# Nuevo Procedimiento

## para determinar la integral de:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}-m^2xy=0$$

1901

La ecuación diferencial de que nos vamos a ocupar, ha llamado muchísimo la atención de los analistas, por la transcendencia que puede tener en diferentes problemas de la Matemática aplicada; empero los métodos que comúnmente se siguen para la determinación de su integral, son algo laboriosos; razón por la cual hemos creído útil indicar un nuevo procedimiento, que seguramente debe presentar ventajas a los demás.

Nuestro objetivo redúcese simplemente a llevar la ecuación diferencial a la forma canónica, con el fin de hacer desaparecer luego la primera derivada de la ecuación transformada, pues de esta suerte se logra que la determinación de la integral sea sumamente fácil.

Recordemos, ante todo, que una ecuación diferencial de segundo orden puede llevarse a la forma canónica siguiente:

$$\frac{d}{dz}\left(\mathrm{X}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)+\mathrm{V}y=0$$

en el supuesto de que X y V, sean funciones de x.

En efecto, si identificamos la ecuación general:

$$\mathrm{A}\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{B}\frac{dy}{dx}+\mathrm{C}y=0$$

con el desarrollo de la anterior, o sea:

$$\mathrm{X}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}\frac{dy}{dx}+\mathrm{V}y=0$$

deben aceptarse las relaciones

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}=\frac{\frac{d\,\mathrm{X}}{dx}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}$$

de las cuales se deduce fácilmente

$$\mathrm{X}=e^{\int\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}dx}\qquad\qquad \mathrm{V}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}e^{\int\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}dx}$$

Si aplicamos estos principios a la ecuación diferencial dada

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}-m^2xy=0\qquad(1)$$

se obtienen los resultados siguientes:

$$\int\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}dx=\int\frac{2n}{x}dx=1x^{2n},\qquad \mathrm{X}=x^{2n},\qquad \mathrm{V}=-m^2x^{2n}$$

Luego la forma canónica equivalente a (1), será:

$$x^{2n}\frac{d^2y}{dx^2}+2nx^{2n-1}\frac{dy}{dx}-m^2x^ny=0\quad(2)$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}\left(x^n\frac{dy}{dx}\right)+m^2x^{2n}y=0$$

Ahora bien, para reducir la ecuación (2), supondremos: $y = tz$; derivando dos veces y sustituyendo, la igualdad (2) se transforma en:

$$x^{2n}\left[z\frac{d^2t}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\frac{dt}{dx}+t\frac{d^2z}{dx^2}\right]+2nx^{2n}-\left[z\frac{dt}{dx}+t\frac{dz}{dx}\right]-m^2x^{2n}tz=0$$

o sea:

$$x^{2n}t\frac{d^2t}{dx^2}+\left[2x^{2n}\frac{dt}{dx}+2nx^{2n-1}t\right]\frac{dz}{dx}+z\left[x^{2n}\frac{d^2t}{dx^2}+2nx^{2n-1}\frac{dt}{dx}-m^2x^{2n}t\right]=0\quad(3)$$

Al considerar igual a cero el coeficiente de $\frac{dz}{dx}$, la condición $\frac{dt}{dx}+\frac{nt}{x}=0$ permite escribir:

$$t=e^{-\int\frac{ndx}{x}}=\frac{1}{x^n}$$

Por fin, si de esta última igualdad, se deduce la primera y segunda derivada, sustituyendo luego los resultados en (3), después de sencillas simplificaciones, resulta:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=\frac{z}{x^2}\left(n^2-n\right)\qquad(4)$$

ecuación diferencial sumamente importante, pues de ella se deduce fácilmente la integral. En efecto, la integral de (4) podrá hallarse suponiendo

$$z=\mathrm{A}x^n+\mathrm{B}x^{n+2}+\mathrm{C}x^{n+4}+\mathrm{D}x^{n+6}+\cdots\quad(5)$$

