DR. LAURO CLARIANA RICART

Integrales

logarítmico-circulares

Imprenta de Eduardo Arias, San Lorenzo, 5.

INTEGRALES LOGARÍTMICO-CIRCULARES

POR EL

Dr. LAURO CLARIANA RICART

Catedrático de Cálculo infinitesimal en la Universidad de Barcelona.

En el presente artículo, propóngome dar á conocer un grupo de integrales muy interesante, y del cual se ocupan poco ó nada los autores modernos que tratan del cálculo infinitesimal.

Estas integrales las designo bajo el nombre de *Integrales logarítmico circulares*, porque contienen, dentro del signo integral, alguna función logarítmica, la cual á la vez depende de otras circulares.

No he vacilado en dar explicación detallada de todos los cálculos que requiere el desarrollo de las precitadas integrales, pues entiendo que la demasiada condensación en matemáticas, es origen de desaliento y abandono por parte de algunos lectores, resultando infructíferos muchos de los trabajos científicos que salen á diario, y, sobre todo, si llevan el sello de la matemática superior.

***

Empezaremos por el estudio de la integral siguiente:

$\int l(1 + n \cdot \cos x)\, dx$, de la cual deduciremos luego muchas otras particulares de grande interés.

Ante todo, conviene desarrollar bajo forma de serie, la función que está dentro del signo integral:

$$\left.\begin{aligned} l(1 + n \cdot \cos x) &= n \cdot \cos x - \frac{1}{2} n^2 \cos^2 x + \\ &+ \frac{1}{3} n^3 \cdot \cos^3 x - \frac{1}{4} n^4 \cos^4 x + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad [\mathbf{A}]$$

Las potencias de estos cosenos, en función de los arcos múltiplos, se determinarán por medio de la fórmula trigonométrica siguiente:

$$\cos m x = \cos \frac{m\pi}{2} \left(1 - \frac{m^2}{2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^4 x \ldots\ldots\right) +$$

$$+ m \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2}\left(\cos x - \frac{m^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^3 x + \ldots\ldots\right) (*)$$

(*) Para darse cuenta exacta del desarrollo de dicha fórmula trigonométrica, comenzaremos por considerar la función $n = \cos(m \cdot \operatorname{arc} \cdot \cos x)$, de donde resulta:

$$\frac{dn}{dx} = \pm \frac{m \cdot \operatorname{sen}(m \cdot \operatorname{arc}\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = \pm \frac{m\, x \cdot \operatorname{sen}(m \cdot \operatorname{arc}\cos x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \cdot \cos(m \cdot \operatorname{arc}\cos x)}{(1-x^2)},$$

$$(1-x^2)\frac{d^2 n}{dx^2} - x \cdot \frac{dn}{dx} + m^2 \cdot n = 0.$$

Derivando p veces consecutivas esta igualdad, ó aplicando, para mayor rapidez, la fórmula de Leibnitz, se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^{p+2} n}{dx^{p+2}} - 2px\frac{d^{p+1} n}{dx^{p+1}} - p^2\frac{d^p n}{dx^p} + p\frac{d^p n}{dx^p} - x\frac{d^{p+1} n}{dx^{p+1}} -$$

$$- p\frac{d^p n}{dx^p} + m^2\frac{d^p n}{dx^p} = 0.$$

Siendo $x = 0$, se obtiene

$$\left(\frac{d^{p+2} n}{dx^{p+2}}\right)_0 = (p^2 - m^2)\left(\frac{d^p n}{dx^p}\right)_0 \qquad [\blacksquare]$$

Ahora bien; en el concepto de referirnos al arco menor de todos los que podríamos considerar, cabe escribir

$$n_0 = \cos m \cdot \operatorname{arc}\cos 0) = \cos m\frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{dn}{dx}\right)_0 = m \cdot \operatorname{sen} m\frac{\pi}{2}.$$

Al dar valores particulares á p, según la fórmula general $[\blacksquare]$, resulta:

$$p=1, \left(\frac{d^3 n}{dx^3}\right)_0 = (1-m^2)\left(\frac{dn}{dx}\right)_0 = (1-m^2)\cdot m \operatorname{sen} m\frac{\pi}{2},$$

$$p=3, \left(\frac{d^5 n}{dx^5}\right)_0 = (9-m^2)(1-m^2)\cdot m \operatorname{sen} m\frac{\pi}{2},$$

