Generalidades y Aplicación
de las
Curvas Unicursales

1909

Grandes son las dificultades que presenta el análisis matemático, cuando se pretende estudiarlo a fondo; sin embargo, bien cabe afirmar con M. Hermite que la célebre Memoria de M. Puiseux, sobre las funciones algebraicas, publicada a mediados del siglo XIX, dio origen a una serie de investigaciones que sellan sin duda nuestros últimos tiempos

El distinguido matemático francés M. Cauchy, puede responder de nuestro aserto al formar un nuevo tecnicismo para el análisis matemático, partiendo de la cantidad compleja o imaginaria. Conocidos son los preciosos resultados que deduce de los puntos críticos con relación a las integrales de diferenciales algebraicas para cuando la variable independiente sigue ciertos contornos en su plano; así se llega al conocimiento de la periodicidad de las funciones circulares, de las elípticas, y hasta de las trascendentes dependientes de muchas variables definidas por Jacobi, como funciones inversas de las integrales hiperelípticas.

No cabe duda que las tendencias de los analistas modernos, es hacia la Geometría; su hermana, la cual tan buenos servicios le presta. Así se explica como se ha podido llegar a las bellas y admirables concepciones de Riemann, Lüroth, Nöther, Göpel, Rosenhain y Weierstrass, con tecnicismos y representaciones gráficas especiales.

En la presente Memoria no pretendemos remontarnos a esas alturas; pues a poco que nos extendiéramos, ella rebasaría los límites que buenamente se le puede conceder, aparte de que saldría del objetivo que nos impulsa al escribirla. Así es que de los notables trabajos realizados por los distinguidos matemáticos MM. Cayley, Chasles y Clebsch, basados en la Geometría proyectiva y en la teoría de las Formas matemáticas, solo nos ocuparemos, y aun a grandes rasgos, de la preciosa rama que se refiere a las curvas unicursales, dando no obstante con la mayor claridad posible y con los detalles convenientes, los principios sobre los cuales se apoya la teoría de dichas curvas, conforme a las indicaciones de MM. Hermite y Jordan al objeto de recabar luego la aplicación de las mismas a la determinación del área comprendida por la curva cerrada perteneciente a los *foliums* de Descartes de tercero y cuarto orden; y llegados a este punto, tendremos ocasión de apreciar cual es la importancia de semejante estudio, que así permite salvar en muchos casos las dificultades que presenta el análisis matemático ordinario.

De momento podemos afirmar que si se tiene la integral:

$$\int F(x, y)dx,$$

en el concepto de que *F(x,y)* represente una función racional en *x* e *y* siendo además *y* una expresión irracional en *x*, determinada por la ecuación: $\varphi(x,y)=0$; si por la sustitución de una nueva variable *t*, cabe lograr que se tenga $x=\pi(t)$ e $y=\psi(t)$, siendo estas funciones racionales en *t*, la curva representada por la ecuación $\varphi(x,y)=0$, pertenecerá a la clase de curvas que se designan bajo el nombre de *unicursales*, y en su virtud la integral dada será dependiente también de una función racional en *t*.

Además, digno de mención es que la función correspondiente a las curvas unicursales pertenezca al género cero: principio altamente importante que pretendemos desarrollar suficientemente. Mas para ello es preciso saber que el género de una función anda íntimamente enlazado con los puntos singulares que contiene la curva que a dicha función se refiere, como así lo demuestra la fórmula que da el género de una función dependiente de su orden y del número de puntos singulares que la curva plana respectiva puede ofrecer.

Después de las consideraciones generales precedentes, demos ya comienzo a nuestra Memoria, considerando una función, tal como la que a continuación se expresa:

$$(1) \qquad 0=F(x,y)=A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Gy^2+\cdots+Px^n+\cdots+Qy^n$$

fácilmente se concibe que el número de términos o constantes que encierra esta ecuación completa, es:

$$1+2+3+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Así pues, al tomar:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$$

puntos (*x*,*y*), pertenecientes a la función que precede, después de las sustituciones respectivas en (1), se formará un sistema del cual se sacaran las relaciones de los coeficientes respecto a uno de ellos, determinando por consiguiente la curva única de grado *n*, que pasa por los puntos supuestos.

