Integrales

Logaritmo – Circulares

1906

En el presente artículo, propóngome dar a conocer un grupo de integrales muy interesante, y del cual se ocupan poco o nada los autores modernos que tratan del cálculo infinitesimal

Esta integrales las designo bajo el nombre de ***Integrales logarítmico-circulares***, porque contienen, dentro del signo integral, alguna función logarítmica, la cual a la vez depende de otras circulares.

No he vacilado en dar explicación detallada de todos los cálculos que requiere el desarrollo de las precitadas integrales, pues entiendo que la demasiada condensación en matemáticas, es origen de desaliento y abandono por parte de algunos lectores, resultando infructíferos muchos de los trabajos científicos que salen a diario, y, sobre todo, si llevan el sello de la matemática superior.

☼ ☼ ☼

Empezaremos por el estudio de la integral siguiente:

$$\int l\,(\mathrm{I}+n\cos x)dx$$

de la cual deduciremos luego muchas otras particulares de grande interés.

Ante todo, conviene desarrollar bajo forma de serie, la función que está dentro del signo integral:

$$l(\mathrm{I}+n\cos x)=n\cos x-\frac{\mathrm{I}}{2}n^2\cos^2 x+\frac{\mathrm{I}}{3}n^3\cos^3 x-\frac{\mathrm{I}}{4}n^4\cos^4 x+\cdots \quad (\mathrm{A})$$

Las potencias de estos cosenos, en función de los arcos múltiplos, se determinaran por medio de la fórmula trigonométrica siguiente:

$$\cos mx=\cos\frac{m\pi}{2}\left(\mathrm{I}-\frac{m^2}{2}\cos^2 x+\frac{m^2\left(m^2-4\right)}{1.2.3.4}\cos^4 x\cdots\right)+m\,\mathrm{sen}\frac{m\pi}{2}\left(\cos x-\frac{m^2-\mathrm{I}}{1.2.3}\cos^3 x+\cdots\right)^{(*)}$$

(*) Para darse cuenta exacta del desarrollo de dicha fórmula, comenzaremos por considerar la función $n=\cos(m.\arccos x)$ de donde resulta:

$$\frac{dn}{dx}=\pm\frac{m.\mathrm{sen}(m.\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d^2n}{dx^2}=\pm\frac{m\,x\,\mathrm{sen}(m.\arccos x)}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-\frac{m^2\cos(m.\arccos x)}{\left(1-x^2\right)} \qquad \left(1-x^2\right)\frac{d^2n}{dx^2}-x\frac{dn}{dx}+m^2n=0$$

Derivando p veces consecutivas esta igualdad, o aplicando, para mayor rapidez, la fórmula de Leibnitz, se tiene:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{p+2}n}{dx^{p+2}}-2px\frac{d^{p+1}n}{dx^{p+1}}-p^2\frac{d^pn}{dx^p}+p\frac{d^pn}{dx^p}-x\frac{d^{p+1}n}{dx^{p+1}}-p\frac{d^pn}{dx^p}+m^2\frac{d^pn}{dx^p}=0$$

Siendo x = 0, se obtiene:

$$\left(\frac{d^{p+2}n}{dx^{p+2}}\right)_0=\left(p^2-m^2\right)\left(\frac{d^pn}{dx^p}\right)_0 \qquad [a]$$

Ahora bien; en el concepto de referirnos al arco menor de todos los que podríamos considerar, cabe escribir

$$n_0=\cos m\left(\arccos 0\right)=\cos m\frac{\pi}{2}, \qquad \left(\frac{dn}{dx}\right)_0=m\,\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2}$$

Al dar valores particulares a p, según la fórmula general [a], resulta:

$$p=1,\quad \left(\frac{d^3n}{dx^3}\right)_0=\left(1-m^2\right)\left(\frac{dn}{dx}\right)_0=\left(1-m^2\right).m\,\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2},$$

$$p=3,\quad \left(\frac{d^5n}{dx^5}\right)_0=\left(9-m^2\right)\left(1-m^2\right).m\,\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2},$$

…………………………………………………………………

$$p=2,\quad \left(\frac{d^4n}{dx^4}\right)_0=\left(4-m^2\right)\left(\frac{d^2n}{dx^2}\right)_0=-\left(4-m^2\right)m^2\cos m\frac{\pi}{2}$$

$$p=4,\quad \left(\frac{d^6n}{dx^6}\right)_0=-\left(16-m^2\right)\left(4-m^2\right).m^2\cos m\frac{\pi}{2}$$