....

$$p=2, \left(\frac{d^4 n}{dx^4}\right)_0 = (4-m^2)\left(\frac{d^2 n}{dx^2}\right)_0 = -(4-m^2)\, m^2 \cos m\frac{\pi}{2},$$

$$p=4, \left(\frac{d^6 n}{dx^6}\right)_0 = -(16-m^2)(4-m^2)\, m^2 \cdot \cos m\frac{\pi}{2}.$$

....

Dando valores particulares á m, se obtienen las igualdades que á continuación se expresan:

$$
\begin{aligned}
m &= 2, \quad \cos 2x = -1 + 2\cos^2 x, \\
m &= 3, \quad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x, \\
m &= 4, \quad \cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

de donde se deduce

$$
\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \\
\cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x, \\
\cos^4 x &= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Por inducción, tendremos

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^{2n+2}\,n}{dx^{2n+2}} &= (-1)^{n+1}\, m^2(m^2-4)(m^2-16)\ldots\ldots(m^2-4n^2)\cos m\frac{\pi}{2}, \\
\frac{d^{2n+1}\,n}{dx^{2n+1}} &= (-1)^{n}\,(m^2-1)(m^2-9)\ldots\ldots[m^2-(2n-1)^2]\,m\cdot\operatorname{sen} m\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
\right\} [\gamma]
$$

Si suponemos $\cos x = y$, al propio tiempo que se aplique la fórmula de Mac-Laurin, para tener el desarrollo en serie de la función dada en potencias de $\cos x$, resulta

$$
n = n_0 + \left(\frac{dn}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2 n}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^3 n}{dy^3}\right)_0 \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots
$$

ó sea, en el supuesto de referir las derivadas $[\gamma]$ á y,

$$
\begin{aligned}
n = \cos mx = \cos m\frac{\pi}{2} + m\operatorname{sen} m\frac{\pi}{2}\times\cos x - \frac{m^2}{1\cdot 2}\cos m\frac{\pi}{2}\times\cos^2 x - \\
-\frac{m(m^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{sen} m\frac{\pi}{2}\times\cos^3 x + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Así, pues, tendremos, en definitiva:

$$
\begin{aligned}
\cos mx = \cos\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^4 x \ldots\ldots\right) + \\
+ m\cdot\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}\left(\cos x - \frac{m^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^3 x + \ldots\ldots\right)
\end{aligned}
$$

Substituyendo estos valores en [**A**], se tiene

$$l(1 + n \cdot \cos x) = n \cdot \cos x - \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right) +$$

$$+ \frac{1}{3} n^3 \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x\right) -$$

$$- \frac{1}{4} n^4 \left(\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}\right) + \ldots\ldots =$$

$$= - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} n^4 - \ldots\ldots +$$

$$+ \left[n + \frac{1}{3} \frac{3}{4} n^3 + \ldots\ldots\right] \cos x + \qquad [\mathbf{B}]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si suponemos ahora

$$l(1 + n \cdot \cos x) = -A + B \cdot \cos x - C \cdot \cos 2x + D \cdot \cos 3x \ldots\ldots \quad [\mathbf{C}]$$

al comparar este resultado con el anterior, se deduce

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{n^4}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{n^6}{6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{n^8}{8} + \ldots\ldots$$

de donde

$$n \frac{dA}{dn} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} n^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^6 + \ldots\ldots$$

y, en virtud del binomio,

$$(1 - n^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} n^4 + \ldots\ldots,$$

resulta

$$n \cdot \frac{dA}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} - 1, \quad \text{ó sea,} \quad dA = \frac{dn}{n\sqrt{1 - n^2}} - \frac{dn}{n}.$$

Para integrar esta ecuación, sea $n = \frac{1}{t}$, luego

$$\frac{d\,n}{n\sqrt{1 - n^2}} = -\frac{d\,t}{\sqrt{t^2 - 1}} = -l\,(t + \sqrt{t^2 - 1}\,) =$$

$$= l\,\frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} = l\,\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}\,.$$