Ahora bien, si el número de puntos, se reduce a

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2$$

los coeficientes de la curva se expresarán en función lineal de dos de entre ellos, tales, como *A* y *B*, a fin de que resulte en este caso también el sistema determinado. La ecuación de la curva, toma en este concepto, la forma *AM* + *NB* = 0, siendo *M* y *N*, funciones en *x* é *y* del orden *n*. Las constantes *A* y *B* de que depende el resultado, dan lugar a una relación que puede tomar diferentes valores: de suerte que al variar esta relación, se obtiene un haz de curvas, pasando las diferentes curvas del haz por los puntos dados.

Empero fácilmente se concibe que dichas curvas además deben satisfacer a los n^2 puntos de intersección de las curvas M = 0 y N = 0; luego si suponemos n > 2 cabrá escribir:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2<n^2$$

Al designar por z los puntos que faltan en el primer miembro para que sea igual al número total de puntos de intersección, expresado por n^2, resulta:

$$z+\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2=n^2$$

de donde

$$z=n^2-\frac{(n+1)(n+2)}{2}+2$$

Estos puntos son comunes a las curvas del haz.

Para mayor inteligencia, supongamos que sea n = 3. En este supuesto el número de puntos necesarios para determinar un haz de curvas de tercer grado, será:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}+2=\frac{4.5}{2}-2=8$$

resultando para el número de puntos comunes restantes,

$$z=9-\frac{4.5}{2}+2=1$$

Luego todas las curvas del haz, pasan por un punto noveno, aparte de los ocho anteriores.

Según estos preliminares, podemos admitir que toda función algebraica irreducible del orden n, tal como $F(x,y)=0$, el mayor número de puntos singulares que puede ofrecer, viene expresado por la fórmula:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

A este punto, interesa tener presente que si p es el grado de multiplicidad de un punto singular p, debe considerársele como resultado de p ramas de curvas concurrentes al mismo. De suerte que si la función Φ, contiene dicho punto, fácilmente se concibe que al alterar indefinidamente poco los coeficientes de la función anterior, la línea correspondiente quedará alterada y cortará a las p ramas, determinando un número de intersecciones igual al grado de multiplicidad del punto singular, por lo cual debe considerarse a este punto como formado de p intersecciones.

Ahora bien, si dicha función Φ, es del orden n - 1, el mayor número de puntos que determina la curva correspondiente, estará dado por la fórmula general:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$$

que ya hemos hallado, y en el supuesto de cambiar en ella n por n - 1, resulta:

$$\frac{n(n+1)}{2}-1$$

Al tomar estos puntos en las curvas representante de la función F, que es del orden n, y considerando que los puntos singulares de F, resultan tan solo de la intersección de dos ramas, vamos a probar que el número de puntos singulares que pueden suponerse en F, no puede alcanzar el valor de la expresión:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

En efecto, el número total de intersecciones de F y Φ, sería a ser posible lo contrario

$$\frac{n(n+1)}{2}-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1 \quad (2)$$

puesto que en

$$\frac{n(n+1)}{2}-1$$

se supone que existen ya una vez los puntos singulares

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

de F, y como éstos deben contarse por dos veces, por ser dobles, basta agregar a

$$\frac{n(n+1)}{2}-1$$

una sola vez la expresión

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

para tener el número de puntos comunes a las dos curvas representantes de F y Φ.

Al reducir ahora la expresión (2), se obtiene:

$$\frac{n(n+1)}{2}-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=n(n-1)+1$$

resultado inadmisible, siendo las funciones *F* y Φ, irreducibles, pues según el análisis el número de puntos de intersección de las curvas respectivas no puede ser mayor que: $n(n-1)$.

