# Importancia de ciertas Funciones para obtener directa y fácilmente muchas Integrales de aplicación a la Mecánica Racional

1903

Atendido el desarrollo que ha tomado en esos últimos tiempos la ciencia matemática, difícil es que nadie pueda seguir su movimiento progresivo, pues su círculo de acción se extiende extraordinariamente a medida que los conceptos que la integran se elevan dentro de la esfera de los abstracto.

Bien podríamos decir que el siglo XVII, señala la línea divisoria que separa la Matemática antigua de la moderna; siglo en que tuvo lugar la revolución más poderosa dentro de las ciencias exactas, siglo del eminente matemático y filósofo Leibnitz, a quien se debe el descubrimiento de la celebre *Diferencial*.

Ante tal precioso hallazgo, bien podría creerse que los problemas cederían fácilmente bajo su influjo, empero los prosélitos del gran maestro bien pronto comprendieron que al extender su círculo de acción subían de punto las dificultades, como así sucedió al emprender el estudio de las funciones integrales que se refieren, por ejemplo, a las diferenciales de arcos de elipse e hipérbola. Con todo, fuerza es reconocer, sin embargo, que estas investigaciones han sido de gran provecho para la Ciencia, gracias a la perseverancia de esos genios que sellan nuestra época y que tanto contribuyeron en formar lo que se designa bajo el nombre de Matemática moderna.

Admirables son, bajo este punto de vista, los trabajos de Juan Bernoulli, Fagnano, Riccati, Euler, Landen, Legendre, etc., los cuales constituyen el primer período de las funciones elípticas; mas para avanzar en esa esfera de conocimientos, era indispensable abrir una nueva vía que respondiera a las exigencias del Análisis, y si bien de momento no dejó de tropezarse con grandes dificultades, vióse luego, con grata sorpresa, que las funciones doblemente periódicas procuraban elementos poderosísimos para las funciones elípticas, consideradas éstas como funciones inversas de las que se habían estudiado hasta entonces.

Inaugura ese segundo período el joven Abel, al tomar el límite superior de la integral elíptica de primera especie, como función de la misma integral, estableciendo en su virtud el célebre problema de la multiplicación dentro de la doble periodicidad. También enriquece por otra parte esa bella rama matemática, el insigne Jacobi, digno émulo de Abel, al dedicarse en particular, al problema de la transformación, origen de nuevas investigaciones realizadas por otros notables matemáticos, tales como Plana, D'Yvory, Sanio, Mayer, D'Essen, etc.

Tal es la fecundidad de las funciones a que dan origen las investigaciones precitadas; funciones que casi nadie es capaz de abarcar en sus múltiples y variados conceptos con que cabe expresarlas. Así pues, ya que tan difícil es poder llegar a la meta de semejantes conocimientos, interesa, por lo menos, señalar a la juventud estudiosa el camino mas corto y expedito que puede seguir para alcanzar siquiera los resultados más conocidos e importantes de una ciencia que forma el pedestal de otras ciencias hermanas suyas.

En este concepto conviene fijar la atención sobre el modo y forma en que deben darse los conocimientos de la Matemática, al objeto de que no resulten estériles los esfuerzos intelectuales de esa multitud respetable de jóvenes que se dedican con fe y entusiasmo al cultivo de las ciencias.

Desgraciadamente, mucho hay que corregir y enmendar respecto a la dirección que se da hoy a los estudios de la Matemática, en particular en España: verdaderamente, señores académicos, es de lamentar, por ejemplo, que en los elementos de Aritmética y Geometría, tales como se estudian en la segunda enseñanza, no se empiece por dar a conocer cuanto antes las diferentes categorías que pueden suponerse para la cantidad señalando con predilección la que se refiere a los indefinidamente pequeños, pues ella es la única que permite desarrollar la Geometría de una manera natural y lógica, sin necesidad de dar tantas vueltas y revueltas como tiene lugar hoy para resolver ciertas cuestiones a estilo de los griegos, todo efecto de esconder, sin razón que lo justifique, la cantidad indefinidamente pequeña; única cantidad que cual raíz del árbol de la Matemática da vida a la ley de continuidad como base de la Geometría.

