Breves consideraciones

sobre

la Aceleración Central

1906

Conocida es la importancia que se debe conceder al movimiento armónico, como base de los movimientos vibratorios, cuyos constituyen hoy el fundamento de la Física matemática.

Cuando un punto móvil se halla sujeto a una aceleración, que se dirige constantemente hacia un punto fijo, obrando siempre en la misma dirección, y siendo proporcional a la distancia que separa el punto móvil del fijo, resulta el movimiento armónico simple.

Ahora bien; cuando la aceleración es función, en general, de dicha distancia y, además, se consideran los movimientos isócronos, se origina una parte importante del estudio correspondiente al *Tautocronismo*, y, en este concepto, bien cabe considerar el movimiento armónico como un caso particular del anterior.

Generalmente, los autores de Mecánica estudian el movimiento armónico directamente, esto es, suponiendo la aceleración proporcional a la distancia del punto móvil al punto fijo; empero, también cabe deducir las consecuencias del precitado movimiento, partiendo de una fórmula más general, la cual, al propio tiempo que permite obtener los resultados con más rapidez, de origen a que se pueda apreciar una vez más la importancia que debe atribuirse a las integrales de Euler.

El problema, pues, que tratamos de desarrollar, puede formularse en los términos siguientes: «*Determinar el tiempo que tardará un punto móvil en alcanzar a otro punto fijo, actuando en el primero una aceleración proporcional a la **enésima** potencia de la distancia al punto fijo, y sin velocidad inicial*.»

La ecuación diferencial, en este caso, cabe expresarla por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x^n$$

siendo ω una constante. Fácilmente se conciben las transformaciones que a continuación se expresan:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}dt = -2\omega^2 x^n dx, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2\omega^2 \frac{x^{n+\mathrm{I}}}{n+\mathrm{I}} + 2\omega^2 \frac{x_0^{n+\mathrm{I}}}{n+\mathrm{I}};$$

x_0 representa la posición inicial del móvil para $t = 0$. Respecto a la velocidad inicial v_0 aquí se considera nula.

Luego se deducen las igualdades siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{2}{n+\mathrm{I}}} \ \sqrt{x_0^{n+\mathrm{I}} - x^{n+1}}$$

$$dt = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \ \frac{dx}{\sqrt{x_0^{n+\mathrm{I}} - x^{n+\mathrm{I}}}}$$

de donde, al integrar definitivamente, resulta:

$$T = \frac{\mathrm{I}}{\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \int_0^{x_0} \left(x_0^{n+\mathrm{I}} - x^{n+\mathrm{I}}\right)^{-\frac{\mathrm{I}}{2}} dx$$

al suponer: $x = x_0 v$ se obtiene:

$$T = \frac{\mathrm{I}}{\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \ x_0^{\frac{\mathrm{I}-n}{2}} \int_0^{s} \left(\mathrm{I} - v^{n+\mathrm{I}}\right)^{-\frac{1}{2}} dv$$

Esta integral puede referirse a la integral de primera especie de Euler, con solo suponer $v^{n+\mathrm{I}} = z$ de donde:

$$T = x_0^{\frac{\mathrm{I}-n}{2}} \ \frac{\mathrm{I}}{(n+\mathrm{I})\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \int_0^{s} z^{\frac{\mathrm{I}}{n+\mathrm{I}} - \mathrm{I}} \left(\mathrm{I} - z\right)^{-\frac{1}{2}} dz$$

o sea

$$T = x_0^{\frac{\mathrm{I}-n}{2}} \ \frac{\mathrm{I}}{(n+\mathrm{I})\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \ B\left[\frac{\mathrm{I}}{n+\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{I}}{2}\right]$$

Según la integral de segunda especie de Euler, tendríamos, por fin,

$$T = x_0^{\frac{\mathrm{I}-n}{2}} \ \frac{\mathrm{I}}{(n+\mathrm{I})\omega} \sqrt{\frac{n+\mathrm{I}}{2}} \ \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{I}}{n+\mathrm{I}}\right)\Gamma\left(\frac{\mathrm{I}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{I}}{n+\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{I}}{2}\right)}$$

De modo que, si suponemos $n = \mathrm{I}$, hállase

$$T = \frac{\mathrm{I}}{2\omega} \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{I}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mathrm{I}}{2}\right)}{\Gamma(s)} = \frac{\pi}{2\omega} \qquad [1]$$

Fórmula, que no solo da el tiempo para que el punto móvil pase desde su posición inicial al punto fijo, sino que nos dice que dicho tiempo es independiente de la posición inicial del punto móvil.