Fácilmente se comprende que si tomáramos una cantidad mayor que:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1,$$

con mucha más razón los puntos comunes a las dos curvas sería mayor que $n(n-1)$. Inútil es también considerar que el orden de Φ, disminuya o aumente pues en ambos casos el resultado de puntos comunes a *F* y Φ, siempre supera al producto de sus dos ordenes respectivos: en efecto, si Φ = *n*, se tiene:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n^2+2>n^2$$

cuando Φ = *n* + 1, se obtiene:

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n^2+n+4=n(n+1)+4>n(n+1)$$

Por el contrario si Φ = *n* - 2, se halla

$$\frac{(n-12)n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n^2-2n+1=n(n-2)+1>n(n-2)$$

suponiendo Φ = *n* – 3, se reduce

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n^2-3n+2=n(n-3)+2>n(n-3)$$

Luego el mayor número de puntos singulares que pueden suponerse en la función *F*, de orden *n*, es

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

pues solamente en este caso se tiene

$$\frac{n(n+1)}{2}-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n(n-1)$$

Según esta conclusión al suponer en dicha función *F*, solo puntos múltiplos de dos ramas para mayor sencillez correspondiente a tangentes separadas o no, sin admitir otros puntos singulares de mayor orden, podremos escribir

$$d + r \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

siendo *d* los puntos múltiplos ordinarios y *r* los de retroceso.

Esta fórmula conduce inmediatamente al conocimiento del género cero de la función, cuando se considera el signo igual.

Después de estos preliminares, podemos ya entrar en consideraciones que se refieran a la determinación del género de la función *F*.

Supongamos ahora otra función Φ (*x*,*y*) = 0, cuyo grado sea $m \overline{\gtrless} n$. En su virtud la curva correspondiente a Φ cortará a la de *F*, en *mn* puntos .

Fácilmente se concibe que pueden considerarse muchas otras curvas de grado *m* que pasen por los mismos *n* puntos de *F*, las cuales podrán expresarse analíticamente por la fórmula general Φ + *FG = 0* , siendo *G* un polinomio cualquiera de grado *m - n*.

Verdaderamente que la indeterminación que se supone en los coeficientes del polinomio *G*, permite anular igual número de coeficientes en Φ.

De suerte que siendo

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

los coeficientes de Φ, y

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2},$$

los de *G*, basta hallar la diferencia de estas dos fórmulas para tener los que nos quedan a determinar:

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = \frac{n(2m+3-n)}{2}$$

Esta fórmula representa el número de coeficientes restantes a los supuestos primero, pertenecientes a la función Φ.

Ahora bien, en el concepto de que la curva correspondiente a esta función Φ, pase por los puntos singulares *d* + *r* de *F*, la fórmula que da el número de puntos arbitrarios que hay que tomar sobre *F*, para que quede completamente determinada la curva de Φ, será:

$$\frac{n(2m+3-n)}{2}-1-d-r=q$$

Para aclarar estas ideas supondremos un caso particular, siendo cinco y tres los órdenes respectivos de Φ y *F*, resultando para *G, m* - *n* = 2.

Así, pues, la expresión Φ + *FG* = 0, toma la forma siguiente:

$$\left(A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Hy^2+\cdots+Mx^5+\cdots+Ny^5\right)+$$
$$+\left(A_1+B_1x+C_1y+D_1x^2+E_1xy+H_1y^2+Kx^3+\cdots Ly^3\right)\times\left(A_2+B_2x+C_2y+D_2x^2+E_2xy+H_2y^2\right)=0$$

Al verificar operaciones se comprende que los seis coeficientes *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *H*, de Φ, pueden hallarse dependientes de los que se suponen en *G*. De modo que quedan a determinar en Φ, los que siguen a *H*, los cuales se deducen de la diferencia de las fórmulas generales

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$$

al atribuir valores particulares, resulta en el caso que consideramos: 21 – 6 = 15

Por otra parte, como se supone que se utiliza el punto singular que podemos considerar en *F* por ser una función de tercer orden, como veremos más adelante, y además, como la curva queda determinada quitando una unidad al número de coeficientes que se considera, resulta en definitiva que basta tomar trece puntos arbitrarios, $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots$ en la curva *F*; puntos que suponemos coincidentes con los de Φ, al objeto de quedar los coeficientes de esta función completamente determinados en función racional de los puntos arbitrarios $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots$ y de los coeficientes de *F*.

