bc} \qquad y = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} \qquad z = \frac{\sqrt{c^2 - \lambda^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Resultado:

$$ds^2 = \frac{\lambda^4 - \mu^2\lambda^2 - \lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2}{\lambda^4 - \left(c^2 + b^2\right)\lambda^2 + b^2c^2} d\,\lambda^2 + \frac{\mu^4 - \lambda^2\mu^2 - \mu^2\nu^2 + \lambda^2\nu^2}{\mu^4 - \left(c^2 + b^2\right)\mu^2 + b^2c^2} d\,\mu^2 + \frac{\nu^4 - \lambda^2\nu^2 - \mu^2\nu^2 + \lambda^2\nu^2}{\nu^4 - \left(c^2 + b^2\right)\nu^2 + b^2c^2} d\,\nu^2$$

II.- Obtener la integral de la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + m^2y = \operatorname{sen} nx$

Resultado: $y = \frac{\left(m^2 - n^2\right)\operatorname{sen} nx + 2mn\cos nx}{\left(m+n\right)^2} + e^{mx}\left(\mathrm{C}x + \mathrm{C}'\right)$

GRUPO 72º

I.- Desarrollar *y* según potencias de *a* dada la ecuación: $aly + b - y = 0$

Resultado: $y = b + \frac{a}{1}l.b + \frac{a^2}{1.2}\frac{2lb}{b} + \frac{a^3}{1.2.3}\frac{3lb}{b^2}\left(2 - l.b\right) + \cdots\cdots$

II.- Buscar la integral de: $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \cos mx$

Resultado: $y = \frac{\cos mx}{n^2 - m^2} + \mathrm{C}'\cos nx + \mathrm{C}''\operatorname{sen} nx$

GRUPO 73º

I.- Desarrollar y^n en potencias de $\left(\frac{a}{b}\right)$, siendo la ecuación: $ae^y - by + c = 0$

Resultado:

$$y^n = \left(\frac{c}{b}\right)^n \left\{ 1 + ne^{\frac{c}{6}}\frac{b}{c}\frac{a}{b} + \frac{ne^{\frac{2c}{6}}}{1.2}\left(\frac{b}{c}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[2\frac{c}{b} + \left(n-1\right)\right] + \frac{ne^{\frac{3c}{6}}}{1.2.3}\left(\frac{b}{c}\right)^3\left(\frac{a}{b}\right)^3\left[3^2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 2.3\left(n-1\right)\frac{c}{b} + \left(n-1\right)\left(n-2\right)\right] + \cdots\cdots \right.$$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4 y = x^3$

Resultado: $y = -\frac{x^3}{a^4} + \mathrm{C}e^{ax} + \mathrm{C}'e^{-ax} + \mathrm{C}_1^1 \cos(ax + \mathrm{C}_3)$

GRUPO 74º

I.- Hallar los máximos y mínimos de la relación entre la suma de las áreas de los círculos tangentes a los lados de un triángulo y la suma del círculo circunscrito al mismo.

II.- Determinar la integral de la siguiente ecuación lineal a coeficientes variables:

$$\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx} + xy = ax$$

Resultado: $y = a + \mathrm{C}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

GRUPO 75º

I.- Hallar los máximos y mínimos de la relación de la suma de las circunferencias tangentes a los lados de un triángulo con respecto a la circunferencia circunscrita al mismo triángulo.

II.- Deducir la integral correspondiente a la ecuación diferencial: $\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx} - xy = a$

Resultado: $y = ax + \mathrm{C}\sqrt{1 + x^2}$

GRUPO 76º

I.- Inscribir en un elipsoide dado el paralelogramo máximo.

Resultado: $\mathrm{V} = \frac{8abc}{3^{\frac{3}{2}}}$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + \frac{ay}{1 - x^2} = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$

Resultado: $y = \frac{1}{a + 4}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 + \mathrm{C}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\frac{a}{2}}$

GRUPO 77º

I.- Determinar las ecuaciones de la tangente y su longitud en un punto de la cicloide dada por la ecuación: $x = a \operatorname{arccos} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$

Resultados: $y - y_1 = \sqrt{\frac{2a - y_1}{y_1}}\,(x - x_1)$ $\quad \mathrm{T} = y_1 \sqrt{\frac{2a}{2a - y_1}}$

II.- Deducir la integral de la ecuación diferencial: $\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} - ny = x\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Resultado: $y = -\frac{nx\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1 - 2x^2}{n^2 + 4} + \mathrm{C}e^{n \operatorname{arcsen} x}$

GRUPO 78º

I.- Determinar la ecuación y longitud de la normal en un punto (x, y) de la cicloide.

Resultados: $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{2a - y_1}}\,(x - x_1),$ $\quad \mathrm{N} = \sqrt{2ay_1}$

II.- Hallar la integral de: $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^m$ en el supuesto de que sea $x = e^t$.

