Demostración

de la

Fórmula Elíptica de Legendre

1901

Aparte de la importancia que con razón se concede hoy a las funciones elípticas, hay que confesar que solo se alcanzan después de cálculos prolijos, y mediante un encadenamiento bastantes extenso de fórmulas; así resulta, en general, cuando se trata de determinar la célebre relación de Legendre, expresada por la igualdad.

$$\mathrm{EK}' + \mathrm{EK}' - \mathrm{KK}' = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Sin embargo, entre las diferentes vías que pueden conducir al mismo fin, hay una muy notable por su sencillez relativa y que tratamos de dar a conocer, conforme al procedimiento sumamente ingenioso que se halla indicado ligeramente en la obra de M. Griess. Ante todo conviene recordar las fórmulas siguientes, según la notación de Legendre:

$$\mathrm{F}(\varphi, k) = \mathrm{F}(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \qquad \mathrm{E}(\varphi, k) = \mathrm{E}(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\,\varphi,$$

$$\mathrm{F}(\psi, k') = \mathrm{F}(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\,\psi}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}, \qquad \mathrm{E}(\psi') = \mathrm{E}'(\psi) = \int_0^{\psi} \sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\; d\,\psi,$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \qquad \mathrm{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\,\varphi,$$

$$\mathrm{F}' = \mathrm{K}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\psi}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}, \qquad \mathrm{E}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\, d\,\psi,$$

$$k^2 + k'^2 = 1$$

Bajo esta base, tomando las derivadas según el módulo ***k***, cabrá escribir los desarrollos que a continuación se expresan:

$$\frac{d\left(\dfrac{\mathrm{E}(\varphi)}{k}\right)}{dk} = \frac{d\,\dfrac{\displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\varphi}{k}}{dk} = -\frac{1}{k^2}\int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = -\frac{\mathrm{F}(\varphi)}{k^2}$$

$$\frac{d\left[k\,\mathrm{F}(\varphi)\right]}{dk}=\frac{d\left[k\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\right]}{d\,\mathrm{K}}=\int_0^{\varphi}\frac{d\,\varphi}{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}=\int_0^{\varphi}\frac{d\,\varphi}{(\Delta\,\varphi)^3}$$

al suponer

$$\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}=\Delta\varphi$$

Ahora vamos a determinar esta última integral. De momento puede escribirse la igualdad siguiente:

$$\frac{1}{(\Delta\varphi)^3}-\frac{\Delta\varphi}{1-k^2}=\frac{-k^2+2k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi-k^4\,\mathrm{sen}^4\,\varphi}{\left(1-k^2\right)(\Delta\varphi)^3}=-\frac{k^2}{k'^2}\,\frac{\cos 2\varphi+k^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi}{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}$$

Luego integrando, se tiene:

$$\int\frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^3}-\int\frac{\Delta\varphi}{1-k^2}\,d\varphi=-\frac{k^2}{k'^2}\int\frac{\cos 2\varphi+k^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi}{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}d\varphi$$

de donde, según las notaciones adoptadas,

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^3}=\frac{\mathrm{E}(\varphi)}{k'^2}-\frac{k^2}{k'^2}\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi+k^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi}{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}d\varphi \quad (2)$$

El numerador de la última integral se transforma en:

$$\cos 2\varphi+k^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi=\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)\left(\cos^2\varphi-\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)+k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\cos^2\varphi$$

así, pues, la integral (2) nos da:

$$\int\frac{\cos 2\varphi+k^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi}{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}d\varphi=\int\frac{(\Delta\varphi)^2\left(\cos^2\varphi-\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)+k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\cos^2\varphi}{(\Delta\varphi)^3}\,d\,\varphi=$$

$$=\int\frac{\Delta\varphi\, d\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+k^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,\dfrac{d\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{2\Delta\varphi}}{(\Delta\varphi)^2}=\int d\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

De modo que tendremos para la igualdad (2):

$$\frac{d[k\mathrm{F}(\varphi)]}{dk} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^3} = \frac{\mathrm{E}(\varphi)}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

Si en las fórmulas obtenidas suponemos ahora que $\varphi = \frac{\pi}{2}$, resulta:

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{E}}{k}\right)}{dk} = -\frac{\mathrm{K}}{k^2}, \qquad \frac{d(k\,\mathrm{K})}{dk} = \frac{\mathrm{E}}{k'^2} \quad (3)$$

Después de estas fórmulas preliminares, si tomamos el primer miembro de la relación (1) de Legendre, fácilmente puede demostrarse que su derivada respecto al módulo *k*, es nula. En efecto, para dicha derivada se tiene:

$$\mathrm{E}\frac{d\,\mathrm{K}'}{dk} + \mathrm{K}'\frac{d\,\mathrm{E}}{dk} + \mathrm{E}'\frac{d\,\mathrm{K}}{dk} + \mathrm{K}\frac{d\,\mathrm{E}'}{dk} - \mathrm{K}\frac{d\,\mathrm{K}'}{dk} - \mathrm{K}'\frac{d\,\mathrm{K}}{dk} \quad (4)$$