…………………………………………………………………

Por inducción, tendremos

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^{2n+2}n}{dx^{2n+2}}&=(-1)^{n+1}m^2\left(m^2-4\right)\left(m^2-16\right)\cdots\cdots\left(m^2-4n^2\right)\cos m\frac{\pi}{2},\\ \frac{d^{2n+1}n}{dx^{2n+1}}&=(-1)^{n+1}\left(m^2-1\right)\left(m^2-9\right)\cdots\cdots\left[m^2-(2n-1)^2\right]m\,\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

Si suponemos $\cos x = y$, al propio tiempo que se aplique la fórmula de Mac-Laurin, para tener el desarrollo en serie de la función dada en potencias de $\cos x$, resulta:

$$n=n_0+\left(\frac{dn}{dy}\right)_0 y+\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)_0\frac{y^2}{1.2}+\left(\frac{d^3n}{dy^3}\right)_0\frac{y^3}{1.2.3}+\cdots$$

o sea, en el supuesto de referir las derivadas (γ) a y,

$$n=\cos mx=\cos m\frac{\pi}{2}+m\,\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2}\times\cos x-\frac{m^2}{1.2}\cos m\frac{\pi}{2}\times\cos^2 x-\frac{m\left(m^2-1\right)}{1.2.3}\mathrm{sen}\,m\frac{\pi}{2}\times\cos^2 x+\cdots$$

Así pues, tendremos, en definitiva:

$$\cos mx=\cos\frac{m\pi}{2}\left(1-\frac{m^2}{2}\cos^2 x+\frac{m^2\left(m^2-4\right)}{1.2.3.4}\cos^4 x\cdots\right)+m\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi}{2}\left(\cos x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x+\cdots\right)$$

Dando valores particulares a *m*, se obtienen las igualdades que a continuación se expresan:

$$m=2,\qquad \cos 2x=-1+2\cos^2 x,$$

$$m=3,\qquad \cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x,$$

$$m=4,\qquad \cos 4x=1-8\cos^2 x+8\cos^4 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

de donde se deduce:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x,$$

$$\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sustituyendo estos valores en [**A**], se tiene

$$l(1+n\cos x)=n\cos x-\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{3}n^3\left(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x\right)-\frac{1}{4}n^4\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)+\cdots=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}\frac{3}{8}n^4-\cdots\cdots+\left[n+\frac{1}{3}\frac{3}{4}n^3+\cdots\cdots\right]\cos x+\cdots\cdots\cdots\qquad [\mathrm{B}]$$

Si suponemos ahora:

$$l(1+n\cos x)=-A+B\cos x-C\cos 2x+D\cos 3x\cdots\cdots[\mathrm{C}]$$

al comparar este resultado con el anterior, se deduce:

$$A=\frac{1}{2}.\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{n^4}{4}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{n^6}{6}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\frac{n^8}{8}+\cdots$$

de donde

$$n\frac{dA}{dn}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}\frac{3}{4}n^4+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}n^6+\cdots$$

y, en virtud del binomio

$$\left(1-n^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}\frac{3}{4}n^4+\cdots$$

resulta

$$n.\frac{d\,A}{dn}=\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}-\mathrm{I},\quad \text{o sea}\quad d\,A=\frac{dn}{n\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}-\frac{dn}{n}$$

Para integrar esta ecuación, sea $n=\frac{\mathrm{I}}{t}$, luego

$$\frac{dn}{n\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}=-\frac{dt}{\sqrt{t^2-\mathrm{I}}}=-l\left(t+\sqrt{t^2-\mathrm{I}}\right)=l\frac{\mathrm{I}}{t+\sqrt{t^2-\mathrm{I}}}=l\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}$$

Además, como

$$\int -\frac{dn}{n}=-l\,n$$

en totalidad, se hallará:

$$A=l\left[\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}\right]-l\,n=l\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n^2}+C$$