Dejando aparte estas consideraciones, que por si solas podrían dar lugar a una nueva memoria, por hoy me concretaré tan solo a manifestar con ejemplos a propósito, las ventajas que pueden reportar en muchos casos el atender a ciertas funciones de condición para determinar de un modo directo y fácil muchas integrales que corresponden a la Mecánica racional.

## I I

Al resolver un problema en Matemáticas, pueden presentarse varios extremos diferentes que convienen distinguir muy bien; esto es, o la cuestión que se presenta se resuelve mal, o se resuelve bien, y en este último caso, cabe aun que la marcha que se adopte sea irregular o que sea la más conveniente marchando por el atajo. Desgraciadamente muchos son los que se contentan en obtener tan solo el resultado verdadero, prescindiendo si el camino que han escogido es el más conveniente o sea el más corto. Sin duda que en el estudio de la Mecánica racional es en donde se puede apreciar mejor como no siempre los autores escogen la vía más corta y natural para recabar los resultados; la fórmula de Bernoulli y las integrales correspondientes a las diferenciales binomias, podría decir que constituyen su único aparejo para obtener las integrales de la Mecánica racional, en todo lo que precede a la Dinámica de los sistemas materiales; mas no siempre son esas armas las más a propósito para el fin que se persigue, razón por la cual el cálculo resulta varias veces sumamente laborioso, siendo esto motivo suficiente para que muchos no se ocupen sino de las fórmulas finales.

Con el vivo deseo de evitar esos inconvenientes, me propuse fijarme en dichas cuestiones, y con agradable sorpresa comprendí luego que las funciones goniométricas y la gamma de Euler cual fuente fecundísima, permitían marchar por el atajo en las principales cuestiones de Mecánica. En efecto, cuando se trata de la determinación de las ecuaciones de movimiento de un punto material, las funciones circulares suelen ser las que mejor se prestan para pasar de las ecuaciones diferenciales a las finitas del movimiento; ahora si nos fijamos en el estudio del péndulo circular, no solo encontraremos de utilidad las funciones circulares, sino también las hiperbólicas y hasta las elípticas, llegando por este camino a la función de Weierstrass en el estudio del péndulo cónico.

Más si importantes son las funciones goniométricas para resolver los problemas que se indican, bajo otro punto de vista cabe afirmar que ventajas inmensas presentan también la aplicación de la función gamma de Euler para la determinación de centros de gravedad y momentos de inercia, todo lo cual se puede apreciar por los ejemplos que siguen:

# I I I

## CUESTIONES PRACTICAS DE MECÁNICA RACIONAL

1º.- En el movimiento de un cuerpo pesado que se deja caer de una altura determinada sobre la superficie de la tierra sin velocidad inicial y en el vacío, se encuentra en la ecuación siguiente:

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \int \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}\, dx \qquad (1)$$

La ecuación de condición más a propósito para resolver la integral del segundo miembro es:

$$x = a \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Así pues resulta:

$$\int \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}\, dx = \int \frac{a\cos^2\varphi\, a\, 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{a\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi} = 2a \int \cos^2\varphi\, d\varphi = a\int (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a\varphi + \frac{1}{2} a \operatorname{sen} 2\varphi = a\varphi + a\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

Además cabe escribir:

$$\frac{2x}{a} = 2\operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi,$$

de donde

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc.cos} \frac{a-2x}{a}, \qquad \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1-\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{x(a-x)}}{a}$$

Por fin, sustituyendo valores en (1) se obtiene:

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arc.cos} \frac{a-2x}{a}$$

¤ ¤ ¤ ¤

2º.- Movimiento de un cuerpo pesado, suponiendo que el peso del cuerpo es constante y que la resistencia que le opone el aire varía proporcionalmente al cuadrado de la velocidad del móvil. La ecuación diferencial del movimiento que en este caso se obtiene, es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)$$

la cual se transforma en:

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right) \quad \text{o sea} \quad \mathrm{t} = \frac{K^2}{g} \int \frac{dv}{K^2-v^2} \qquad (1)$$

