Nécessité impérieuse d'unir les Mathématiques avec la Philosophie

1900

Il semble que, dans son mouvement constant et perpétuel, l’humanité n’obéisse qu’à des lois de cet élément qui envahit l’espace et n’est jamais en repos.Les ondes sphériques déterminatives des lois de la chaleur, de celles de la lumière, etc., paraissent bien avoir leur reproduction dans la partie psychique de l’homme sous des conditions spéciales, quoique avec des tendances semblables. En un mot, ce travail continu des facultés intellectuelles, d’ourdir et de désourdir, est le reflet fidèle des ondes de l’éther qui se dilatent et se condensent dans leur mouvement en avant.

Ainsi la collectivité ou société, somme d’éléments congénères, participe aussi de ces oscillations au milieu de son progrès continu. L’esprit et la matière, l’amour et la haine, l’enthousiasme et l’indifférence, le savoir et l’ignorance, la théorie et la pratique: voilà les deux pôles autour desquels tournent constamment les sociétés humaines, et celles-ci, par le flux et reflux continus de leurs vagues, accumulent de plus en plus de nouveaux grains de sable sur le bord pour en élever le niveau ou pour donner plus d’étendue à la parie solide de la terre, afin que l’homme puisse asseoir la plante de ses pieds dans de nouvelles régions ou sur de plus vastes plages.

Le XIX siècle, comme un des plus favorisés dans les applications de la science, en est venu à croire que seule la pratique peut fournir des résultats utiles et profitables. Et cette croyance est portée à tel point que mème quelques illustres savants ont essayé d’imprimer à leurs travaux un caractère pratique dans la persuasion que la philophie est un obstacle au développement de la vraíe science.

Tel est l’aveuglement auquel ont abouti les énormes et stupéfiantes découvertes du XIX siècle!

Quel contraste, néanmoins, notre siècle nous offre-t-il, quand on le compare avec les deux siècles antérieurs et que l’on considère la marche imprimée à l’étude des sciences par les savants qui brillèrent à cette époque! Dans ces temps-là, la philosophie constituait la base de toutes les disquisitions et de toutes les questions scientifiques, et en particulier des mathématiques, tandis que de nos jours elle est regardée en général sinon avec dédain, du moins avec indifférence. Aussi la somme des énergies intellectuelles dépensées dans le siècle des lumières ne correspond-elle pas avec les résultats favorables que l’on a obtenus dans la partie purement spéculative de la science.

La disparité entre la philosophie et les mathématiques n’a aucune raison d’ètre et, pour obtenir des résultats féconds, il est forcément indispensable qu’elles marchent toujours intimement unies comme il en est de la tige et de la fleur, de la palette et du peintre, de l’âme et du corps.

Le moment est donc arrivé où il convient qu’une réaction se produise en faveur de la science, et si nous nous renfermons dans les mathématiques, nous dirons qu’il faut fixer son attention sur les principaux problèmes dont la solution est encore pendante, car il pourrait bien se faire qu’en leur donnant un caractère philosophique, nous atteignions mieux le but désiré.

Il est très possible que cela se réalise, car dans la marche ordinaire de la société, le mouvement de dilatation a coutume d’être presque toujours suivi d’un autre mouvement qui est de contraction ou, pour mieux dire, de concentration; en un mot, une période pratique est généralement suivie d’une autre période qui est théorique, et tout cela s’effectue au milieu de l’assaut continu et constant représenté par ce que l’on appelle progrès.

Cela ne veut pas dire que tous les travaux réalisés dans le siècle qui nous a vus naître soient de peu d’importance ou qu’ils portent tous le sceau de la science pratique, non et mille fois non.

La généralisation et les hypothèses se sont produites aussi de nos temps; mais il se peut bien que les principes philosophiques qui ont guidé l’esprit moderne n’aient pas été les mieux assortis, ni les plus propres pour le véritable avancement de la science, car comme l’a dit Pascal: “les hypothèses, dans un grand nombre de cas, engendrent l’erreur et la fausseté”

Il faut avouer que l’homme a, en général, une propension à passer d’un extrême à l’autre; et c’est pour cela qu’en mathématiques, nous voyons communément qu’il a ou un caractère purement pratique, ou une tendance à se transporter dans des régions incompréhensibles, ayant pour bagage des principes philosophiques peu satisfaisants. Malheureusement, cette tendance ne se renferme pas exclusivement dans le champ des mathématiques; elle s’étend jusque dans les arts, envahit les principes sociaux, même les coutumes des peuples, laissant à chaque époque l’une ou l’autre empreinte, suivant ses éléments constitutifs. Peut-être est-ce pour cette raison que, dans l’œuvre si célèbre de Cervantès, on ne trouve que deux types: Don Quichotte et Sancho.