Digno de mención es que si n = 0, anula la función $l(\mathrm{I}+n\cos x)$, es preciso que A se anule también según el teorema de Descartes. Ahora, como quiera que

$$\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n^2},$$

se reduce a la forma indeterminada cuando n = 0, según el análisis ordinario, basta atender a las derivadas respectivas de los dos términos del quebrado anterior, para deducir su verdadero valor, esto es:

$$\frac{\frac{2n}{2\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}}{2n}=\frac{\mathrm{I}}{2\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}$$

y para que n = 0, resulta $\frac{\mathrm{I}}{2}$. Así, pues, tendremos:

$$l\frac{\mathrm{I}}{2}+C=0$$

de donde

$$C=l\,2$$

luego

$$A = l\,\frac{2-2\left(\mathrm{I}-n^2\right)^{\frac{1}{2}}}{n^2}$$

De un modo análogo de [**B**] y [**C**] resulta:

$$\frac{\mathrm{I}}{2}B = \frac{\mathrm{I}}{2}n + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{n^3}{3} + \frac{\mathrm{I}.3.5}{2.4.6}\frac{n^5}{5} + \cdots$$

$$\frac{n^2 d\,B}{2dn} = \frac{\mathrm{I}}{2}n^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}n^4 + \frac{\mathrm{I}.3.5}{2.4.6}n^6 + \cdots = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I}-n^2}} - \mathrm{I}$$

$$d\,B = 2\left(\frac{dn}{n^2\sqrt{\mathrm{I}-n^2}} - \frac{dn}{n^2}\right)$$

Para integrar esta ecuación diferencial, admitiremos la igualdad de condición $n = \cos x$, luego

$$\frac{dn}{n^2\sqrt{\mathrm{I}-n^2}} = \frac{-\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x\,\sqrt{\mathrm{I}-\cos^2 x}} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Así, pues, se tiene

$$\int \frac{dn}{n^2\sqrt{\mathrm{I}-n^2}} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{tang} x = -\frac{\sqrt{\mathrm{I}-\cos^2 x}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}$$

Respecto a la integral de $\left(-\frac{dn}{n^2}\right)$, se deduce $\int -\frac{dn}{n^2} = \frac{\mathrm{I}}{n}$

De modo, que en totalidad, resulta:

$$B = 2\left(\frac{-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n} + \frac{\mathrm{I}}{n}\right) = 2\,\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}$$

Si atendemos al valor hallado para *A*, se deduce inmediatamente

$$A = l\,\frac{B}{n}$$

Para obtener los valores de los demás coeficientes *C, D, E*………., basta diferenciar la ecuación [**C**]. En efecto, se tiene:

$$\frac{-n\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{\mathrm{I}+n.\cos x}=-B.\mathrm{sen}\,x.dx+2C\,\mathrm{sen}\,2x.dx-3D.\mathrm{sen}\,3x.dx+\cdots$$

A este punto interesa transformar en sumas los productos

$$\mathrm{sen}\,x.\cos x,\qquad \mathrm{sen}\,2x.\cos x,\qquad \mathrm{sen}\,3x.\cos x\cdots,$$ (**)

y, en su virtud, tendremos:

$$-n.\mathrm{sen}\,x.dx=-(\mathrm{I}+n.\cos x)B\,\mathrm{sen}\,x.dx+2(\mathrm{I}+n\cos x)\,C\,\mathrm{sen}\,2x.dx-3(\mathrm{I}+n\cos x)D\,\mathrm{sen}\,3x.dx+\cdots$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
0=-B & \mathrm{sen}\,x+2C & \mathrm{sen}\,2x-3D & \mathrm{sen}\,3x+\cdots \\
+C\,n & -\frac{1}{2}Bn & +C\,n & \\
+n & -\frac{3}{2}Dn & +\frac{4}{2}En &
\end{array}$$

Por consiguiente

$$C=\frac{B-n}{n},\qquad D=\frac{4C-Bn}{3n},\qquad E=\frac{6D-2Cn}{4n},\cdots$$

y, como quiera que

$$B=2\,\frac{\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}}{n}$$

resulta:

(**)Para la transformación de dichos productos en sumas, atenderemos a la fórmula general de trigonometría:

$$A+\mathrm{sen}B=2\,\mathrm{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

de donde resulta:

$$\mathrm{sen}x.\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B),\qquad \frac{A+B}{2}=x,\qquad \frac{A-B}{2}=x,\quad A=2x,\quad B=0,$$

$$\mathrm{sen}x.\cos x=\frac{1}{2}\mathrm{sen}2x;$$

$$\mathrm{sen}2x.\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B),\qquad \frac{A+B}{2}=2x,\qquad \frac{A-B}{2}=x,\quad A=3x,\quad B=x,$$

$$\mathrm{sen}2x.\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}3x+\mathrm{sen}x);$$

$$\mathrm{sen}3x.\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B),\qquad \frac{A+B}{2}=3x,\qquad \frac{A-B}{2}=x,\quad A=4x,\quad B=2x,$$

$$\mathrm{sen}3x.\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}4x+\mathrm{sen}2x);$$

………

$$B=\frac{2}{\mathrm{I}}\,\frac{\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}}{n},$$

$$C=\frac{2\,\dfrac{\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}}{n}-n}{n}=\frac{2}{2}\,\frac{\left(\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}\right)^2}{n^2},$$

$$D=\frac{4C-Bn}{3n}=\frac{4\,\dfrac{\left(\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}\right)^2}{n^2}-2\left(\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}\right)}{3n}=\frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{I}-\sqrt{-\mathrm{I}-n^2}}{n}\right)^3$$

Continuando los cálculos, o si se quiere por simple inducción, se halla:

$$E=\frac{2}{4}\left(\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}\right)^4,\qquad F=\frac{2}{5}\left(\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}\right)^5,\cdots\cdots$$

Si, para abreviar, suponemos

$$\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}=m,$$

al sustituir valores en la función primitiva [**C**], se obtiene:

$$l\left(\mathrm{I}+n.\cos x\right)=-l\,\frac{2m}{n}+\frac{2}{\mathrm{I}}\,m\cos x-\frac{2}{2}\,m^2\cos 2x+\frac{2}{3}\,m^3\cos 3x\cdots\qquad[\mathrm{a}]$$

resultando, para la integral definitiva propuesta desde un principio,

$$\boxed{\int dxl\left(\mathrm{I}+n.\cos x\right)=-xl\,\frac{2m}{n}+\frac{2}{\mathrm{I}}\,m\,\mathrm{sen}\,x-\frac{2}{4}\,m^2\,\mathrm{sen}\,2x+\frac{2}{9}\,m^3\,\mathrm{sen}\,3x-\frac{2}{16}\,m^4\,\mathrm{sen}\,4x+\frac{2}{25}\,m^5\,\mathrm{sen}\,5x\cdots+C}$$

Esta es la fórmula general que sirve de base para resolver los diferentes casos particulares de que nos vamos a ocupar.

☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼

Para hallar la integral

$$\int l\left(a+\cos x\right)dx$$

la descompondremos del modo siguiente:

$$\int l\left(a+\cos x\right)dx=\int l\,a\left(\mathrm{I}+\frac{\mathrm{I}}{a}\cos x\right)dx=\int\left[l\,a+l\left(\mathrm{I}+\frac{\mathrm{I}}{a}\cos x\right)\right]dx=xla+\int l\left(\mathrm{I}+\frac{\mathrm{I}}{a}\cos x\right)dx$$

Esta última integral se puede referir a la integral anterior, suponiendo $n=\frac{\mathrm{I}}{a}$. En este concepto, se tiene:

$$m=\frac{\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-n^2}}{n}=a-\sqrt{a^2-\mathrm{I}}$$

luego en definitiva, resulta:

$$\int l\left(a+\cos x\right)dx=xla-xl2a\left(a-\sqrt{a^2-\mathrm{I}}\right)+\frac{2}{\mathrm{I}}\left(a-\sqrt{a^2-\mathrm{I}}\right)\operatorname{sen}x-\frac{2}{4}\left(a-\sqrt{a^2-\mathrm{I}}\right)^2\operatorname{sen}2x+\frac{2}{9}\left(a-\sqrt{a^2-\mathrm{I}}\right)^3\operatorname{sen}3x\cdots$$

La integral general que hemos hallado, es tan fecunda, que es suficiente para resolver muchas otras dentro del mismo grupo que consideramos; empero importa antes determinar los valores particulares que resultan para la función logarítmica [a], para valores particulares de n.