Las funciones hiperbólicas resuelven inmediatamente la integral anterior. En efecto,

$$\int \frac{dv}{K^2-v^2} = \frac{1}{K} \int \frac{\frac{dv}{K}}{1-\left(\frac{v}{K}\right)^2} = \frac{1}{K} \operatorname{Arg.Th.} \frac{v}{K}$$

Luego de (1) se deduce:

$$\frac{gt}{K} = \operatorname{Arg.Th} \frac{v}{K} \qquad \text{o sea} \qquad v = K\, Th\, \frac{gt}{K} = \frac{dx}{dt}$$

De esta última igualdad se pasa a la ecuación finita del movimiento fácilmente como a continuación se expresa:

$$x = K \int \mathrm{Th}\, \frac{gt}{K}\, dt = \frac{K^2}{g} \int \mathrm{Th}\, \frac{gt}{K} \frac{gdt}{K} = \frac{K^2}{g} \int \frac{sh \frac{gt}{K} \frac{gdt}{K}}{\mathrm{Ch}\, \frac{gt}{K}} = \frac{K^2}{g} \mathrm{l.Ch}\, \frac{gt}{K} = \frac{K^2}{g} \mathrm{l}\left(\frac{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}}{2}\right)$$

3º.- En el péndulo circular para oscilaciones que no sean infinitesimales, se encuentra para el tiempo de una oscilación.

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^a \frac{dz}{\sqrt{az - z^2}} \left[ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2l}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2l}\right)^2 + \cdots \right] \qquad (1)$$

Las diferentes integrales de esta igualdad se hallan condensadas en la siguiente:

$$\int_0^a \frac{z^n dz}{\sqrt{az - z^2}}$$

El camino directo para resolver esta integral consiste en suponer $z = a\,\mathrm{sen}^2\,\varphi$ de donde,

$$\int_0^a \frac{z^n dz}{\sqrt{az - z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^{n+1}\,\mathrm{sen}^{2n}\,\varphi\, 2\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{a\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi} = 2a^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n}\,\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2a^n \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 3.1}{2n(2n-2)\cdots\cdots 4.2} . \frac{\pi}{2}$$

Dando ahora valores a *n* se obtiene para (1),

$$\mathrm{T} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{a}{2l}\right)^2 + \cdots \right]$$

¤ ¤ ¤ ¤

4º.- Si en el péndulo anterior se suponen oscilaciones cualesquiera, puede resolverse el problema directamente por medio de la integral elíptica de primera especie, sin necesidad de acudir a las series. En efecto, de la ecuación diferencial.

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\,\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \qquad (1)$$

pueden deducirse las consecuencias siguientes:

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta\,,\qquad 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$

$$\cos\theta=1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,,\qquad \cos\alpha=1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\alpha=2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

En el supuesto de que la velocidad angular del péndulo sea $n=\sqrt{\frac{g}{l}}$ , se obtiene de (1)

$$\frac{d\,\theta}{dt}=-2n\sqrt{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}\quad \text{de donde}\quad nt=\int_0^{\theta}\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

Ahora si en esta igualdad se supone según Lagrange $\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}=\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sen}\varphi$, se deduce:

$$nt=\int_0^{\varphi}\frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}}$$

Esta fórmula para una oscilación se expresa por la integral que se llama completa y cuyos valores según el módulo, se hallan calculados de modo que según la notación de Legendre resulta definitivamente

$$\mathrm{n\,T}=\mathrm{F}(\alpha)=\mathrm{F}\left(\varphi,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$$

¤ ¤ ¤ ¤

5º.- Determinación del centro de gravedad de la superficie comprendida entre las dos ramas de la cisoide y la asíntota respectiva. Sea la ecuación de la cisoide

$$y=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}$$

En este caso para la determinación del centro de gravedad basta atender a la fórmula:

$$\chi = \frac{\int_0^a yxdx}{\int_0^a ydx} \quad \text{al sustituir valores resulta} \quad \chi = \frac{\displaystyle\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}}{\displaystyle\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}}$$