Il est certain que l’homme tend uniquement à se diriger ou vers la sphère idéale ou vers la sphère réelle, sans penser que le grand secret pour obtenir des progrès positifs et féconds consiste à savoir se placer dans la ligne d’intersection des deux sphères précitées.

Dans cette science prodigieuse des Mathématiques, il existe sùrement un fonds de métaphysique que ne saurait dédaigner celui qui la cultive par goût et non par esprit de lucre. Que la question soit ardue et difficile, cela n’est pas douteux; mais ce n’est pas un motif suffisant pour que nous laissions de côté le point le plus transcendantal de la science. Soyons convaincus d’ailleurs que tous les sacrifices que nous ferons pour surmonter les nombreuses difficultés qui pourront se présenter seront récompensés par des avantages extraordinaires.

C'est ainsi que, pénétré de ces puissantes considérations, nous avons été amené à concentrer toute notre attention sur deux points très importants: 1º l'infini appliqué à l'analyse et à la géométrie; 2º les quantités positives et négatives considérées comme les vrais bases de l'analyse de situation.

Qu'il nous soit donne permis d'énoncer à ce sujet quelques idées, afin que, si elles renferment quelque chose de bon, d'autres plus habiles que nous sachent les mettre à profit, et que, dans le cas contraire, elles servent du moins de stimulant pour que l'on s'attache davantage à l'étude de ces problèmes philosophiques qui doivent constituer le piédestal des sciences mathématiques.

Nous commencerons d'abord par l'examen de l'infini mathématique.

L'idée de cet infini a séduit beaucoup de savants. C'est comme un soleil resplendissant qui aveugle touts ceux qui le regardent et les soumet bientôt à son joug, L'imagination de l'homme n'est jamais rassasiée; elle cherche un dernier terme pour l'assujettir définitivement une bonne fois, et il semble qu'on l'ait trouvé dans le mot *infini*; mais cela ne suffit pas pour tranquilliser la raison, car, suivant la loi de continuité, on sait que l'on ne peut jamais parvenir à ce dernier terme et que, dans le cas où l'on y parviendrait, nous ne pourrions pas imaginer que l'endroit atteint fût le dernier.

Le savant scrupuleux et de bonne foi ne saurait, en effet, accepter que ce qui peut avoir sa représentation directe ou indirecte dans le monde réel.

C'est ainsi que rien n'empêche d'accepter les lignes et les surfaces qui s'engendrent dans le monde réel, quoiqu'elles n'y aient pas matériellement un modèle exact. On ne trouve pas non plus dans le monde réel la quantité abstraite; mais il n'y a aucun motif de la repousser, puisque c'est là qu'elle prend naissance. On n'y trouve pas non plus, du moins directement, la variabilité, dernier élément qui nous reste de la quantité, et cependant elle en forme la base pour atteindre ce quelque chose qui sépare un point d'un autre dans toute ligne et qui est considéré comme étant moindre qu'une autre quantité quelconque, quelque petite qu'elle soit, conception la plus colossale de nos temps, exprimée par la célèbre *différentielle* du philosophe-mathématicien dont on ne saurait jamais porter assez haut les louanges, Leibnitz.

Le fond métaphysique renfermé dans ce point qui constitue aujourd'hui la base des mathématiques, fut l'occasion de grandes controverses dés le XVII siècle; mais après ce qu'a dit M. Carnot, il parait que ces questions philosophiques sont restées reléguées dans le plus complet oubli. Malgré tout, il est juste de faire observer que les mathématiciens n'ont pas cessé de faire usage d'une arme si puissante, toujours dans l'assurance qu'elle doit les conduire au véritable résultat de tous les problèmes qu'il y aura à résoudre.

Un tel procédé est censurable, car le fait de s'accoutumer à une chose en mettant de côté les doutes qui auraient pu dans le principe venir à l'esprit de quelqu'un, ce n'est pas gagner de la foi dans la science, comme le soutiennent quelques mathématiciens, mais c'est s'aveugler ou se fanatiser, car l'instinct agit là plus que la raison.