Resultado: $y = \mathrm{C}x + \frac{\mathrm{C'}}{x} + \frac{x^m}{m^2 - 1}$

GRUPO 79º

I.- Expresión de la subtangente y subnormal en un punto dado de la cicloide.

Resultados: $S_t = -y_1 \sqrt{\frac{y_1}{2a - y_1}},$ $\quad S_n = \sqrt{2ay_1 - y_1^2}$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$

Resultado: $y = \frac{1}{x}\left(\mathrm{C}e^{ax} + \mathrm{C'}e^{-ax}\right)$

GRUPO 80º

I.- Deducir los ángulos que forma la tangente y la normal en un punto de la cicloide dada por la misma ecuación de los problemas anteriores.

Resultados: $\begin{cases} \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{y_1}{2a}} \\ \cos\beta = \sqrt{\dfrac{2a-y_1}{2a}} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\lambda = -\sqrt{\dfrac{2a-y_1}{2a}} \\ \cos\mu = \sqrt{\dfrac{y_1}{2a}} \end{cases}$

II.- Hallar la integral de: $x^4 \dfrac{d^2y}{dx^2} - c^2 y = 0$ en el supuesto de que se tenga $x = \dfrac{1}{n}$.

Resultado: $y = x\left(Ae^{\frac{c}{x}} + Be^{-\frac{c}{x}}\right)$

GRUPO 81º

I.- Radio de curvatura de la cicloide dada por la ecuación: $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$

Resultado: $\rho = \dfrac{a(8a-3x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{3(2a-x)^2}$

II.- Hallar la integral correspondiente a la ecuación diferencial: $dy + \dfrac{xy}{1-x^2}dx = xy^{\frac{1}{2}}dx$

Resultado: $y^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1-x^2}{3} + \mathrm{C}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}$

GRUPO 82º

I.- Radio de curvatura de la catenaria, dada por la ecuación: $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Resultado: $\rho = \dfrac{y^2}{a}$

II.- Integral de la ecuación diferencial homogénea siguiente: $xdx + ydy = mydx$

Resultado: $lx + \frac{1}{2} l\left(1 - mz + z^2\right) + \frac{m}{2} \int \frac{dz}{1 - mz + z^2} = \mathrm{C}$

GRUPO 83º

I.- Radio de curvatura en un punto de la Lemniscata, dada por la ecuación: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

Resultado: $\rho = \frac{a}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $y^3 dy + 3y^2 xdx + 2x^3 dx = 0$

Resultado: $y^2 + 2x^2 = \mathrm{C}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

GRUPO 84º

I.- Evoluta correspondiente a la cisoide , dada por la ecuación: $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

Resultado: $4096a^3\alpha + 1152a^2\beta^2 + 27\beta^4 = 0$

II.- Determinar la integral de la ecuación diferencial: $y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n\left(x + y\frac{dy^2}{dx^2}\right)$

Resultado: $\left(n^2 - 1\right)y^2 + n^2x^2 = [\mathrm{C} \pm x]^2$

GRUPO 85º

I.- Determinar la evoluta de la curva catenaria, dada por la ecuación: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Resultado: $\alpha = a.l\frac{\beta \pm \left(\beta^2 - 4a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a} \pm \frac{\beta\sqrt{\beta^2 - 4a^2}}{4a}$

II.- Hallar la integral de la ecuación diferencial: $y = x + x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ siendo $\frac{dy}{dx} = p$

Resultado: $x = 2(1 - p) + \mathrm{C}e^{-p}$

GRUPO 86º

I.- Determinar la evoluta de la curva logarítmica, dad por la ecuación: $y = ae^{\frac{x}{a}}$

Resultado: $\alpha = a.l\,\dfrac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8a^2}}{4a} - \dfrac{\beta^2 + 4a^2 \pm \beta\left(\beta^2 - 8a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{8a}$

II.- Hallar la integral de: $y = x\left[\dfrac{dy}{dx} - \left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

Resultado: $y^2 + x^2 = x\mathrm{C}$

GRUPO 87º

I.- Determinar la evoluta de la hipocicloide dada por la ecuación; $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Resultado: $(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

II.- Solución singular de la ecuación diferencial siguiente: $\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)\left(x\dfrac{dy}{dx} - 2y\right) + x^3 = 0$

Resultado: $y^2 - 4x^3 = 0$

GRUPO 88º

I.- Evoluta de la elipse determinada por medio de las coordenadas naturales.

Resultado: $3\left(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4\right)^3 + 27a^2b^2c^4y^2x^2 = 0$

II.- Solución singular de la ecuación diferencial: $x^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} + \left(a^2 - x^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

Resultado: $y^2 + x^2 - a^2 = 0$

GRUPO 89º

I.- Determinar la evoluta de la hipérbola por medio de sus coordenadas naturales.