Este resultado concuerda perfectamente con el que nos ofrece el movimiento armónico estudiado directamente. En efecto, según la definición dada a esta clase de movimientos, podemos establecer la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

ecuación diferencial lineal, de coeficientes constantes, la cual se integra sencillamente por el método de Euler, obteniéndose

$$x = C_1 e^{\omega t\sqrt{-\mathrm{I}}} + C_2 e^{-\omega t\sqrt{-\mathrm{I}}}$$

o sea

$$x = C_1\left(\cos\omega t + \sqrt{-\mathrm{I}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\right) + \mathrm{C}_2\,(\cos\omega t - \sqrt{-\mathrm{I}}\,\mathrm{sen}\,\omega t) = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2)\cos\omega t + \sqrt{-\mathrm{I}}\,(\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t =$$

$$= A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Para t = 0, se deduce $x_0 = A$ y al tomar la derivada:

$$\frac{dx}{dt} = v = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t,\ \text{ resulta }\ \frac{v_0}{\omega} = B$$

Así, en definitiva, tendremos:

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Mas al suponer la velocidad inicial igual a cero, como en el caso anterior, se tiene:

$$x = x_0\cos\omega t \qquad [2]$$

Esta es la verdadera expresión, en el caso supuesto, del movimiento armónico.

Ahora bien, fácilmente se concibe que, si consideramos una circunferencia de radio x_0 y suponemos los diferentes puntos de la misma proyectados sobre el diámetro que tomamos por eje ***x***, y como arranque del movimiento, dichas proyecciones podrán considerarse como posiciones de otro punto móvil en correspondencia siempre con el primero. Y como quiera que los valores en ***x***, que se obtienen en esta proyección, dan origen a una fórmula igual a la [2] (en el concepto de que la velocidad angular del movimiento uniforme de la circunferencia se exprese por ω); por esto se dice que el movimiento proyectado es armónico.

Así, pues, si sobre la dirección de un radio cualquiera, tomamos varios puntos, ellos darán origen a diferentes circunferencias que tendrán todas por centro único el punto fijo.

Al designar los radios respectivos por $x_0, x'_0, \cdots,$ correspondientes a las velocidades $v_0, v'_0, \cdots,$ se comprende que, por las condiciones especiales del problema, tendrá que verificarse:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{v'_0}{x'_0} = \omega = \textit{velocidad angular común}$$

Además, si llamamos τ el tiempo necesario para que x_0 de una vuelta completa, tiempo correspondiente al que se designa bajo el nombre de ***período***, debe resultar:

$$v_0\tau = 2\pi x_0 = x_0\omega\tau \quad \text{de donde} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad [3]$$

Para otro punto, tal como x'_0 tendríamos:

$$v'_0\tau' = 2\pi x'_0 = x'_0\omega\tau' \quad \text{luego} \quad \tau' = \frac{2\pi}{\omega} \quad [4]$$

Al comparar [3] con [4] se deduce $\tau = \tau'$. Luego los movimientos armónicos que resultan de las proyecciones de los puntos de las diferentes circunferencias precitadas, son ***isócronos***; o, bajo otros términos: cualesquiera que sean las amplitudes que se consideren como representantes de los diferentes radios de las circunferencias, el tiempo que transcurre para que los diferentes puntos movibles, en dirección del diámetro, vuelvan a sus posiciones iniciales, es el mismo para todos. Esta es la consecuencia que hemos sacado directamente de la fórmula general.

Por fin, para probar que las expresiones de los tiempos también se corresponden en los dos casos, bastará considerar un cuarto de período en [3], para que el tiempo sea el necesario para pasar el punto móvil de su posición inicial al punto fijo, tal como hemos considerado en el problema general.

De esta suerte resulta $\frac{\tau}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$. Y como quiera que hemos hallado, según [1]

$$T = \frac{\pi}{2\omega}, \quad \text{se tiene} \quad T = \frac{\tau}{4}$$

De ahí se infiere que la fórmula general, en el concepto de que n = I, procura de un modo rápido las consecuencias que se deducen del movimiento armónico simple, estudiado directamente.

Mayo - Octubre 1.906
Lauro Clariana Ricart