Para determinar cada una de dichas integrales supondremos: $x = a\,\text{sen}^2\varphi$ de donde:

$$\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{\sqrt{a-x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^{\frac{5}{2}}\,\text{sen}^5\varphi.2a\,\text{sen}\varphi\cos\varphi d\varphi}{a^{\frac{1}{2}}\cos\varphi} = 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^6\varphi d\varphi = 2a^3\,\frac{5.3.1}{6.4.2}\,\frac{\pi}{2} = a^3\,\frac{5.3.1}{6.4.2}\,\pi$$

$$\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a-x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^{\frac{3}{2}}\,\text{sen}^3\varphi.2a\,\text{sen}\varphi\cos\varphi d\varphi}{a^{\frac{1}{2}}\cos\varphi} = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\varphi d\varphi = 2a^2\,\frac{3.1}{4.2}\,\frac{\pi}{2} = a^2\,\frac{3.1}{4.2}\,\pi$$

Así pues,

$$\chi = \frac{\pi a^3\,\frac{5.3.1}{6.4.2}}{\pi a^2\,\frac{3.1}{4.2}} = \frac{5}{6}a$$

¤ ¤ ¤ ¤

6º.- Determinación del centro de gravedad de la superficie de la elipse correspondiente al primer cuadrante suponiendo su centro en el origen, según la formula de Dirichlet.

La fórmula de Dirichlet, en el caso de dos variables, se debe expresar por:

$$\iint x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy = \frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)} \qquad (1)$$

conforme a la forma canónica: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} = 1$ que en el caso presente se resuelve en:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Las fórmulas que dan las coordenadas del centro de gravedad, son:

$$\chi = \frac{\int\int xd\,dy}{\int\int dx\,dy,} \qquad \Upsilon = \frac{\int\int yd\,dy}{\int\int dx\,dy,}$$

Al tomar la integral $\int\int xd\,x\,dy$ comparándola con (1), resulta inmediatamente,

$$\int\int xdx\,dy = \int\int x^{2-1}y^{1-1}dx\,dy = \frac{a^2b}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{a^2b}{3}$$

Además, $\int\int dx\,dy = \frac{\pi\,ab}{4}$ luego tendremos: $\chi = \frac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi\,ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$. De un modo análogo, se deduce, $\Upsilon = \frac{4b}{3\pi}$ . Y por fin, para el círculo basta considerar *a* = *b* = *r*, de donde:

$$\chi = \frac{4r}{3\pi} \qquad \Upsilon = \frac{4r}{3\pi}$$

¤ ¤ ¤ ¤

7º.- Coordenadas del centro de gravedad correspondiente al volumen del elipsoide comprendido en el primer ángulo triedro por medio de la fórmula de Dirichlet. Sea la fórmula:

$$\int\int\int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dx\,dy\,dz = \frac{a^{\mathrm{p}}b^{\mathrm{q}}c^{\mathrm{r}}}{\alpha\beta\gamma}\frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{p}}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\mathrm{q}}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\mathrm{r}}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\mathrm{p}}{\alpha}+\frac{\mathrm{q}}{\beta}+\frac{\mathrm{r}}{\gamma}\right)}$$

En este caso la forma canónica es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

Además las fórmulas del centro de gravedad, son:

$$\chi = \frac{\int\int\int xdxdydz}{\int\int\int dxdydz} \qquad \mathrm{Y} = \frac{\int\int\int ydxdydz}{\int\int\int dxdydz} \qquad \mathrm{Z} = \frac{\int\int\int zdxdydz}{\int\int\int dxdydz}$$

Al tomar la integral $\int\int\int xdxdydz$, se tiene,

$$\int\int\int xdxdydz = \int\int\int x^{2-1}y^{1-1}z^{1-1}dxdydz = \frac{a^2bc}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^2bc}{16}\pi$$

Por otra parte $\int\int\int dxdydz = \frac{\pi abc}{6}$. Así pues resulta inmediatamente:

$$\chi = \frac{\frac{a^2bc}{16}\pi}{\frac{\pi abc}{6}} = \frac{3}{8}a$$

De un modo análogo resultaría:

$$\mathrm{Y} = \frac{3}{8}b \qquad \mathrm{Z} = \frac{3}{8}c$$

Por fin, si se tratara de la esfera, tendríamos:

$$\chi = \mathrm{Y} = \mathrm{Z} = \frac{3}{8}r$$

siendo $r$ el radio de la esfera.

