# Aplicación de la cantidad indefinidamente grande a las Funciones Elípticas

1901

La condensación en los cálculos, así como la falta de claridad, a veces, en los altos conceptos que se encuentran en las obras extranjeras que tratan de las funciones elípticas, puede ser causa de que dicho estudio en España, no se haya aun desarrollado tal cual fuera de desear; siendo esto más sensible por cuanto hoy la mayor parte de los problemas de Aritmética, Geometría, Física, Mecánica, etc., dependen ya de esa bella rama del análisis superior

En este concepto nos proponemos escribir algo para dar a conocer, mediante varias memorias, las cuestiones más importantes de dicha teoría con la mayor claridad posible y sin omitir cálculo alguno, a fin de que sin fatiga pueda aprovechar mejor a los verdaderos amantes de la Ciencia Matemática.

En la presente Memoria, tratamos de aplicar la cantidad indefinidamente grande[(1)] a la determinación de las fórmulas que a continuación se expresan, y que son de un uso frecuente en la teoría de las funciones elípticas:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \operatorname{sn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{1}{k}\,\dfrac{1}{\operatorname{sn}.u} \\[2ex]
(2) & \operatorname{cn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{-\mathrm{I}}}{k}\,\dfrac{\operatorname{dn}.u}{\operatorname{sn}.u} \\[2ex]
(3) & \operatorname{dn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=-\sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{cn}.u}{\operatorname{sn}.u}
\end{array}\right\}\ {}^{(2)}$$

Sensible es que en varias obras se encuentren las igualdades anteriores sin demostración, y por más que el distinguido matemático M. Jordan, pretende demostrarlas, sospechamos que sus consideraciones dejan alguna duda en el ánimo del lector, sobre todo cuando dicho autor trata de justificar la procedencia del signo negativo que afecta a las fórmulas (2) y (3), como consecuencia de la ambigüedad del signo que resulta de la fórmula:

$$\operatorname{cn}\left(\frac{\Omega+\Omega'}{2}\right)=\pm\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}$$

[(1)] Debemos advertir que el *infinito* y *cero* lo sustituimos por las cantidades indefinidamente grandes y pequeñas, las cuales se representan por las letras I e i.

[(2)] Cours d'analyse de M. Jordan. T.II, pág. 364, año 1883.

Por esto nosotros hemos creído que sería muchísimo mejor, partir de fórmulas cuyos signos fuesen bien determinados, y en efecto, bien pronto comprendimos que la fórmula de adición podría llevarnos a la consecución del fin, permitiéndonos al propio tiempo este método el hacer una hermosa aplicación de los principios Leibnitzianos, sabiendo que una suma de términos infinitesimales de diferentes órdenes, se resuelve en el orden superior, en el concepto de tomar el indefinidamente grande como prototipo.

Después de esas ligeras consideraciones podemos ya tomar las fórmulas fundamentales de la adición, para pasar luego a las consecuencias de las mismas. Sean:

$$^{(3)}\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}\mathrm{b}+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} \\[2ex] \operatorname{cn}(a+b)=\dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} \\[2ex] \operatorname{dn}(a+b)=\dfrac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b-k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} \end{cases}$$

Supongamos que se tenga: $a=u$ y $b=\dfrac{\Omega'}{2}$; al sustituir los nuevos valores en las fórmulas anteriores resulta:

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}\dfrac{\Omega'}{2}\operatorname{dn}\dfrac{\Omega'}{2}+\operatorname{sn}\dfrac{\Omega'}{2}\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2\dfrac{\Omega'}{2}} \\[3ex] \operatorname{cn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}\dfrac{\Omega'}{2}-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}\dfrac{\Omega'}{2}\operatorname{dn}u\operatorname{dn}\dfrac{\Omega'}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2\dfrac{\Omega'}{2}} \\[3ex] \operatorname{dn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}\dfrac{\Omega'}{2}-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}\dfrac{\Omega'}{2}\operatorname{cn}u\operatorname{cn}\dfrac{\Omega'}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2\dfrac{\Omega'}{2}} \end{cases}$$

A este punto interesa determinar el valor de $\operatorname{sn}\dfrac{\Omega'}{2}$, a cuyo fin podremos seguir el sencillo procedimiento que a continuación se expresa.

(3) Para todas las fórmulas que van consignadas en esta Memoria, sin demostración, puede consultarse el Complemento de Cálculos del mismo autor.