El resultado que hemos obtenido en el caso particular que nos ocupa, concuerda con la fórmula general hallada, relativa a los puntos arbitrarios que deben tomarse expresados en general por

$$(a) \quad \frac{n(2m+3-n)}{2}-1-d-r=q$$

lo cual en el caso presente, se reduce a:

$$\frac{n(2m+3-n)}{2}-1-d=q$$

y al atribuir valores particulares, se obtiene

$$\frac{3(2.5+3-3)}{2}-1-1=13$$

Pasemos por fin, a la determinación del género correspondiente a la función *F*, que es del orden *n*.

Para ello empezaremos recordando las expresiones anteriores $\Phi + FG = 0$ y $F = 0$, las cuales permiten obtener, al eliminar *y*, una función en *x*, tal como $\psi(x) = 0$, del grado *mn*, siendo sus coeficientes funciones racionales de los de *F* y de las coordenadas $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots$.

Empero si descomponemos esta función en el producto de otras dos, se tiene $\psi(x) = Q(x)R(x)$; si el grado de Q es: $q + 2d + 2r$ contando cada uno de los puntos singulares como resultado de dos ramas de curvas, en este supuesto el grado de la función *R*, será: $mn - q - 2d - 2r$, y según la fórmula (a), tendremos:

$$mn - \left[\frac{n(2m+3-n)}{2} - 1 - d - r\right] - 2d - 2r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = p$$

Este resultado representa el número de puntos no disponibles que faltan para que junto con los arbitrarios y singulares pueda igualarse la suma total a *mn*, y es la fórmula que representa el género de *F*, expresándose en general por *p*.

Si ξ es una raíz de la ecuación $\psi(x) = 0$, se obtendrá el valor de *y* por los procedimientos que indica el análisis ordinario, aplicado al sistema

$$F(\xi, y) = 0, \qquad \Phi(\xi, y) + F(\xi, y)\, G(\xi, y) = 0$$

resultando *y* racional en ξ, y de las coordenadas $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots$

Digno de mención es que si *m* no fuese mayor que *n*, sino igual a *n - 1*, o también a *n - 2*, el género de la curva *F*, no sufriría alteración alguna.

Para demostrar este principio tengamos en cuenta que la función Φ, que suponemos del orden *m*, tiene un número de coeficientes representado por

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Así el número de intersecciones de Φ y *F*, correspondiente a los puntos no disponibles será:

$$mn - \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1\right] - d - r$$

en el supuesto de que sea $m < n$

Luego si $m = n - 1$, se tiene:

$$n(n-1)-\frac{n(n+1)}{2}+1-d-r=\frac{(m+1)(m+2)}{2}-d-r=p$$

Si $m = n - 2$, resulta:

$$n(n-2)-\frac{(n+1)n}{2}+1-d-r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r=p$$

Ahora al suponer $m = n - 3$, obtendríamos:

$$n(n-3)-\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1-d-r=\frac{n^2-3n}{2}-d-r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1-d-r$$

resultado ya no admisible, pues no corresponde con el de p, notándose cada vez más la diferencia a medida que disminuye el valor de m.

Volviendo a la fórmula $\psi(x)=Q(x)R(x)$, cabe suponer que $Q(x)$ sea del grado $mn - p$ y $R(x)$ del grado p, a fin de que $\psi(x)$, resulte del grado mn, como hemos supuesto desde un principio y sabiendo que el género p, se expresa *por* $mn - q - 2d - 2r$, resulta que $Q(x)$ es del grado $q + 2d + 2r$.

Con estos datos, vamos a probar que las curvas unicursales pertenecen al género cero. En efecto, según lo precedente podemos escribir:

$$\overset{mn}{\psi(x)}=\overset{mn-p}{Q(x)}\overset{p}{R(x)}=\overset{q+2d+2r}{Q(x)}\times\overset{mn-q-2d-2r}{R(x)}$$

Ahora si tomamos un punto arbitrario menos de los necesarios para quedar completamente determinados los coeficientes que corresponden a la función $\psi(x)$, según los principios anteriores, se comprende fácilmente que vendrán expresados en función de dos cualesquiera de ellos, tales, por ejemplo, como A y B, resultando en definitiva la expresión $AM + BN = 0$, siendo M y N funciones racionales de las coordenadas de los puntos arbitrarios que se hayan tomado.

