Superficie del elipsoide de revolución con relación a las integrales elípticas

1901

Antes de alcanzar la aplicación de las integrales elípticas, es conveniente recordar la formulas que directamente se obtienen en el curso de cálculos, para la superficie del elipsoide de revolución. Para ello, tomaremos la expresión de una superficie de revolución en general.

$$\mathrm{S} = 2\pi \int_0^x y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sea ahora la elipse generadora del elipsoide:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Luego, al determinar la primera derivada, y después de algunas reducciones, resulta:

$$\mathrm{S} = 2\pi \int_0^x y\, dx \frac{b\sqrt{a^4 - \left(a^2 - b^2\right)x^2}}{a^2 y}$$

Supongamos de momento que a > b, es decir, que la elipse gire alrededor del eje mayor, y en el supuesto de que $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$, la expresión precedente se transformará en:

$$(1) \quad \mathrm{S} = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 - e^2 x^2} = \frac{2\pi be}{a} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}$$

Al suponer luego $\frac{a^2}{e^2} = k^2$ se tiene, según principios sencillos de integración,

$$2\int dx \sqrt{k^2 - x^2} = k^2 \int \frac{\frac{dx}{k}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}} + x\sqrt{k^2 - x^2}$$

de donde

$$\int dx \sqrt{k^2 - x^2} = \frac{a^2}{2e^2} \operatorname{arcsen} \frac{xe}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}$$

De suerte que según (1), tendremos

$$\mathrm{S} = \frac{2\pi be}{a}\left(\frac{a^2}{2e^2}\operatorname{arcsen}\frac{xe}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} \right)$$

Si hacemos en esta última fórmula, $x = a$, se obtiene para la mitad de la superficie del elipsoide de revolución, siendo a > b, la expresión:

$$\mathrm{S} = \pi b^2 + \frac{\pi ba}{e}\operatorname{arcsen} e$$

y para la superficie total, en el supuesto de que S_1 represente la octava parte de dicha superficie:

$$8\mathrm{S}_1 = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e}\operatorname{arcsen} e \qquad (\mathrm{A})$$

Ahora bien si $a < b$, es decir, que la elipse generadora del elipsoide gire alrededor de su eje menor, resulta $\sqrt{\mathrm{b}^2 - a^2} = be$ y por consiguiente:

$$\mathrm{S} = 2\pi \int_0^x y\,dx \frac{b\sqrt{a^4 + \left(b^2 - a^2\right)x^2}}{a^2 y}$$

o sea

$$\mathrm{S} = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^x dx\sqrt{a^4 + b^2e^2x^2} = \frac{2\pi b^2 e}{a^2}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4}{b^2 e} + x^2} \qquad (2)$$

Para determinar la última integral, supondremos $\frac{a^2}{be} = k$, y según principios sencillos de integración, tendremos:

$$\int dx\sqrt{k^2 + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{k^2 + x^2} + \frac{k^2}{2} l\left(x + \sqrt{k^2 + x^2} \right)$$

sustituyendo este valor en (2), se obtiene

$$\mathrm{S} = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2 e} + x^2} + \frac{a^4}{b^2e^2}\, l\left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{be}} \right) \right]$$

Por fin, si $x = a$, se halla para la mitad de la superficie del elipsoide

$$S = \pi b\sqrt{a^2 + l^2 e^2} + \frac{\pi a^2}{e} l \frac{be + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a}$$

y si tomamos la superficie total, de un modo análogo al anterior, resulta:

$$8S_1 = 2\pi b\sqrt{a^2 + b^2 e^2} + \frac{2\pi a^2}{e} l \frac{be + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a} \quad (B)$$

Después de lo que precede, vamos a tomar las fórmulas generales de Weierstrass y Legendre, correspondientes al elipsoide de tres ejes desiguales, y dependientes de las integrales elípticas, para deducir de ellas, las que pertenecen a la superficie del elipsoide de revolución. La fórmula dada por Weierstrass es:

$$(3) \quad 8S_1 = 2\pi c^2 + 2\pi\left[b\sqrt{a^2 + c^2}\, E(b', \nu) + \frac{bc^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} F(b', \nu) \right]$$

Dicha fórmula corresponde con la de Legendre.

$$(4) \quad 8S_1 = 2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu}\left[\frac{c^2}{a^2} F(b', \nu) + \frac{a^2 + c^2}{a} E(b', \nu) \right]$$

Para probar la igualdad de los resultados anteriores, basta suponer $\cos\nu = \frac{c}{a}$ de donde $\operatorname{sen}\nu = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$.

Ahora bien, si en (4) suponemos $a = b$, la fórmula se transforma en:

$$8S_1 = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{\operatorname{sen}\nu} l \frac{1 + \operatorname{sen}\nu}{1 - \operatorname{sen}\nu} \qquad (5)$$

Para justificar este resultado, hay que suponer:

$$b'^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 \nu}$$

pero como en el caso particular que nos ocupa, tenemos $a = b$, resulta $\operatorname{sen}\nu = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$ de donde $b' = 1$.