Bajo este supuesto, si determinamos la segunda derivada de *z*, resulta:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)\mathrm{A}x^{n-2}+(n+2)(n+1)\mathrm{B}x^n+(n+4)(n+3)\mathrm{C}x^{n+2}+\cdots;$$

y al sustituir estos desarrollos en (4), se obtiene la igualdad que a continuación se expresa:

$$n(n-1)\mathrm{A}x^{n-2}+(n+2)(n+1)\mathrm{B}x^n+(n+4)(n+3)\mathrm{C}x^{n+2}+\cdots-m^2\left[\mathrm{A}x^n+\mathrm{B}x^{n+2}+\mathrm{C}x^{n+4}+\cdots\right]=$$
$$=\left[\mathrm{A}x^{n-2}+\mathrm{B}x^n+\mathrm{C}x^{n+2}+\cdots\right]\left[n^2-n\right]$$

De donde, según los principios de Descartes, hállase:

$$\begin{aligned}
&(n^2-n)(\mathrm{A}-\mathrm{A})=0,\\
&(n+2)(n+1)\mathrm{B}-m^2\mathrm{A}-(n^2-n)\mathrm{B}=0,\\
&(n+4)(n+3)\mathrm{C}-m^2\mathrm{B}-(n^2-n)\mathrm{C}=0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La igualdad primera se satisface con independencia del valor que pueda tener A, por lo que puede suponerse que dicha cantidad representa una constante arbitraria.

De las demás igualdades, dedúcense las expresiones que a continuación van consignadas:

$$\mathrm{B}=\frac{m^2\mathrm{A}}{4n+2}=\frac{m^2\mathrm{A}}{2(2n+1)},$$

$$\mathrm{C}=\frac{m^4\mathrm{A}}{2(2n+1)4(2n+3)},$$

$$\vdots$$

Luego la ecuación (5), se transforma en:

$$z=x^n\mathrm{A}\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(2n+1)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)}+\cdots\right]\quad(6)$$

Esta es la integral de (4), empero para tener la de (1), bastará recordar que:

$$y=t\,z=\frac{1}{x^n}z$$

de cuya relación resulta inmediatamente:

$$y=\mathrm{A}\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(2n+1)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)}+\cdots\right]$$

Además como al cambiar $n$ en 1 - $n$ no altera la ecuación diferencial (4), cabe admitir este cambio en (6), que es su integral, al objeto de obtener una nueva integral particular, afecta de una nueva constante arbitraria. Así pues, resulta:

$$z=x^{1-n}\mathrm{A}'\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(3-2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)}+\cdots\right]$$

Y la nueva integral que corresponde a (1), será:

$$y=x^{1-2n}\mathrm{A}'\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(3-2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)}+\cdots\right]$$

Por fin, si se suman las dos integrales particulares halladas de (1), resulta la integral general siguiente definitivamente:

$$y=\mathrm{A}\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(2n+1)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)}+\cdots\right]+x^{1-2n}\mathrm{A}'\left[1+\frac{\mathrm{m}^2x^2}{2(3-2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)}+\cdots\right]\quad(7)$$

El procedimiento que se acaba de exponer para determinar esta integral es, a nuestro juicio, sumamente importante, no solo por su sencillez y carácter científico, sino porque él permite resolver fácilmente los casos que se refieren a $n = 1$ y $n = 0$. En ambos casos la ecuación diferencial (4) se transforma en:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=0\qquad(8)$$

Así pues, para integrar (8), supondremos, según el método de Euler, por tratarse de una ecuación diferencial, lineal y de coeficientes constantes, $z=e^{rx}$; más las sustituciones debidas después de hallar la derivada segunda de $z$, nos conduce a la ecuación característica:

$$r^2-m^2=0,$$

de donde

$$r=\pm m\,.$$

Luego la integral de la ecuación diferencial (8) es:

$$z=\mathrm{C}e^{mx}+\mathrm{C}'e^{-mx}\,.$$

Por otra parte la fórmula hallada

$$y = t\,z = \frac{1}{x^n}\,z\,,$$

procura las dos igualdades siguientes:

$$y=\frac{z}{x} \;\text{ ó }\; y=z,$$

según se tenga n = 1 ó n = 0.