Además, como

$$\int -\frac{d\,n}{n} = -l\,n,$$

en totalidad, se hallará

$$A = l\left[\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}\right] - l\,n = l\,\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n^2} + C.$$

Digno de mención es que si $n = 0$, anula la función $l\,(1 + n\cos z)$, es preciso que A se anule también según el teorema de Descartes. Ahora, como quiera que $\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n^2}$, se reduce á la forma indeterminada cuando $n = 0$, según el análisis ordinario, basta atender á las derivadas respectivas de los dos términos del quebrado anterior, para deducir su verdadero valor, esto es:

$$\frac{\frac{2\,n}{2\sqrt{1 - n^2}}}{2\,n} = \frac{1}{2\sqrt{1 - n^2}}\,,$$

y para $n = 0$, resulta $\frac{1}{2}$.

Así, pues, tendremos

$$l\,\frac{1}{2} + C = 0,$$

de donde

$$C = l\,2,$$

luego

$$A = l\,\frac{2 - 2\,(1 - n^2)}{n^2}$$

De un modo análogo, de [**B**] y [**C**] resulta

$$\frac{1}{2} B = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{n^3}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n^5}{5} + \ldots\ldots$$

$$\frac{n^2\, d B}{2\, d n} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} n^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^6 + \ldots\ldots = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} - 1.$$

$$d B = 2 \left(\frac{d n}{n^2 \sqrt{1 - n^2}} - \frac{d n}{n^2} \right).$$

Para integrar esta ecuación diferencial, admitiremos la igualdad de condición $n = \cos x$, luego

$$\frac{d n}{n^2 \sqrt{1 - n^2}} = \frac{- \operatorname{sen} x\, d x}{\cos^2 x \sqrt{1 - \cos^2 x}} = - \frac{d x}{\cos^2 x}.$$

Así, pues, se tiene

$$\int \frac{d n}{n^2 \sqrt{1 - n^2}} = - \int \frac{d x}{\cos^2 x} = - \operatorname{tang} x = -$$

$$- \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = - \frac{\sqrt{1 - n^2}}{n}.$$

Respecto á la integral de $\left(- \frac{d n}{n^2} \right)$, se deduce $\int - \frac{d n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

De modo, que en totalidad, resulta:

$$B = 2 \left(\frac{- \sqrt{1 - n^2}}{n} + \frac{1}{n} \right) = 2\, \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}.$$

Si atendemos al valor hallado para A, se deduce inmediatamente

$$A = l \frac{B}{n}.$$

Para obtener los valores de los demás coeficientes C, D, E....., basta diferenciar la ecuación [**C**].

En efecto, se tiene:

$$\frac{-n \operatorname{sen} x\, d x}{1+n \cdot \cos x}=-B \cdot \operatorname{sen} x \cdot d x+2\, C \operatorname{sen} 2\, x \cdot d x-$$
$$-3\, D \cdot \operatorname{sen} 3\, x \cdot d x+\ldots\ldots$$

A este punto interesa transformar en sumas los productos

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x, \quad \operatorname{sen} 2\, x \cdot \cos x, \quad \operatorname{sen} 3\, x \cdot \cos x \ldots\ldots, (*)$$

y, en su virtud, tendremos:

$$-n \cdot \operatorname{sen} x \cdot d x=-(1+n \cdot \cos x)\, B \operatorname{sen} x \cdot d x+$$
$$+2\,(1+n \cos x)\, C \operatorname{sen} 2\, x \cdot d x-3\,(1+n \cos x)\, D \operatorname{sen} 3\, x \cdot d x+\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
0=-B & \operatorname{sen} x+\;2\;C & \operatorname{sen} 2\, x-\;3\;D & \operatorname{sen} 3\, x+\ldots\ldots \\
+C n & -\frac{1}{2} B n & +\quad C n & \\
+n & -\frac{3}{2} D n & +\frac{4}{2} E n &
\end{array}$$

Por consiguiente

$$C=\frac{B-n}{n}, \quad D=\frac{4\, C-B n}{3\, n}, \quad E=\frac{6\, D-2\, C n}{4\, n}, \ldots\ldots$$