¤ ¤ ¤ ¤

8º.- Cuando se trata de la atracción sobre un punto de masas que tienen la forma de cilindros que se extienden indefinidamente en los dos sentidos y cuyas generatrices son paralelas a una recta dada, el problema depende de la integral siguiente:

$$\int_{-\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} \frac{dz}{\left(z^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La ecuación directa de condición en este caso, será $z = r\,\mathrm{tg}\,\theta$, de donde:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{z}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}} = \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2}+1}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Luego

$$\int_{-\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} \frac{dz}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{r^3\left(1+\mathrm{tg}^2\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\,\theta = \frac{1}{r^2}\left(\mathrm{sen}\,\theta\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{r^2}$$

¤ ¤ ¤ ¤

9º.- Cuando se trata del equilibrio de un hilo homogéneo pesado, se encuentra como ecuación diferencial de la línea que afecta dicho hilo:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{a}$$

Para integrarla no hay más que recordar las funciones hiperbólicas. En efecto, se tiene,

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{a}\text{, de donde, Arg.Sh}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}\ \text{ o sea }\ \frac{dy}{dx} = \mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}.$$

Luego para la ecuación finita, resulta inmediatamente

$$y = \int \mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\,dx = a\int \mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\,\frac{dx}{a} = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

¤ ¤ ¤ ¤

10º.- Momento de inercia y radio de giro de la elipse respecto a un eje perpendicular a su plano y que pase por el centro de gravedad de la misma. El momento de inercia se expresa por:

$$\mathrm{M_z} = \int\int \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = \int\int x^2 dx\,dy + y^2 dx\,dy$$

Aplicando la fórmula de Dirichlet a la primera integral del segundo miembro, se tiene,

$$\int\int x^2\,dx\,dy = \int\int x^{3-1}y^{1-1}dx\,dy = \frac{a^3b}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^3b\,\frac{1}{2}\,\pi}{4.2} = \frac{\pi\,a^3b}{16}$$

Para toda la elipse, $\pi\,ab\dfrac{a^2}{4}$ respecto al eje y. De un modo análogo, se tiene $\pi\,ab\dfrac{b^2}{4}$ respecto al eje x. Luego en definitiva:

$$\mathrm{M_z} = \pi\,ab\left[\frac{a^2+b^2}{4}\right]$$

En el supuesto de que la masa específica sea igual a la unidad, resulta que $\pi\,ab$ representa la masa total, así pues: $\mathrm{M_z} = \mathrm{M}\dfrac{a^2+b^2}{4}$.

Para el radio de giro como $\mathrm{M_z} = \mathrm{M}\,\rho^2$, se tiene $\rho^2 = \dfrac{a^2+b^2}{4}$. Si se tratara del círculo, como $a = b = r$, resultaría $\rho^2 = \dfrac{r^2}{2}$.

¤ ¤ ¤ ¤

11º.- Momento de inercia del elipsoide respecto a uno de los ejes. Aplicación de la formula de Dirichlet.

$$\mathrm{A_z} = \int\int\int \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz = \int\int\int x^2 dx\,dy\,dz + \int\int\int y^2 dx\,dy\,dz$$

Considerando la primera integral se tiene:

$$\iiint x^2 dx\,dy\,dz + \iiint x^{3-1}y^{1-1}z^{1-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{a^3bc}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a^3bc}{8}\,\frac{\frac{1}{2}(\pi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^3bc}{30}\pi$$

Para todo el elipsoide, resulta:

$$\frac{8}{30}a^3bc\pi = \frac{4}{15}a^3bc\pi = \frac{4\pi abc}{3}\,\frac{a^2}{5}$$

De un modo análogo tendremos para la otra integral.