Resultado: $\left(a^2x^2 - y^2b^2 - c^4\right)^3 - 27a^2b^2c^4y^2x^2 = 0$

II.- Sistema integral correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales simultaneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 4x + 3y = t \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t \end{cases}$$

Resultados: $\begin{cases} x = -\dfrac{31}{196} + \dfrac{5}{14}t - \dfrac{1}{8}e^t + \mathrm{C}'e^{-7t} + \mathrm{C}''e^{-2t} \\ y = \dfrac{9}{98} - \dfrac{1}{7}t + \dfrac{5}{24}e^t + \mathrm{C}'e^{-7t} - \dfrac{2}{3}\mathrm{C}''e^{-2t} \end{cases}$

GRUPO 90º

I.- Determinar la diferencial del arco de una hélice que tiene por ecuaciones:

$$x = R\cos u, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,u, \quad z = mAu$$

Resultado: $ds = R\sqrt{1+m^2}\ du$

II.- Sistema integral correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + 3y - x = e^t \end{cases}$$

Resultado: $\begin{cases} x = \dfrac{4}{25}e^t - \dfrac{1}{36}e^{2t} + \left(\mathrm{C}''t + \mathrm{C}'\right)e^{-4t} \\ y = \dfrac{1}{25}e^t + \dfrac{7}{36}e^{2t} - \left(\mathrm{C}''t + \mathrm{C}'' + \mathrm{C}'\right)e^{-4t} \end{cases}$

GRUPO 91º

I.- Calcular los radios de curvatura principales correspondientes a un punto del elipsoide según la fórmula general:

$$\left(rt-s^2\right)\rho^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,\left[\left(1+p^2\right)t+\left(1+q^2\right)r-2pqs\right]\rho+\left(1+p^2+q^2\right)^2=0$$

Resultado: $\rho^2+\left[a^2+b^2+c^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\rho+a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2=0$

II.- Hallar la integral de: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+n^2y=0$ por medio de los coeficientes indeterminados.

Resultado: $y=a_1\left(\frac{1}{x}-\frac{n^2x}{1.2}+\frac{n^4x^3}{4!}\cdots\cdots\right)+a_2\left(1-\frac{n^2x^2}{3!}+\frac{n^4x^4}{5!}\cdots\cdots\right)$

GRUPO 92º

I.- Probar si ρ' y ρ'' designan los radios de curvatura principales en un punto de la intersección de un elipsoide con una esfera teniendo el mismo centro en el origen, se tiene:

$$\frac{\sqrt[4]{\rho'\rho''}}{\rho'+\rho''}=\text{Constante}$$

II.- Integral en forma de serie por medio de los coeficientes indeterminados correspondiente a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2n}{x}\frac{dy}{dx}-m^2y=0$$

Resultado:

$$y=a_1x^{1+2n}\left[1+\frac{m^2x^2}{2(3-2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)}+\cdots\cdots\right]+a_2\left[1+\frac{m^2x^2}{2(1+2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4(1+2n)(3+2n)}+\cdots\cdots\right]$$

GRUPO 93º

I.- Determinar los puntos umbilicales del elipsoide:

Resultado: $x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\qquad y=0\qquad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$

II.- Integral de la ecuación: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^m + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^m - z^n = 0$

Resultado: $\frac{mz^{m-n}}{m-n} = \mathrm{C}^{\frac{1}{m}} x + (1-\mathrm{C})^{\frac{1}{m}} y + \mathrm{C}_1$

GRUPO 94º

I.- Determinar la dirección de las tangentes al, origen de coordenadas en la curva del diablo dada por la ecuación: $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$

Resultado: $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{\pm\sqrt{24}}$

II.- Hallar la integral de: $\mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ siendo $\xi = \alpha x + \beta y,\ \eta = \alpha' x + \beta' y$

Resultado: $z = f(\alpha x + \beta y) + \mathrm{F}(\alpha' x + \beta' + y)$

GRUPO 95º

I.- Determinar el punto de inflación en la curva cuya ecuación es: $xy = 2a\left(2ax - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Resultado: $x = \frac{3}{2}a$

II.- Forma general de la integral correspondiente a la ecuación entre derivadas parciales siguientes:

$$\mathrm{A}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathrm{B}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \mathrm{D}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \text{ siendo } u = \varphi(x + dy)$$

Resultado: $u = \varphi_1(x + \alpha_1 y) + \varphi_2(x + \alpha_2 y) + \varphi_3(x + \alpha_3 y)$

GRUPO 96º

I.- Determinar los puntos de inflación de la curva dada por la ecuación:

$$x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0$$

Resultado: $x = \pm\frac{a}{6^{1/2}}$

II.- Completar el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 + x_4 - 3x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + (x_3 + x_1x_2 + x_1x_4)\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \mathrm{X}_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (x_3 + x_4 - x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \left(x_1x_3x_4 + x^2 - x_1x_2\right)\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Resultado: $\begin{cases} \mathrm{X}_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 + x_4 - 3x_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + (x_3 + x_1x_2 + x_1x_4)\dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ \mathrm{X}_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (x_3 + x_4 - x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + (x_1x_3x_4 + x_2 - x_1x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ \mathrm{X}_3(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \end{cases}$

¤ ¤ ¤ ¤