(*) Para la transformación de dichos productos en sumas, atenderemos á la fórmula general de trigonometría $\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B=2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, de donde resulta

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B), \quad \frac{A+B}{2}=x, \quad \frac{A-B}{2}=x, \quad A=2\, x, \quad B=0,$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x=\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\, x;$$

$$\operatorname{sen} 2\, x \cdot \cos x=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B), \quad \frac{A+B}{2}=2\, x, \quad \frac{A-B}{2}=x, \quad A=3\, x, \quad B=x,$$

$$\operatorname{sen} 2\, x \cdot \cos x=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 3\, x+\operatorname{sen} x);$$

$$\operatorname{sen} 3\, x \cdot \cos x=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B), \quad \frac{A+B}{2}=3\, x, \quad \frac{A-B}{2}=x, \quad A=4\, x, \quad B=2\, x$$

$$\operatorname{sen} 3\, x \cdot \cos x=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 4\, x+\operatorname{sen} 2\, x),$$

....

y, como quiera que $B = 2\,\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}$, resulta:

$$B = \frac{2}{1}\,\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}, \quad C = \frac{2\,\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} - n}{n} =$$

$$= \frac{2}{2}\,\frac{(1 - \sqrt{1 - n^2})^2}{n^2},$$

$$D = \frac{4\,C - B\,n}{3\,n} = \frac{4\,\frac{(1 - \sqrt{1 - n^2})^2}{n^2} - 2\,(1 - \sqrt{1 - n^2})}{3\,n} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}\right)^3.$$

Continuando los cálculos, ó si se quiere por simple inducción, se halla

$$E = \frac{2}{4}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}\right)^4, \quad F = \frac{2}{5}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n}\right)^5, \ldots\ldots$$

Si, para abreviar, suponemos $\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} = m$, al substituir valores en la función primitiva [**C**], se obtiene

$$l(1 + n \cdot \cos x) = -\,l\,\frac{2\,m}{n} + \frac{2}{1}\,m \cos x - \frac{2}{2}\,m^2 \cdot \cos 2\,x +$$

$$+ \frac{2}{3}\,m^3 \cdot \cos 3\,x \ldots\ldots, \qquad [\mathbf{a}]$$

resultando, para la integral definitiva propuesta desde un principio,

$$\int d\,x \cdot l(1 + n \cdot \cos x) = -\,x\,l \cdot \frac{2\,m}{n} + \frac{2}{1}\,m \cdot \operatorname{sen} x -$$

$$- \frac{2}{4}\,m^2 \cdot \operatorname{sen} 2\,x + \frac{2}{9}\,m^3 \cdot \operatorname{sen} 3\,x - \frac{2}{16}\,m^4 \cdot \operatorname{sen} 4\,x +$$

$$+ \frac{2}{25}\,m^5 \cdot \operatorname{sen} 5\,x \ldots\ldots + C.$$

Esta es la fórmula general que sirve de base para resolver los diferentes casos particulares de que nos vamos á ocupar.

***

Para hallar la integral $\int l(a + \cos x)\,dx$, la descompondremos del modo siguiente:

$$\int l(a + \cos x)\,dx = \int l\,a\left(1 + \frac{1}{a}\cos x\right)dx =$$

$$= \int \left[l\,a + l\left(1 + \frac{1}{a}\cos x\right)\right]dx = x\,l\,a +$$

$$+ \int l\left(1 + \frac{1}{a}\cos x\right)dx.$$

Esta última integral se puede referir á la integral general anterior, suponiendo $n = \frac{1}{a}$.

En este concepto, se tiene:

$$m = \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

luego en definitiva, resulta:

$$\int l(a + \cos x)\,dx = x\,l\,a - x\,l\,2\,a\,(a - \sqrt{a^2 - 1}) +$$

$$+ \frac{2}{1}(a - \sqrt{a^2 - 1})\operatorname{sen} x - \frac{2}{4}(a - \sqrt{a^2 - 1})^2 \operatorname{sen} 2\,x +$$

$$+ \frac{2}{9}(a - \sqrt{a^2 - 1})^3 \operatorname{sen} 3\,x \ldots\ldots$$

La integral general que hemos hallado, es tan fecunda, que es suficiente para resolver muchas otras dentro del mismo grupo que consideramos; empero importa antes determinar los valores particulares que resultan para la función logarítmica [a], para valores particulares de n.