En efecto; si suponemos n = I, ó n = - I, se deduce:

$$l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)=-l2+\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{2}\cos 2x+\frac{2}{3}\cos 3x-\cdots\cdots$$

$$l\left(\mathrm{I}-\cos x\right)=-l2-\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{2}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos 3x-\cdots\cdots$$

o sea

$$l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)=l\,2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2=l.2+2l\cos\frac{\mathrm{I}}{2}x=-l\,2+\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{2}\cos 2x+\frac{2}{3}\cos 3x-\cdots\cdots$$

de donde

$$l\cos\frac{\mathrm{I}}{2}x=-l\,2+\frac{\cos x}{\mathrm{I}}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\cdots$$

Y, de un modo análogo,

$$l\left(\mathrm{I}-\cos x\right)=l\,2\left(\operatorname{sen}\frac{\mathrm{I}}{2}x\right)^2=-l\,2-\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{2}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos 3x-\cdots\cdots$$

de donde

$$l\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{I}}{2}x=-l\,2-\frac{\cos x}{\mathrm{I}}-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 3x}{3}-\cdots$$

En su consecuencia:

$$l\,\mathrm{tg}\frac{\mathrm{I}}{2}x=\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{5}\cos 5x-\cdots\cdots$$

Las fórmulas precedentes pueden utilizarse para comprobar diferentes fórmulas integrales que se encuentran en la célebre obra de *D. Bierens de Haan*; tales son, por ejemplo, las siguientes:

$$[1]\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)dx=-\frac{\mathrm{I}}{2}\pi\, l\,2+2\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}\qquad (\text{Tabla } 334.\text{- Núm. } 6)$$

$$[2]\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\mathrm{I}-\cos x\right)dx=-\frac{\mathrm{I}}{2}\pi\, l\,2-2\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}\qquad (\text{Tabla } 334.\text{- Núm. } 7)$$

$$[3]\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos x.dx=-\frac{\mathrm{I}}{4}\pi\, l\,2+\frac{\mathrm{I}}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}\qquad (\text{Tabla } 304.\text{- Núm. } 1)$$

$$[4]\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\,\mathrm{sen}\, x.dx=-\frac{\mathrm{I}}{4}\pi\, l\,2-\frac{\mathrm{I}}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}\qquad (\text{Tabla } 303.\text{- Núm. } 1)$$

$$[5]\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot\frac{x}{2}.dx=\frac{\mathrm{I}}{2}\pi\, l\,2+2\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}\qquad (\text{Tabla } 238.\text{- Núm. } 4)$$

Para comprobar [1], atenderemos a la igualdad hallada

$$l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)=-l\,2+\frac{2}{\mathrm{I}}\cos x-\frac{2}{2}\cos 2x+\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{4}\cos 4x+\cdots\cdots$$

luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)dx=-\frac{\pi}{2}l\,2+2\left[\mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}}{9}+\frac{\mathrm{I}}{25}-\cdots\right]$$

Este desarrollo permite ser expresado de un modo breve, como lo indica Bierens de Haan; así

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\mathrm{I}+\cos x\right)dx=-\frac{\pi}{2}l\,2+2\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}$$

conforme a la integral [**1**]

Si hubiésemos partido de la función logarítmica más sencilla

$$l\cos\frac{x}{2} = -l\,2 + \frac{\cos x}{\mathrm{I}} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \cdots$$

al integrar tendríamos

$$\int l\cos\frac{x}{2} = -x\,l\,2 + \frac{\operatorname{sen} x}{\mathrm{I}} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} - \cdots$$

Si suponemos ahora $\frac{x}{2} = t$, de donde $dx = 2dt$, $x = 2t$, resulta:

$$[\alpha] \qquad \int l\cos t \times 2dt = -2t\,l\,2 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{\mathrm{I}} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 6t}{9} - \cdots$$

Y si los límites son 0 y $\frac{\pi}{4}$, se obtiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos t.dt = -\frac{\pi}{4}l\,2 + \frac{\mathrm{I}}{2}\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{I}}{9} + \cdots\right)$$

o sea

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos t.dt = -\frac{\pi}{4}l\,2 + \frac{\mathrm{I}}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}$$

resultado que concuerda con la fórmula [3]

Ahora bien; si en [α] tomamos como límites 0 y $\frac{\pi}{2}$, se obtiene inmediatamente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos t.dt = -\frac{\pi}{4}l\,2,$$

resultado que corresponde con el que dan varios autores modernos, como Bertrand, Rouché.