Recordando las fórmulas (3) ya halladas, se obtiene:

$$\mathrm{K}\frac{d\,\mathrm{E}}{dk} - \mathrm{E} = -\mathrm{K}, \qquad \mathrm{K} + \frac{d\,\mathrm{K}}{dk}\mathrm{K} = \frac{\mathrm{E}}{k'^2}$$

o sea:

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{dk} = \frac{\mathrm{E}}{k} - \frac{\mathrm{K}}{k}, \qquad \frac{d\,\mathrm{K}}{dk} = \frac{\mathrm{E}}{kk'^2} - \frac{\mathrm{K}}{k}$$

De un modo análogo, se tiene:

$$\frac{d\,\mathrm{E}'}{dk'} = \frac{\mathrm{E}'}{k'} - \frac{\mathrm{K}'}{k'}, \qquad \frac{d\,\mathrm{K}'}{dk'} = \frac{\mathrm{E}'}{k'k^2} - \frac{\mathrm{K}'}{k'}$$

Empero como nos interesa referirnos al módulo *k* exclusivamente, siendo $k' = \sqrt{1-k^2}$ de donde se deduce, $dk' = -\frac{k}{k'}dk$, las dos últimas fórmulas halladas, se transforman en las siguientes:

$$\frac{d\,\mathrm{E}'}{dk} = -\frac{k}{k'}\left[\frac{\mathrm{E}'}{k'} - \frac{\mathrm{K}'}{k'}\right], \qquad \frac{d\,\mathrm{K}'}{dk} = -\frac{k}{k'}\left[\frac{\mathrm{E}'}{k'k^2} - \frac{\mathrm{K}'}{k'}\right]$$

y sustituyendo por fin cada uno de los valores hallados en la fórmula (4), resulta:

$$-\mathrm{E}\frac{k}{k'}\left[\frac{\mathrm{E}'}{k'k^2}-\frac{\mathrm{K}'}{k'}\right]+\mathrm{K}'\left[\frac{\mathrm{E}}{k}-\frac{\mathrm{K}}{k}\right]+\mathrm{E}'\left[\frac{\mathrm{E}}{kk'^2}-\frac{\mathrm{K}}{k}\right]-\mathrm{K}\frac{k}{k'}\left[\frac{\mathrm{E}'}{k'}-\frac{\mathrm{K}'}{k'}\right]+\mathrm{K}\frac{k}{k'}\left[\frac{\mathrm{E}'}{k'k^2}-\frac{\mathrm{K}'}{k'}\right]-\mathrm{K}'\left[\frac{\mathrm{E}}{kk'^2}-\frac{\mathrm{K}}{k}\right]$$

cuyo desarrollo, después de toda simplificación, resulta igual a cero. Este resultado nos manifiesta claramente que la expresión:

$$\mathrm{EK}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}'-\mathrm{KK}'$$

es independiente de k; así pues podemos suponer que $k = 0$, sin que sufra alteración su valor, que según las fórmulas fundamentales cabrá expresarlo en forma de integrales, esto es:

$$\mathrm{EK}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{KK}'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}\,d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\Delta(\varphi,k)}{\Delta(\psi,k')}+\frac{\Delta(\psi,k')}{\Delta(\varphi,k)}-\frac{1}{\Delta(\varphi,k).\Delta(\psi,k')}\right]d\psi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Delta(\varphi,k))^2+(\Delta(\psi,k'))^2-1}{\Delta(\varphi,k)\Delta(\psi,k')}\,d\varphi d\psi \quad (5)$$

De suerte que al suponer aquí $k = 0$, se obtiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos^2\psi-1}{\cos\psi}d\varphi\,d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi=\frac{\pi}{2}$$

quedando así demostrada la relación notable de Legendre,

$$\mathrm{EK}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{KK}'=\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

conforme nos habíamos propuesto.

Digno de mención es que la integral doble:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\cos^2\varphi+k'^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}d\varphi\,d\psi$$

corresponda con la fórmula anterior, de Legendre. En efecto, se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\cos^2\varphi+k'^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}d\varphi\,d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2+k'^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi-k'^2\operatorname{sen}^2\psi+1-1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}d\varphi\,d\psi$$

Recordando ahora que: $k^2+k'^2=1$ y siendo

$$\Delta(\varphi,k)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi},\qquad \Delta(\psi,k')=\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}$$

resulta inmediatamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\cos^2\varphi+k'^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}d\varphi\,d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Delta(\varphi,k))^2+(\Delta(\psi,k'))^2-1}{\Delta(\varphi,k)\Delta(\psi,k')}d\varphi\,d\psi$$

Y como, según (5), este segundo miembro corresponde a la relación de Legendre, expresada por $\frac{\pi}{2}$ resulta en definitiva lo que nos habíamos propuesto demostrar, esto es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\cos^2\varphi+k'^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}d\varphi\,d\psi=\frac{\pi}{2}$$

Barcelona a 30 de Marzo de 1901
Lauro Clariana Ricart