En efecto; si suponemos $n = 1$, ó $n = -1$, se deduce:

$$l\,(1 + \cos x) = -\,l\,2 + \frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2\,x + \frac{2}{3}\cos 3\,x - \ldots\ldots$$

$$l\,(1 - \cos x) = -\,l\,2 - \frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2\,x - \frac{2}{3}\cos 3\,x - \ldots\ldots$$

ó sea

$$l\,(1 + \cos x) = l\,2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = l\cdot 2 + 2\,l\cos\frac{1}{2}\,x = -\,l\,2 +$$

$$+\frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2\,x + \frac{2}{3}\cos 3\,x - \ldots\ldots$$

de donde

$$l\cos\frac{1}{2}\,x = -\,l\,2 + \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2\,x}{2} + \frac{\cos 3\,x}{3} - \ldots\ldots$$

Y, de un modo análogo,

$$l\,(1 - \cos x) = l\,2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,x\right)^2 = -\,l\,2 - \frac{2}{1}\cos x -$$

$$-\frac{2}{2}\cos 2\,x - \frac{2}{3}\cos 3\,x - \ldots\ldots$$

de donde

$$l\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,x = -\,l\,2 - \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2\,x}{2} - \frac{\cos 3\,x}{3} - \ldots\ldots$$

En su consecuencia:

$$l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,x = -\frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{3}\cos 3\,x - \frac{2}{5}\cos 5\,x - \ldots\ldots$$

Las fórmulas precedentes pueden utilizarse para comprobar diferentes fórmulas integrales que se encuentran en la célebre obra de *D. Bierens de Haan;* tales son, por ejemplo, las siguientes:

$$[\mathbf{1}] \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1+\cos x)\,dx = -\frac{1}{2}\pi\, l\, 2 + 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(Tabla 334.—Núm. 6).

$$[\mathbf{2}] \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1-\cos x)\,dx = -\frac{1}{2}\pi\, l\, 2 - 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(Tabla 334.—Núm. 7).

$$[\mathbf{3}] \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos x\cdot dx = -\frac{1}{4}\pi\, l\, 2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(Tabla 304.—Núm. 1).

$$[\mathbf{4}] \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{4}\pi\, l\, 2 - \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(Tabla 303.—Núm. 1).

$$[\mathbf{5}] \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\pi\, l\, 2 + 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(Tabla 238.—Núm. 4).

Para comprobar [**1**], atenderemos á la igualdad hallada

$$l(1+\cos x) = -l\,2 + \frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2x +$$

$$+\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{2}{4}\cos 4x + \ldots\ldots$$

luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1+\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\,l\,2 + 2\left[1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \ldots\ldots\right].$$

Este desarrollo permite ser expresado de un modo breve, como lo indica Bierens de Haan; así

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1+\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\,l\cdot 2 + 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

conforme á la integral [**1**].

Si hubiésemos partido de la función logarítmica más sencilla

$$l\cos\frac{x}{2} = -l\,2 + \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots,$$

al integrar tendríamos

$$\int l\cos\frac{x}{2}\,dx = -x\,l\,2 + \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} - \ldots$$

Si suponemos ahora $\frac{x}{2} = t$, de donde $dx = 2\,dt$, $x = 2t$, resulta

$$[\alpha]\quad \int l\cos t \times 2dt = -2t\,l2 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{1} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 6t}{9} - \ldots$$

Y si los límites son 0 y $\frac{\pi}{4}$, se obtiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos t\cdot dt = -\frac{\pi}{4}\,l\,2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9} + \ldots\right),$$

ó sea

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos t\cdot dt = -\frac{\pi}{4}\,l\,2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

resultado que concuerda con la fórmula [**3**].

Ahora bien; si en [α] tomamos como límites 0 y $\frac{\pi}{2}$, se obtiene inmediatamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos t \cdot dt = -\frac{\pi}{2} l \cdot 2,$$

resultado que corresponde con el que dan varios autores modernos, como Bertrand, Rouché, etc.