Pour ce qui est de l'impérieuse nécessité de remplacer *l'infini* par *l'indéfin*i, c'est chose si notoire que déjà elle est proclamée à haute voix par des mathématiciens-distingués. C'est là un point important dont nous nous sommes déjà occupé dans une autre occasion[1], de sorte que nous jugeons surabondant de répéter ici les mêmes arguments pour prouver que l'indéfiniment petit et l'indéfiniment grand ferment le cercle d'action de la quantité; et tout cela est d'accord avec la grande pensée de Poisson quand il dit que: *l'idée de l'infini mathématique porte en soi le germe du mystère et de l'absurde.*

Si nous considérons à présent l'infini comme un élément fondamental pour la géométrie de position, il nous faut auparavant entrer dans quelques considérations générales qui justifient les moyens dont nous nous sommes prévalu pour en éviter l'emploi.

En effet, il est reconnu que la variété dans l'unité et l'unité dans la variété constituent le fondement de toutes les manifestations de l'intelligence, et ce principe s'étend dans toutes les branches du savoir humain, et en particulier dans la science des mathématiques, comme étant la plus importante parmi les sciences positives. Toutes les diverses opérations et toutes les plus hautes conceptions qui ont lieu dans le vaste champ de la quantité se réduisent à décomposer et composer, à analyser et synthétiser, à différencier et intégrer. Vrai système de dualité que l'on prétend conserver jusque dans les questions les plus spéciales et sous les points de vue les plus variés, quoique, dans bien des cas, les éléments fassent défaut pour l'établir.

Dans la géométrie de position il se présente un exemple frappant de ce principe de dualité appliqué par exemple à deux systèmes de projection, car on admet qu'à tout point du premier système, il en correspond un autre dans le second; mais en généralisant cette méthode pour un point quelconque, il en résulte qu'il peut y avoir, dans l'un des systèmes, une position telle qu'elle n'ait pas son correspondant dans l'autre. Il en est ainsi lorsqu'il s'agit d'un point qui doit correspondre à un autre point déterminé par des droites parallèles.

Pour que le principe de dualité ne fût pas interrompu, les partisans des nouvelles théories géométriques ont supposé que les droites parallèles donnent aussi leur point d'intersection; cependant, dans l'impossibilité de le donner à une distance finie, ils entendent que les droites parallèles se rencontrent à l'infini. Une fois ce principe accepté, ils en déduisent, comme conséquence logique, que toutes les droites se coupent dans un plan, et cette hypothèse donne origine aux points appelés propres ou impropres, suivant que les droites se coupent à une distance finie ou à une distance infinie.

[1] Influence du monde réel et du monde idéal dans l'analyse infinitésimale. (Mémoire présenté au Congrès scientifique international des catholiques, tenu à Paris en 1.891)

En outre, comme deux droites ne peuvent se couper qu’en un seul point, cette circonstance oblige de supposer que, quel que soit le côté que l’on suive d’une droite parallèle à une autre, que ce soit de certain côté ou du côté opposé, on ne trouve qu’un seul point d’intersection, ce qui se résume que le $+\infty - \infty$ de toute droite est un même point, de sorte qu’en suivant cette pente on ne peut se dispenser de concéder aussi que la ligne droite ne soit une ligne fermée.

A présent, si de la géométrie plane on passe à celle de l’espace, il évident que pour continuer d’appliquer le principe de dualité, il faut admettre que deux plans parallèles ont une droite commune dans l’infini et par conséquent que toutes les droites déterminent dans l’infini un plan qui ferme l’espace.

Le plus grand nombre des mathématiciens modernes acceptent de bonne foi ces principes qui constituent la base de la géométrie de position, et comme ils en obtiennent indirectement les moyens de résoudre les nombreux théorèmes qu’ils se proposent de démontrer, cela suffit pour qu’ils les adoptent, sans se croire obligés d’approfondir les mystères que renferment de telles hypothèses. Il ne manque pas cependant de sages mathématiciens qui, quoique partisans de ce qui est nouveau, s’efforcent de manifester que l’on ne doit envisager ces conceptions que dans un sens fictif ou figuré. Il n’en est pas moins vrai qu’un doute ne cessé de subsister au sujet de ces points, lignes et superficies que l’on suppose situés à l’infini, et on se demandé s’ils sont tels que nous les concevons dans la géométrie ordinaire et dans le fini. Est-il possible que, pour atteindre la vraie intuition géométrique, on puisse partir d’une base différente de celle qui nous est offerte par le monde réel?

En résumé si, pour maintenir l’unité dans la variété, il faut s’appuyer sur des situations de l’infini mathématique, nous considérons ce procédé comme souverainement illogique, et nous croyons fermement qu’il y aurait moyen de donner du développement à la géométrie de position, sans avoir besoin de recourir à l’infini, ni de fouler aux pieds la bonne logique et la saine philosophie.