Para ello partiremos de la fórmula:

$$\operatorname{sn} z = \frac{\theta_3(i)}{\theta_2(i)} \frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} \qquad (\Delta)$$

siendo

$$\frac{\theta_3(i)}{\theta_2(i)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Además, las fórmulas generales de θ, según los períodos dados por M. Briot, dan

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \theta_3\left(z + \dfrac{w'}{2}\right) = \lambda\, \theta_2(z), & \theta\left(z + \dfrac{w'}{2}\right) = \lambda \sqrt{-1}\ \theta_1(z) \\[2ex] \theta_2\left(z + \dfrac{w'}{2}\right) = \lambda\, \theta_3(z), & \theta_1\left(z + \dfrac{w'}{2}\right) = \lambda \sqrt{-1}\ \theta(z) \end{cases}$$

siendo

$$\lambda = q^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{\pi z \sqrt{-1}}{w}}, \qquad q = e^{\frac{\pi w' \sqrt{-1}}{w}}$$

Si en estas fórmulas suponemos $z = \mathrm{i}$, se obtiene:

$$\theta_3\left(\frac{w'}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}\, \theta_2(i), \qquad \theta\left(\frac{w'}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{-1}\, \theta_1(i)$$

$$\theta_2\left(\frac{w'}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}\, \theta_3(i), \qquad \theta_1\left(\frac{w'}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{-1}\, \theta(i)$$

Luego al tomar otra vez la formula (Δ), suponiendo en ella $z = \frac{w'}{2}$, después de sustituir los valores precedentes, resulta:

$$\operatorname{sn} \frac{w'}{2} = \frac{\theta_3(i)}{\theta_2(i)} \frac{\theta(i)}{\theta_1(1)} \qquad (\mathrm{d})$$

Para determinar ahora el valor del segundo miembro, nos valdremos de las fórmulas siguientes:

$$\theta_1(z) = 2 \sum_{n=1}^{n=I} (-1)^{n-1}\, q \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{w'}$$

$$\theta_3(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=I} q^{n^2} \cos \frac{2 n \pi z}{w}$$

$$\theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=I} (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{w}$$

$$\theta_2(z) = 2\sum_{n=1}^{n=I} q\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \cos\frac{(2n-1)\pi z}{w}$$

Si en estas fórmulas suponemos que *z*, se transforme en una cantidad indefinidamente pequeña, al sustituir los resultados en (d), se obtiene definitivamente:

$$(\pi) \qquad \operatorname{sn}\frac{w'}{2} = I = \text{ cantidad indefinidamente grande}$$

Después de esas aclaraciones podemos tomar otra vez las fórmulas (A), en el concepto de que

$$cn = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \quad \text{y} \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}$$

así pues, se tiene:

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{sn}u\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}} + \operatorname{sn}\frac{\Omega'}{2}\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}$$

$$\operatorname{cn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{cn}u\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}} - \operatorname{sn}u\operatorname{sn}\frac{\Omega'}{2}\operatorname{dn}u\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}$$

$$\operatorname{dn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{dn}u\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}} - k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}\frac{\Omega'}{2}\operatorname{cn}u\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}$$

De donde según ($\pi$)

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{sn}u\sqrt{1-I^2}\sqrt{1-k^2I^2} + I\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\, I^2}$$

$$\operatorname{cn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{cn}u\sqrt{1-I^2} - \operatorname{sn}u\, I\operatorname{dn}u\sqrt{1-k^2I^2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\, I^2}$$

$$\operatorname{dn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{\operatorname{dn}u\sqrt{1-k^2I^2} - k^2\operatorname{sn}u\, I\operatorname{cn}u\sqrt{1-I^2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\, I^2}$$

Aplicando aquí los principios de Leibnitz, en el supuesto de considerar la cantidad finita del orden cero, de momento cabe escribir:

$$(\gamma)\quad\begin{cases}\operatorname{sn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{sn}u\,\sqrt{-I^2}\,\sqrt{-k^2}\,I+I\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}\\[2ex]\operatorname{cn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{cn}u\,\sqrt{-I^2}-\operatorname{sn}u\,I\operatorname{dn}u\,\sqrt{-k^2}\,I}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}\\[2ex]\operatorname{dn}\left(u+\dfrac{\Omega'}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{dn}u\,\sqrt{-k^2}\,I-k^2\operatorname{sn}u\,I\operatorname{cn}u\,\sqrt{-I^2}}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}\end{cases}$$

Antes de pasar adelante interesa hacer una observación muy importante respecto a los valores de $\sqrt{-k^2}$ y $\sqrt{-I^2}$, puesto que pueden modificarse del modo siguiente:

$$k=\sqrt{-k^2}=\sqrt{-1\times-k^2}=\sqrt{-1}\,\sqrt{-k^2}$$

de donde

$$\sqrt{-k^2}=\frac{k}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}\,k$$

De un modo análogo se tiene

$$\sqrt{-I^2}=-\sqrt{-1}\,I$$

Así pues al aplicar estas transformaciones en (γ) se halla

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{sn}u-\sqrt{-1}\,I-\sqrt{-1}\,k\,I+I\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}$$

$$\operatorname{cn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn}u-\sqrt{-1}\,I-\operatorname{sn}u\,I\operatorname{dn}u-\sqrt{-1}\,k\,I}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}$$

$$\operatorname{dn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn}u-\sqrt{-1}\,k\,I-k^2\operatorname{sn}u\,I\operatorname{cn}u-\sqrt{-1}\,I}{-k^2\operatorname{sn}^2u\,I^2}$$