De un modo análogo tendríamos, al partir de

$$l \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -l\, 2 - \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} - \ldots ,$$

la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l \operatorname{sen} t \cdot dt = -\frac{\pi}{4} l \cdot 2 - \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

conforme á la fórmula [4].

Cuando los límites de la integral sean o y $\frac{\pi}{2}$, en este caso se obtiene de la fórmula análoga á [α]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} t \cdot dt = -\frac{\pi}{2} l\, 2.$$

En suma, de los resultados últimamente obtenidos, cabe escribir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} t \cdot dt = -\frac{\pi}{2} l \cdot 2.$$

Igualdades notables por su importancia y que se encuentran en las principales obras de cálculo, si bien con bastantes rodeos para poderlas alcanzar.

Una de tantas aplicaciones que pueden ofrecer estas últimas integrales, se refiere á la determinación del área correspondiente á la superficie comprendida entre una rama de la cuadratriz de Dinóstrato y el eje x. En efecto; en la obra del matemático G. Texeira, que trata de varias curvas, al hablar de dicha cuadratriz de Dinóstrato, considera para la fórmula del área anterior $A = 2 \int_0^a x \cdot \cot \frac{\pi x}{2a} dx$, que en el supuesto de que $\frac{\pi x}{2a} = t$, se reduce á

$$A = 2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cot t \cdot dt = -2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} t \cdot dt.$$

De modo que, en virtud de la última integral hallada, resulta inmediamente y sin rodeos

$$A = \frac{4a^2 l \cdot 2}{\pi}.$$

No es difícil comprender ahora, que si hubiésemos partido de la fórmula

$$l(1 - \cos x) = -l\,2 - \frac{2}{1}\cos x - \frac{2}{2}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos 3x - \ldots\ldots$$

al integrar, según los límites o y $\frac{\pi}{2}$, habríamos obtenido la igualdad siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - \cos x)\,dx = -\frac{1}{2}\pi l\,2 - 2\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

correspondiente á la fórmula [**2**].

Nos falta, por último, justificar la integral [**5**], que si bien no tiene la forma logarítmico-circular, á ella puede referirse, para obtener el notable resultado debido á Legendre, con sólo atender á la igualdad siguiente:

$$d\,l \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cot\frac{x}{2}\,\frac{dx}{2}.$$

En este concepto, se tiene

$$\int x \cot\frac{x}{2} \cdot dx = 2\int x \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2} = 2\int x\,d\,l \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} =$$

$$= 2\left[x\,l \operatorname{sen}\frac{x}{2} - \int l \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx\right].$$

En virtud de las fórmulas halladas, se tiene

$$\int l \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot dx =$$

$$= \int \left[- l \cdot 2 - \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\ldots \right] dx =$$

$$= - x\, l \cdot 2 - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} \ldots\ldots$$

de donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot \frac{x}{2} \cdot dx = \left[2\, x\, l \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- 2 \left[- x\, l\, 2 - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} - \ldots\ldots \right] =$$

$$= 2 \frac{\pi}{2} l \sqrt{\frac{1}{2}} + \pi\, l\, 2 + 2 \left[1 - \frac{1}{9} + \ldots\ldots \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} l\, 2 + 2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

resultado que corresponde con la fórmula [**5**] y última de Bierens de Haan.

Seguramente el lector que se haya fijado en los ejemplos precedentes, podrá venir en conocimiento de la importancia que debe concederse al grupo de las integrales expuestas, permitiendo extender su círculo de acción, dentro del mismo grupo, según varíe su forma, ó se trate de funciones goniométricas distintas.

GACETA DE MATEMÁTICAS

Advertencias sobre publicación y administración.

1.ª Todos los manuscritos destinados á esta Revista, así como la correspondencia relacionada con ella, deberán remitirse al domicilio de su Administración, á nombre del Director.

2.ª Los autores de artículos doctrinales, notas matemáticas, etc., que avisen su deseo á la Dirección de esta Revista al remitir los manuscritos, podrán obtener tiradas aparte de los mismos, abonando una módica cantidad que se fijará de acuerdo con la extensión é índole material de dichos trabajos.