En réalité, il est vrai que la concession des points dans l’infini peut avoir pour origine l’étude de la perspective, car là un faisceau de rayons parallèles sur le plan géométral se transforme en un faisceau de rayons convergents vers un point appelé *de fuite* ou point limite dans le plan du tableau: point unique, qui correspond à tous les points des différentes parallèles, quand elles se prolongent plus que toute quantité, quelque grande qu’elle soit, raison pour laquelle les géomètres modernes supposent que le point de fuite correspond au point commun à l’infini de toutes les parallèles.

L’idée de la perspective nous a donné guidé dans nos investigations, en généralisant les conceptions de Desargues et d’autres anciens mathématiciens.

Nous avons pensé tout d'abord que la perspective sur une sphère pourrait nous faciliter la voie pour réduire la variété de faisceaux convergents et parallèles à la seule unité de faisceaux convergents; mais bientôt nous avons vu que, pour atteindre le but, il ne suffisait pas d'une seule sphère, et que pour l'homogénéité des arcs, c'est-à-dire pour que tous les arcs appartinssent à des circonférences de grand cercle, il était nécessaire de supposer une seconde sphère pour y transporter la perspective de la première. C'est en raison de cela et pour plus grande simplicité que nous avons supposé le rayon de la première double de celui de la seconde, et que nous avons pris comme plan géométral lè plan tangent aux deux sphères en leur point commun, dans l'hypothèse que ces deux sphères fussent tangentes.

De cette sorte, toutes les droites du plan géométral se transforment en circonférences: ces circonférences nous donnent à leur tour les propriétés que l'on suppose à tort dans les droites et toutes les considérations restent ainsi dans le fini. En synthèse, nous pourrions dire que la géométrie de la sphère est la vraie représentante de la géométrie de position, en établissant simplement une corrélation de figures entre les perspectives des deux sphères précitées et le plan géométral.

Si des considérations sur l'infini appliqué à l'analyse et à la géométrie, nous passons au second point relatif à l'analyse de situation, nous nous trouvons en face d'un nouveau problème philosophique qui a aussi appelé l'attention de quelques savants; mais cela ne doit pas nous empêcher de signaler, notre idée en prévision du cas où elle pourrait être mise a profit.

Dans notre désir d'éviter les objections que présente M. Carnot dans la préface de sa géométrie de position, nous avons été poussé à réaliser certains investigations qui ont donné pour résultat une espèce de généralisation des procédés connus en analyse ordinaire et en géométrie analytique au sujet des quantités positives et négatives.

Pour cela, nous prenons, indépendamment de l'argument et du module, un nouvel élément qui a pour objecte de fournir le meilleur mode de développer le dit module, suivant qu'on s'approche ou qu'on s'éloigne de son origine dans son développement pour produire un mouvement de recul ou un mouvement en avant.

Nous savons qu'en analyse la qualité de la quantité devient exclusivement dépendante du facteur argumental, le module restant constamment positif. Suivant notre manière de voir il y a lieu de supposer un mouvement en avant et un mouvement de recul pour ce dernier; et cette idée nouvelle permet de nouvelles combinaisons de signes qui tendent à compléter l'étude des quantités positives et négatives.

Sur cette base plus large on arrive à établir quatre formules typiques pour des directions quelconques de droites placées dans un plan qui contient comme axe de référence la direction des quantités réelles. Puis enfin, en généralisant les formules antérieures, on obtient l'expression de la quantité *directive* dans toutes les directions de l'espace, grâce à quatre autres formules dépendant chacune de quatre éléments.

A ce point nous nous permettrons de poser les questions suivantes: "Les idées que nous nous sommes borné à esquisser sont-elles les seules qui puissent se produire pour arriver à la solution définitive des problèmes importants que nous avons signalés? Sont-cela les seuls problèmes qui doivent appeler l'attention du véritable mathématicien?". Certes, nous ne saurions avoir une telle prétention.

De toutes façons il résulte de notre exposé que la philosophie doit guider nos pas: mais si l'on veut que les fruits de l'intelligence soient profitables à la science, il convient de ne pas s'attacher à une philosophie quelconque, car on comprend fort bien ce qui précède que nous ne devons la chercher ni dans la zone torride, ni dans la zone glaciale, mais dans la zone tempérée et à l'abri de toutes les exagérations produites par l'orgueil de l'homme, en prétendant passer au-delà des frontières qui enserrent son intelligence.