Así, pues, atendiendo al desarrollo de las integrales elípticas, tendremos:

$$\mathrm{E}(b', \nu) = \int \sqrt{1 - b'^2 \operatorname{sen}^2 \nu}\, d\nu = \int \cos\nu \, d\nu = \operatorname{sen}\nu,$$

$$\mathrm{F}(b', \nu) = \int \frac{d\nu}{\sqrt{1 - b'^2 \operatorname{sen}^2 \nu}} = \int \frac{d\nu}{\cos\nu} = l \, \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}.$$

Consideremos ahora de (4) el primero y último término del segundo miembro, esto es, según lo que precede,

$$2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu} \frac{a^2 - c^2}{a^2} \mathrm{E}(b', \nu) = 2\pi c^2 + \frac{2\pi a^2}{\operatorname{sen}\nu} \frac{a^2 - c^2}{a^2} \operatorname{sen}\nu = 2\pi a^2$$

Respecto al segundo término del segundo miembro de (4), se obtiene:

$$\frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu} \frac{c^2}{a^2} \mathrm{F}(b', \nu) = \frac{2\pi c^2}{\operatorname{sen}\nu} \, l \, \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}} = \frac{\pi c^2}{\operatorname{sen}\nu} \, l \, \frac{1 + \operatorname{sen}\nu}{1 - \operatorname{sen}\nu}$$

Así, pues, al sustituir los valores anteriores en (4), resulta inmediatamente la fórmula (5), conforme nos habíamos propuesto demostrar.

Ahora bien, la fórmula (B), que hemos hallado directamente, corresponde con (5). En efecto, según la fórmula (B), se tiene:

$$b^2 e^2 = b^2 - a^2, \qquad 2\pi b \sqrt{a^2 + b^2 e^2} = 2\pi b^2$$

Más de la comparación de ejes, resulta que al hacer el paso de la fórmula (B) a (5), siendo el eje de rotación 2a en la primera y 2c en la segunda, la expresión $2\pi b^2$ se convierte en $2\pi a^2$. Además, según (B), se tiene:

$$\cos\nu = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{sen}\nu = e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

Luego el segundo término del segundo miembro de (B), sufre las transformaciones que a continuación se indican:

$$\frac{2\pi a^2}{e} \, l \, \frac{be + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a} = \frac{2\pi a^2}{e} \, l \, \frac{b(1+e)}{a} = \frac{\pi a^2}{e} \, l \, \frac{b^2 (1+e)^2}{b^2 (1-e)^2} = \frac{\pi a^2}{e} \, l \, \frac{1+e}{1-e} = \frac{\pi a^2}{e} \, l \, \frac{1 + \operatorname{sen}\nu}{1 - \operatorname{sen}\nu}$$

Por fin, al pasar de (B) a (5), según la disposición de los ejes, la expresión anterior, se transforma en:

$$\frac{\pi c^2}{e}\, l\, \frac{1+\operatorname{sen}\nu}{1-\operatorname{sen}\nu} = \frac{\pi c^2}{\operatorname{sen}\nu}\, l\, \frac{1+\operatorname{sen}\nu}{1-\operatorname{sen}\nu}$$

Así, pues, al sustituir los valores hallados en la fórmula (B), se obtiene:

$$8S_1 = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{\operatorname{sen}\nu}\, l\, \frac{1+\operatorname{sen}\nu}{1-\operatorname{sen}\nu}$$

igualdad que corresponde con (5).

Por último, de la fórmula (3) al suponer $b = c$, se deduce inmediatamente:

$$8S_1 = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu}\left(\nu + \operatorname{sen}\nu\cos\nu\right) \qquad (6)$$

En efecto, hemos visto que $b'^2 = \dfrac{b^2 - c^2}{b^2 \operatorname{sen}^2\nu}$ luego según las condiciones supuestas, resulta $b' = 0$; luego:

$$\int \sqrt{1 - b'^2 \operatorname{sen}^2\nu}\, d\nu = \nu \qquad \int \frac{d\nu}{\sqrt{1 - b'^2 \operatorname{sen}^2\nu}} = \nu$$

Así, pues, al tomar el primer término del segundo miembro de (3), hállase:

$$2\pi c^2 = 2\pi ba \frac{c}{a} = \frac{2\pi ba}{\operatorname{sen}\nu} \operatorname{sen}\nu\cos\nu$$

Considerando el segundo y tercero, se obtiene:

$$2\nu\pi\left[b\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{bc^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right] = 2\nu\pi\frac{ba^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} = 2\pi\frac{ab\nu}{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} = \frac{2\pi ab\nu}{\operatorname{sen}\nu}$$

Luego al sustituir los valores hallados en (3), resulta definitivamente:

$$8S_1 = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu}\left(\nu + \operatorname{sen}\nu\cos\nu\right)$$

Este resultado corresponde con la fórmula (A) hallada por el procedimiento directo, y hay que advertir que en este caso los ejes de (A) y (6) son los mismos.

Para probar esta última consecuencia, basta considerar la fórmula (A)

$$8\mathrm{S}_1 = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e}\operatorname{arcsen} e \qquad (\mathrm{A})$$

Más como quiera que se tiene $b = c$, resulta $\cos\nu = \frac{c}{a} = \frac{b}{a}$ de donde:

$$\operatorname{sen}\nu = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}a}{a} = e$$

o sea

$$\nu = \operatorname{arcsen} e\,.$$

Además

$$2\pi b^2 = 2\pi ab\frac{b}{a} = 2\pi ab\cos\nu$$

De donde, por fin, sustituyendo valores en (A), se deduce definitivamente:

$$8\mathrm{S}_1 = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\nu}\left(\nu + \operatorname{sen}\nu\cos\nu\right)$$

☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼

Zaragoza, 30 Diciembre de 1901
Lauro Clariana Ricart