De modo que las integrales de las ecuaciones diferenciales:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-m^2xy=0, \qquad x\frac{d^2y}{dx^2}-m^2xy=0$$

son respectivamente las siguientes:

$$y=\frac{\mathrm{C}e^{mx}+\mathrm{C}'e^{-mx}}{x} \qquad y=\mathrm{C}e^{mx}+\mathrm{C}'e^{-mx}$$

Por último hay un caso particular de suma importancia que corresponde para cuando 2*n* = 1.

Vamos a resolverlo conforme a nuestro procedimiento, atendiendo en este caso que la ecuación diferencial (4), se convierte en:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=-\frac{z}{x^2}\frac{1}{4} \qquad (9)$$

En este supuesto, la anterior expresión de *z*, o sea:

$$z=\mathrm{A}x^n+\mathrm{B}x^{n+2}+\mathrm{C}x^{n+4}+\mathrm{D}x^{n+6}+\cdots\cdots,$$

se transforma en:

$$z=\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}+\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}+2}+\mathrm{C}x^{\frac{1}{2}+4}+\mathrm{D}x^{\frac{1}{2}+6}+\cdots\cdots \qquad (10)$$

Si determinamos luego la segunda derivada de (10), y sustituimos los nuevos valores en (9), se obtiene:

$$-\frac{1}{4}\mathrm{A}x^{-\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}+4\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\mathrm{C}x^{\frac{1}{2}+2}+\cdots-m^2\left(\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}+\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}+2}+\mathrm{C}x^{\frac{1}{2}+4}+\cdots\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\mathrm{A}x^{-\frac{3}{2}}+\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}}+\mathrm{C}x^{\frac{1}{2}+2}+\mathrm{D}x^{\frac{1}{2}+4}+\cdots\right]$$

Ahora según los principios de Descartes, se tiene:

$$\frac{1}{4}(\mathrm{A}-\mathrm{A})=0,$$

$$\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\mathrm{B}-m^2\mathrm{A}+\frac{1}{4}\mathrm{B}=0,$$

$$\left(\frac{1}{2}+4\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\mathrm{C}-m^2\mathrm{B}+\frac{1}{4}\mathrm{C}=0,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Considerando A como una constante arbitraria, se pueden dar todas las demás cantidades en función de esta primera, esto es:

$$\mathrm{B}=\frac{m^2\mathrm{A}}{2^2} \qquad \mathrm{C}=\frac{m^4\mathrm{A}}{2^2.4^2}\cdots\cdots$$

Al sustituir estas nuevas cantidades en (10) se obtiene:

$$z=\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{m^2x^2}{2^2}+\frac{m^4x^4}{2^2.4^2}+\cdots\right]$$

Luego la integral de:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-m^2y=0$$

se hallará recordando que:

$$y=t\,z=\frac{1}{x^n}z$$

siendo en el caso particular de que se trata:

$$y=\frac{z}{x^{1/2}}$$

Así pues, la integral definitiva se expresará por:

$$y=\mathrm{A}\left(1+\frac{m^2x^2}{2^2}+\frac{m^4x^4}{2^2.4^2}+\cdots\cdots\right)$$

Estos ejemplos confirman como el procedimiento que hemos indicado procura directamente las integrales correspondientes a los diferentes casos particulares de la ecuación diferencial dada, sin necesidad de acudir a la integral general (7) anteriormente hallada, condición muy atendible, sobre todo si para determinar dicha integral general tuviéramos que echar mano de la teoría de los coeficientes indeterminados o del desarrollo de MacLaurin, métodos de suyo sumamente laboriosos.

Barcelona a 30 de Junio de 1901
Lauro Clariana Ricart