En este concepto la función $Q(x)$ que depende de q correspondiente a los puntos arbitrarios tomados, será de grado $q - 1 + 2d + 2r = mn - p - 1$, lo cual obliga a que el grado de $R(x)$ sea $p + 1$, para que el producto corresponda al grado mn de $\psi(x)$. De suerte que se tendrá

$$\overset{mn}{\psi(x)}=\overset{mn-p-1}{Q(x)}\ \overset{p+1}{R(x)}$$

y en el supuesto de $p = 0$, resulta:

$$\overset{mn}{\psi(x)}=\overset{mn-1}{Q(x)}\overset{1}{R(x)}$$

Luego la función $R(x)$, es de primer grado y al determinar su valor en la igualdad anterior, resultará dependiente de $AM + BN$, o sea de $A(M + Nt)$ al suponer $\frac{B}{A} = t$, así, pues, x, será racional en t y de los puntos arbitrarios.

En cuanto a la y, es de ver que reunirá condiciones análogas a las de x, puesto que para su determinación basta atender al sistema

$$F(\xi, y) = 0, \qquad \Phi(\xi, y) + F(\xi, y) G(\xi, y) = 0$$

conforme hemos indicado ya en otro lugar, siendo ξ un valor de x; de modo que al determinar el *m.c.d.* de esas dos funciones anteriores, refiriéndonos a la variable y, llegaremos a una ecuación de primer grado en y, puesto que el último resto será cero, por representar la función $\psi(x)$ para cuando $x = \xi$, siendo ξ, una raíz de $\psi(x) = 0$.

De suerte que y, depende de los mismos elementos que x, es decir que será también función racional en t.

En suma, se tiene que siendo cero el género de la función, tanto la x, como la y, de dicha función son funciones racionales de un mismo parámetro, o sea de una misma variable, tal como t, y por consiguiente, según la definición atribuida a las curvas unicursales, dedúcese que dichas curvas pertenecen al género cero.

Varias consecuencias importantes son las que se deducen del principio anterior.

1º).- Sabemos que la fórmula que determina el género de una función es:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = p$$

luego si $p = 0$, se obtiene

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = d + r$$

Resultado importante por cuanto nos manifiesta que en el género cero, referente a una curva unicursal del orden n, la suma de los puntos singulares que contiene es igual a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Así, pues, en el supuesto de que todos los puntos singulares sean dobles, se deduce, según el análisis, que es suficiente que las funciones

$$F(x, y) = 0, \qquad \frac{F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

tengan

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos comunes para que la función *F(x,y)* = 0, pertenezca al género cero y a las curvas unicursales.

2º).- Toda curva unicursal del grado *n*, admite:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos dobles, y recíprocamente una curva de grado *n* que admita

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos dobles es unicursal.

3º).- El género cero, supone el máximo de puntos dobles en la función y como quiera que las curvas unicursales pertenecen a dicho género, de ahí se infiere que las curvas unicursales admiten el máximo de puntos dobles que pueden corresponder en la función que se considera.

☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼

Pasemos a casos más concretos.

Cuestión difícil por no decir imposible es en general el poder hallar el valor en *y* de la función *F*, naciendo de ahí la importancia de las curvas unicursales, pues si la función dada, permite obtener *x* é *y* en función racional de un solo parámetro, la función *ydx*, será una función algebraica racional de dicho parámetro, condición muy ventajosa para poder integrar. En tales condiciones hállanse las ecuaciones que a continuación se expresan.

Sea en primer lugar:

$$(1) \qquad Ay^m + Bxy^{m-1} + \cdots + Kx^{m-1}y + Lx^m = ay^{m-1} + bxy^{m-2} + \cdots + hx^{m-2}y + kx^{m-1}$$

A,B,…K,L,a,b…h,k figuran como constantes.