3.ª Se ruega á los autores de cuestiones para proponer, remitan con los enunciados algunas indicaciones precisas acerca de la solución, á fin de evitar la propuesta de cuestiones de dificultad demasiado elevada dentro del carácter de esta Revista.

4.ª La Gaceta de Matemáticas analizará en su *Sección bibliográfica* todas las obras relacionadas con dicha Ciencia, de las cuales se remitan dos ejemplares á su Administración.

5.ª Todas las subscripciones parten en 1.º de Enero de cada año, cualquiera que sea la época de éste en que se hagan. Los precios de subscripción, que se abonan *por anticipado*, son los siguientes:

Por un año....	Para España..............	[illegible] pesetas.
	Para el extranjero.........	[illegible] francos.

6.ª Los puntos ó centros de subscripción, donde ésta podrá hacerse, son los siguientes:

Para España.—Se subscribe en la Administración de esta Revista, enviando el importe en metálico, letra de fácil cobro, libranza del Giro mútuo ó sobre monedero. Para estos pagos deberá prescindirse del empleo de los sellos de correos, cualquiera que sea su clase. Las subscripciones que no se hagan directamente en la Administración de esta Revista, se curarán por el librero *D. Fernando Fé*, Carrera de San Jerónimo, 2, *Madrid*.

Para el extranjero.—Francia: Gauthier Villars, Éditeur, 55, Quai des Grands-Augustins, *Paris*.

Suiza: H. Burkhardt, Librairie, 2, Place du Molard, *Genève*.
Bélgica: Falk Fils, Librairie, 15 y 17, Rue du Parchemin, *Bruxelles*.
Italia: Fratelli Treves, Libraio, [illegible], Corso Umberto I, *Roma*.
Portugal: José Bastos, Libreria, *Lisboa*.
Holanda: Martinus Nijhoff, Librairie, *La Haya*.
Alemania: F. A. Brockhaus, Buchhandlung, 16, Querstrasse, *Leipzig*.
Inglaterra: David Nutt, Library, 57 y 59, Long Acre, *London*, W. C.
Austria: Guillaume Frick, 27, Graben, *Viena*.
Estados Unidos de América: C. A. Koehler & C.ª, 149, A. Tremont Street, *Boston* (Mass.)
Argentina: Arnaldo Moen, Nueva Librería Europea, [illegible], Florida, *Buenos Aires*.
Chile: Sres. Ferrero y Torres, Librería, Ahumada (esquina de [illegible]), *Santiago*.
Méjico: Ramón de S. N. Araluce, Librería, 5, Callejón de Santa Inés, *Méjico*.
[illegible] Sres. Tronconi Hermanos, 27, [illegible] (Apartado [illegible]), [illegible].
Cuba: Manuel Ricoy, Librería, 66, Obispo, *Habana*.
Perú: J. Ruiz Ferrer, 45 y 50, Portal de Botoneros, *Lima*.
Uruguay: Claudio García, Librería de la Universidad, 11, A. Cerrito, *Montevideo*.
Venezuela: Lázaro Puig Ros, Librería Española, Este 4, núm. 12, *Caracas*.
Paraguay: Juan Quell, Librería, *Asunción*.
El Salvador: Sres. Italo Durante y C.ª, Librería, *San Salvador*.
Santo Domingo: Sres. Roques y Polanco, Librería «Casa de América», *Santo Domingo*.
Puerto Rico: Sres. J. Escalas y M. Texidor, *San Juan*.
Ecuador: A. [illegible], Nueva Librería Americana, *Guayaquil*.
Nicaragua: [illegible], Librería Española, *León*.
Guatemala: Sres. E. Goubaud y C.ª, Librería, *Guatemala*.
Bolivia: [illegible], Librería, [illegible], *La Paz*.
Colombia: Sres. Guerra y [illegible], Librería, Plaza Bolívar, [illegible], *Bogotá*.
Costa Rica: Doña María, Viuda de Lines, Librería, Avenida Central, *San José*.
Trinidad: Sres. D. Morales y Co., Librería, *Port of Spain*.

ADMINISTRACIÓN de la Gaceta de Matemáticas

MADRID, Calle de Trafalgar, [illegible]