$$\frac{4\pi abc}{3}\,\frac{b^2}{5}$$

En totalidad para el momento de inercia respecto al eje *z* suponiendo $\frac{4\pi abc}{3} = \mathrm{M}$ se deduce:

$$\mathrm{A_z} = \mathrm{M}\,\frac{a^2+b^2}{5}$$

Si se tratara de la esfera, tendríamos $a = b = r$, luego:

$$\mathrm{A_z} = \mathrm{M}\,\frac{2}{5}r^2$$

¤ ¤ ¤ ¤

12ª.- Determinar el centro de presión de un círculo sumergido en un líquido, siendo tangente a la línea de intersección de su plano con la superficie de separación del líquido con la atmósfera. Fórmula fundamental:

$$\chi = \frac{\int_a^b yx^2 dx}{\int_a^b yx\,dx}$$

En este caso debe tomarse la ecuación de la circunferencia referida al vértice, esto es,

$$y = \sqrt{2rx - x^2}$$

Si se supone $2r = D$, resulta:

$$\chi = \frac{\int_0^D x^2 dx \sqrt{Dx - x^2}}{\int_0^D x\, dx \sqrt{Dx - x^2}}$$

La ecuación de condición que interesa en este caso es, es $x = D \operatorname{sen}^2 \varphi$, luego tendremos:

$$\chi = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} D^2 \operatorname{sen}^4 \varphi\, 2D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} D \operatorname{sen}^2 \varphi\, 2D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi}$$

de donde:

$$\chi = \frac{D^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi}{D^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi} \qquad (1)$$

Además, se tiene:

$$\operatorname{sen}^6 \varphi \cos^2 \varphi = \operatorname{sen}^6 \varphi - \operatorname{sen}^8 \varphi$$

$$\operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \varphi = \operatorname{sen}^4 \varphi - \operatorname{sen}^6 \varphi$$

Así pues:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \varphi\, d\varphi = \left( \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{5.3.1}{8.6.4.2}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi\, d\varphi = \left( \frac{3}{4}\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3.1}{6.4.2}\frac{\pi}{2}$$

Al sustituir los valores hallados en (1) se obtiene en el eje de simetría la situación del punto como centro de presión, esto es:

$$\chi = \frac{5}{8} D$$

# I V

No terminaré la presente memoria sin manifestar que las deficiencias que se notan en la enseñanza de la Matemática, pueden ser causa suficiente para que la juventud estudiosa se desanime por falta de buena base. En España tenemos un buen ejemplo, pues la importante asignatura de Cálculos diferencial e integral en las Universidades, se ha reducido hoy a simples elementos de cálculo infinitesimal, como si fuese demasiado lo que se explicaba antes, y esto que en muchos programas de Cálculo brillaban por su ausencia cuestiones tan importantes como el estudio de la gamma de Euler, etc., más esto es poco, pues conforme al cuestionario, últimamente formulado para el grado de licenciado en Ciencias exactas, hemos de prescindir hasta de la integración de ecuaciones *diferenciales* entre derivadas parciales; y por último, a fin de que el cuadro resulte homogéneo mientras existen clases prácticas para todas las demás asignaturas de ciencias, se ha considerado prudente privar a la de Cálculos de tan fecundo recurso. ¿No sé cuál puede ser la causa de semejante anomalía, precisamente en los momentos en que tanto se suspira por la regeneración de nuestra patria? ¿Tendrá ello por origen algún fin particular?

Todo cabe en nuestra desgraciada España, pero lo cierto es que los conocimientos adquiridos oficialmente en las Universidades de España, hoy, no bastan para que los licenciados en Ciencias exactas puedan resolver los problemas que presentan la Física, Astronomía, etc.

A vuestro buen talento fío, señores académicos, para comprender que el progreso científico en España no puede tener lugar mientras no se levante de la postración en que se halla la ciencia de Leibnitz, la más importante de todas para que se pueda adelantar cuanto sea posible dentro de la fecunda y hermosa ley de la continuidad, ley a la cual se halla encadenada la naturaleza en todas sus manifestaciones.

Barcelona a 30 de Noviembre de 1903
Lauro Clariana Ricart