Al suponer $y = \theta x$, resulta:

$$x = \frac{a\theta^{m-1} + b\theta^{m-2} + \cdots + k}{A\theta^m + B\theta^{m-1} + \cdots + L} \qquad y = \frac{a\theta^m + b\theta^{m-1} + \cdots + k\theta}{A\theta^m + B\theta^{m-1} + \cdots + L}$$

Luego la ecuación (1) pertenece a las curvas unicursales.

Sea en segundo lugar

$$(2)\qquad \left(Ay^m + Bxy^{m-1} + \cdots + Kx^{m-1}y + Lx^m\right)^2 = \left(y^2 + uxy + vx^2\right)\left(ay^{m-2} + bxy^{m-3} + \cdots + hx^{m-2}\right)^2$$

Justifiquemos como en este segundo ejemplo puede obtenerse *x* é *y* en función racional de un mismo parámetro o variable; y que por consiguiente pertenece (2) también a las curvas unicursales.

En efecto, al suponer $y = tx$, se obtiene:

$$x = \sqrt{t^2 + ut + v}\;\; \frac{at^{m-2} + bt^{m-3} + \cdots + h}{At^m + Bt^{m-1} + \cdots + L}$$

Además, al admitir las igualdades siguientes

$$(a)\qquad t^2 + ut + v = (t-\alpha)(t-\beta) = (t-\alpha)^2\theta^2$$

resulta

$$t - \beta = (t-\alpha)\theta^2 \quad \text{o sea} \quad t = \frac{\beta - x\theta^2}{1-\theta^2}$$

y al sustituir este valor en (*a*), hállase

$$\sqrt{t^2 + ut + v} = (t-\alpha)\theta = \frac{\beta-\alpha}{1-\theta^2}\,\theta$$

Así pues, las fórmulas anteriores en *x* é *y*, resultan racionales en función de θ.

Vamos a considerar $m = 3$ ó $m = 2$ respectivamente en (1) y (2) para referirnos a las curvas unicursales de tercero y cuarto orden.

Empero, antes de pasar a su estudio, determinaremos los puntos singulares que en cada caso resultan, según el orden que se considere y supuesto que se trata del género cero, la fórmula general de *p*, se transforma en:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = d + r \qquad (b)$$

En su virtud, cuando n = 3, se obtiene un solo punto singular. Si se tiene $n = 4$, resultan tres puntos singulares, los cuales dan lugar al triángulo de referencia, siendo posible en ciertos casos que se opere alguna reducción.

Así podríamos continuar, calculando los puntos singulares que pueden corresponder en funciones de órdenes superiores a los supuestos anteriormente, siempre partiendo de la fórmula general (b).

Como caso particular de la curva unicursal de tercer orden, vamos a ocuparnos de la ecuación del *folium* de Descartes, bajo la forma que la presenta M. Hermite.

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

al suponer $y = x\theta$, resulta:

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3 + 1}, \qquad y = \frac{3\theta^2}{\theta^3 + 1},$$

confirmándonos estas dos igualdades que la función primitiva pertenece a las curvas unicursales.

Ahora si α es una raíz cúbica imaginaria de la unidad, según la ecuación $\theta^3 + 1 = 0$, resulta:

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3 + 1} = -\frac{1}{\theta + 1} - \frac{\alpha^2}{\theta + \alpha} - \frac{\alpha}{\theta + \alpha^2}$$

(1)

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3 + 1} = \frac{1}{\theta + 1} + \frac{1}{\theta + \alpha} + \frac{1}{\theta + \alpha^2}$$

---

(1) Para la demostración de estos dos resultados, empezaremos por suponer: $-I, -\alpha, -\alpha^2$, las tres raíces cúbicas de la unidad, cuya suma es: $-I - \alpha - \alpha^2 = 0$, o sea $-\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 = 0$, de donde $\alpha^3 = +I$.