De un modo análogo tendríamos, al partir de

$$l\operatorname{sen}\frac{x}{2} = -l\,2 - \frac{\cos x}{\mathrm{I}} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} - \cdots\cdots,$$

la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\operatorname{sen} t.dt = -\frac{\pi}{4}l\,2 - \frac{\mathrm{I}}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-\mathrm{I})^n}{(2n+\mathrm{I})^2}$$

conforme a la fórmula [**4**].

Cuando los límites de la integral sean 0 y $\frac{\pi}{2}$, en este caso se obtiene de la fórmula análogo a [α]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,\mathrm{sen}\,t.dt = -\frac{\pi}{4} l\,2$$

En suma, de los resultados últimamente obtenidos, cabe escribir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos t.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,\mathrm{sen}\,t.dt = -\frac{\pi}{2} l\,2$$

Igualdades notables por su importancia y que se encuentran en las principales obras de cálculo, si bien con bastantes rodeos para poderlas alcanzar.

Una de tantas aplicaciones que pueden ofrecer estas últimas integrales, se refiere a la determinación del área correspondiente a la superficie comprendida entre una rama de la cuadratriz de Dinostrato y el eje *x*. En efecto; en la obra del matemático G. Texeira, que trata de varias curvas, al hablar de dicha cuadratriz de Dinostrato, considera para la fórmula del área anterior

$$A = 2\int_0^{a} x.\cot\frac{\pi x}{2a}\,dx,$$

que en el supuesto de que $\frac{\pi x}{2a} = t$, se reduce a:

$$A = 2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cot t.dt = -2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l.\mathrm{sen}\,t.dt$$

De modo que, en virtud de la última integral hallada, resulta inmediatamente y sin rodeos

$$A = \frac{4a^2 l.2}{\pi}$$

No es difícil comprender ahora, que si hubiésemos partido de la fórmula

$$l(\mathrm{I} - \cos x) = -l\,2 - \frac{2}{\mathrm{I}}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos 3x - \cdots$$

al integrar, según los límites 0 y $\frac{\pi}{2}$, habríamos obtenido la igualdad siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\mathrm{I}-\cos x\right)dx=-\frac{\mathrm{I}}{2}\pi l\,2-2\sum_0^\infty \frac{\left(-\mathrm{I}\right)^n}{\left(2n+\mathrm{I}\right)^2}$$

correspondiente a la fórmula [2].

Nos falta, por último, justificar la integral [5], que si bien no tiene la forma logarítmico - circular, a ella puede referirse, para obtener el notables resultado debido a Legendre, con solo atender a la igualdad siguiente:

$$d\,l.\mathrm{sen}\frac{x}{2}=\cot\frac{x}{2}\frac{dx}{2}$$

En este concepto, se tiene

$$\int x\cot\frac{x}{2}dx=2\int x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x}{2}}\frac{dx}{2}=2\int x d\,l.\mathrm{sen}\frac{x}{2}=2\left[x\,l\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}-\int l\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}dx\right]$$

En virtud de las fórmulas halladas, se tiene

$$\int l\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}dx=\int\left[-l.2-\frac{\cos x}{\mathrm{I}}-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 3x}{3}-\cdots\right]dx=-x\,l.2-\mathrm{sen}\,x-\frac{\mathrm{sen}\,2x}{4}-\frac{\mathrm{sen}\,3x}{9}\cdots$$

de donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot\frac{x}{2}dx=\left[2xl\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\left[-x\,l\,2-\mathrm{sen}\,x-\frac{\mathrm{sen}\,2x}{4}-\frac{\mathrm{sen}\,3x}{9}-\cdots\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=2\frac{\pi}{2}l\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{2}}+\pi l\,2+2\left[\mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}}{9}+\cdots\right]=\frac{\pi}{2}l\,2+2\sum_0^\infty\frac{\left(-\mathrm{I}\right)^n}{\left(2n+\mathrm{I}\right)^2}$$

resultado que corresponde con la fórmula [5] y última de Bierens de Haan.

Seguramente el lector que se haya fijado en los ejemplos precedentes, podrá venir en conocimiento de la importancia que debe concederse al grupo de las integrales expuestas, permitiendo extender su círculo de acción, dentro del mismo grupo, según varíe su forma, o se trate de funciones goniométricas distintas.

Vitoria, Noviembre-Diciembre de 1906
Lauro Clariana Ricart