Por fin, si aplicamos otra vez los principios Leibnitzianos a los numeradores de las últimas igualdades, se obtienen definitivamente las fórmulas que nos habíamos propuesto demostrar:

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=\frac{1}{k}\,\frac{1}{\operatorname{sn}u}$$

$$\operatorname{cn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=-\frac{\sqrt{-1}}{k}\,\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}$$

$$\operatorname{dn}\left(u+\frac{\Omega'}{2}\right)=-\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}$$

Digno de mención es, después de lo que precede, que siguiendo el mismo procedimiento respecto al indefinidamente grande aun cabe probar que en la fórmula de M. Jordan:

$$\operatorname{cn}\left(\frac{\Omega+\Omega'}{2}\right)=\pm\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k},$$

debe tomarse tan solo el signo negativo; en efecto, si consideramos la fórmula de adición

$$\operatorname{cn}(a+b)=\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}b\operatorname{dn}\mathrm{b}}{1-\mathrm{k}^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}$$

al sustituir en vez de *a* y *b*, los valores respectivos de $\frac{\Omega}{2}$ y $\frac{\Omega'}{2}$, no olvidando que:

$$\operatorname{sn}\frac{\Omega}{2}=1,\qquad \operatorname{cn}\frac{\Omega}{2}=0,\qquad \operatorname{dn}\frac{\Omega}{2}=\sqrt{1-k^2}=k'$$

resulta

$$\operatorname{cn}\left(\frac{\Omega+\Omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn}\frac{\Omega}{2}\operatorname{cn}\frac{\Omega'}{2}-\operatorname{sn}\frac{\Omega}{2}\operatorname{dn}\frac{\Omega}{2}\operatorname{sn}\frac{\Omega'}{2}\operatorname{dn}\frac{\Omega'}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{\Omega}{2}\operatorname{sn}^2\frac{\Omega'}{2}}$$

Si aplicamos en este segundo miembro los principios anteriores, y los valores particulares que preceden, inmediatamente se obtiene:

$$\operatorname{cn}\left(\frac{\Omega+\Omega'}{2}\right)=\frac{-k'-\sqrt{-1}\;k\;I^2}{-k^2\,I^2}=-\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}$$

valor determinado y negativo, hallado directamente sin necesidad de atender a la ambigüedad del signo que resulta en la expresión:

$$\mathrm{cn}\left(\frac{\Omega+\Omega'}{2}\right)=\pm\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}$$

dada por M. Jordan.

Por último, terminaremos esta Memoria manifestando que si bien el procedimiento anterior ha permitido apreciar la importancia que puede concederse a la cantidad indefinidamente grande, esto no quiere decir que el método expuesto sea el único que nos podía conducir al fin apetecido; en efecto, también cabía partir de las fórmulas (B) ya halladas, y en el supuesto de que:

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{aligned} \mathrm{sn}\, z &= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} \\ \mathrm{cn}\, z &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)} \\ \mathrm{dn}\, z &= \sqrt{k'}\,\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)} \end{aligned}$$

Si dividimos dichas fórmulas (B), respectivamente unas por otras, se encuentra

$$\frac{\theta_1\left(z+\frac{w'}{2}\right)}{\theta\left(z+\frac{w'}{2}\right)}=\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}=\frac{1}{\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}}$$

$$\frac{\theta_2\left(z+\frac{w'}{2}\right)}{\theta\left(z+\frac{w'}{2}\right)}=\frac{\theta_3(z)}{\sqrt{-1}.\theta_1(z)}=-\sqrt{-1}\,\frac{\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}}{\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}}$$

$$\frac{\theta_3\left(z+\frac{w'}{2}\right)}{\theta\left(z+\frac{w'}{2}\right)}=\frac{\theta_2(z)}{\sqrt{-1}\,\theta_1(z)}=-\sqrt{-1}\,\frac{\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)}}{\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}}$$

Ahora bien, en virtud de las igualdades (C), se deduce:

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{w'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,z}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\left(z+\frac{w'}{2}\right)=-\sqrt{-1}\,\frac{\dfrac{\mathrm{dn}\,z}{\sqrt{k'}}}{\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,z}$$

$$\frac{\mathrm{dn}\left(z+\dfrac{w'}{2}\right)}{\sqrt{k'}}=-\sqrt{-1}\;\frac{\sqrt{\dfrac{k}{k'}}\;\mathrm{cn}\,z}{\sqrt{k}\;\;\mathrm{sn}\,z}$$

Así pues, atendiendo al cambio de notación, según M. Briot, se obtienen las mismas fórmulas que en el primer procedimiento, esto es:

$$\mathrm{sn}\left(z+\frac{w'}{2}\right)=\frac{1}{k}\;\frac{1}{\mathrm{sn}\,z}$$

$$\mathrm{cn}\left(z+\frac{w'}{2}\right)=-\frac{\sqrt{-1}}{k}\;\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$$

$$\mathrm{dn}\left(z+\frac{w'}{2}\right)=-\sqrt{-1}\;\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$$

Barcelona, 19 Enero de 1901
Lauro Clariana Ricart