Supposer, par exemple, qu'a l'hypothèse d'Euclide sur la valeur de la somme des angles d'un triangle plan, on peut en ajouter encore deux autres, cela n'offre rien d'inadmissible: mais prétendre que la géométrie que nous pouvons apprécier se renferme bonnement dans ces nouvelles théories, c'est demander l'impossible.

Soutenir que les quantités négatives sont plus petites que zéro, c'est partir d'une mauvaise base pour être bientôt victime des paradoxes que signale M.Carnot dans sa célèbre "Géométrie de Position".

Dire, par exemple, que la ligne droite est une ligne fermée; que toutes les droites dans un plan ou que toutes les plans dans l'espace se rencontrent respectivement, c'est se mettre en opposition flagrante avec le sens commun, lequel signale la ligne séparative qui distingue l'homme judicieux de l'homme d´équilibré.

Et puisque la présent Congrès a pour but de rechercher les meilleurs moyens de perfectionner les procédés d'enseignement, je crois que le moment est arrivé d'élever la voix pour appeler l'attention des mathématiciens, afin que par leur illustration et leur savoir, ils pèsent de toute leur influence dans les centres d'enseignement pour y imprimer dans la marche des études le sceau régénérateur de l'enseignement intégral, en les rapprochant constamment de cette ligne importante qui représente l'intersection des deux sphères réelle et idéale, entre lesquelles l'homme se meut: Que l'on unisse une fois pour toutes la théorie à la pratique, et la pratique à la théorie; que l'on unisse une fois pour toutes la philosophie aux mathématiques et les mathématiques à la philosophie.

Tâchons d'obtenir qu'on n'oblige pas les jeunes gens qui veulent s'adonner aux sciences à avoir la vue constamment fixée ou sur la Terre, ou vers le Ciel. Evitons en un mot d'atrophier leur intelligence en leur procurant un enseignement purement pratique, en empêchant leur esprit de s'élever dans ces précieuses et splendides régions où s'inspirèrent Leibnitz, Descartes, Abel et Cauchy. Ne permettons pas non plus que l'on maintienne ces jeunes intelligences dans la région mystérieuse de l'infini mathématique, en les portant vers cette série de géométries fantastiques capables de rendre fou le cerveau le mieux équilibré, puisque personne ne peut se former une idée exacte de ce qu'il n'est possible ni de concevoir ni d'imaginer.

Quel effet doit-on produire dans l'esprit d'un élève quand on lui dit, avant de l'y avoir préparé par une explication philosophique, que de plusieurs termes d'une somme, nous pouvons n'en garder qu'un seul sans que le résultat soit altéré! Quel jugement pourra former le jeune homme d'une intelligence claire, quand on lui dira qu'il faut admettre qu'une droite étant prolongée par ses deux extrémités, celles-ci arrivent à se toucher!

En vérité, il n'y a plus alors d'autre ressource que d'accepter ou de rejeter ces sortes de principes. Dans le premier cas, il est très possible qu'il reste de la défiance ou du découragement: c'est peut-être là cause de la répugnance que ne tardent pas de ressentir beaucoup d'esprits qui se consacrent à l'étude des mathématiques. Dans le second cas, on éprouve le besoin de déchiffrer les mystères que renferment en eux de pareils principes.

Il est donc de tout intérêt que les savants modernes fixent leur attention sur ce second point. Pou cela il convient que les mathématiciens soient mieux disposés en faveur de la philosophie et pour atteindre un si bel idéal, il devient indispensable que l'on établisse dans toutes les Universités des chaires sérieuses de métaphysique appliquée aux mathématiques, afin d'extirper du sein d'une science si précieuse tout élément qui puisse la compromettre.

Qu'il nous soit permis enfin, pour terminer, d'affirmer notre conviction que cette précieuse et douce union entre les mathématiques et la philosophie deviendrait, dès le moment où elle serait établie, non seulement la pierre de touche pour étudier l'esprit des doctrines assises par Descartes, Newton, Leibnitz, etc., mais encore le moyen le plus efficace pour faire germer dans la jeunesse qui s'adonne aux sciences de nouvelles sources de connaissances, de nouvelles conceptions, des points de vue complètement inconnus.

De là résulterait nécessairement pour les mathématiques, au lieu de ce mouvement de rotation qui ne cesse depuis longtemps de les retenir stationnaires, un véritable mouvement d'impulsion qui les pousserait en avant vers le progrès.

Barcelone, mars 1900
Lauro Clariana Ricart

Revue Internationale de L'enseignement. Mathématiques et Philosophie. 2º Semestre año 1.900. Págs. 516-525.