Al descomponer $x = \dfrac{3\theta}{\theta^3 + I}$ en fracciones simples, se tiene:

$$\frac{3\theta}{\theta^3 + I} = \frac{A}{\theta + I} + \frac{B}{\theta + \alpha} + \frac{C}{\theta + \alpha^2}$$

luego

$$A\left[\theta^2 + \theta\alpha + \alpha^2\theta + \alpha^3\right] + B\left[\theta^2 + \theta + \alpha^2\theta + \alpha^2\right] + C\left[\theta^2 + \theta + \alpha\theta + \alpha\right] = 3\theta$$

de donde

$$A + B + C = 0, \quad A\left(\alpha + \alpha^2\right) + B\left(I + \alpha^2\right) + C\left(I + \alpha\right) = 3, \quad A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha = 0$$

y por consiguiente

$$A = -(B + C), \qquad (B + C) + B\left(I + \alpha^2\right) + C\left(I + \alpha\right) = 3, \qquad -(B + C) + B\alpha^2 + C\alpha = 0$$

Si restamos las dos últimas igualdades, se obtiene:

$$3(B + C) = 3 \quad \text{o sea} \quad B + C = I \quad [\mathrm{I}]$$

Al sumarlas, se deduce

$$B\left[I + 2\alpha^2\right] + C\left[I + 2\alpha\right] = 3 \quad \text{o sea} \quad 2\alpha^2 B + 2\alpha C = 2$$

luego

$$B\alpha^2 + C\alpha = I \quad [2]$$

Formando sistema entre [1] y [2], cabe escribir

$$B\alpha + C\alpha = \alpha, \quad B\alpha^2 + C\alpha = I, \quad \text{luego} \quad B\left(\alpha - \alpha^2\right) = \alpha - I$$

Fórmulas interesantes por lo que expondremos más tarde

Más antes de pasar adelante tratemos de hallar las condiciones para que la integral referida a las cuadraturas: $\int y\,dx$, se resuelva en una función algebraica, siendo *ydx*, una función de una sola variable, como consecuencia de las curvas unicursales.

Empezaremos aplicando la fórmula de Bernoulli a la integral $\int y\,dx$, de donde

$$\int ydx = yx - \int xdy$$

o sea

$$\frac{1}{2}\int ydx = \frac{1}{2}yx - \frac{1}{2}\int xdy = \int ydx - \frac{1}{2}\int xdx$$

---

o sea:

$$B = -\frac{I}{\alpha} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^3} = -\alpha^2, \qquad C = I - B = I + \alpha^2 = I - (I + \alpha) = -\alpha$$

$$A = -(B + C) = -\left(-\alpha^2 - \alpha\right) = \alpha^2 + \alpha = -\alpha^3 = -I$$

Así pues se tiene por fin:

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3 + I} = \frac{A}{\theta + I} + \frac{B}{\theta + \alpha} + \frac{C}{\theta + \alpha^2} = \frac{I}{\theta + I} - \frac{\alpha^2}{\theta + \alpha} - \frac{\alpha}{\theta + \alpha^2}$$

Procediendo de un modo análogo al anterior, obtendremos las igualdades siguientes:

$$A_1 + B_1 + C_1 = 3, \qquad A_1\left(\alpha + \alpha^2\right) + B_1\left(I + \alpha^2\right) + C_1(I + \alpha) = 0, \qquad A_1\alpha^3 + B_1\alpha^2 + C_1\alpha = 0$$

$$A_1 = 3 - (B_1 + C_1), \qquad -[3 - (B_1 + C_1)] + B_1\left(I + \alpha^2\right) + C_1(I + \alpha) = 0, \qquad 3 - [B_1 + C_1] + B_1\alpha^2 + C_1\alpha = 0$$

Al restar estas dos igualdades, se obtiene:

$$-6 + 2(B_1 + C_1) + B_1 + C_1 = 0, \qquad B_1 + C_1 = 2 \qquad [3]$$

De la suma, resulta:

$$B_1\left(I + 2\alpha^2\right) + C_1(I + 2\alpha) = 0, \quad \text{o sea} \quad 2B_1\alpha^2 + 2C_1\alpha = -(B_1 + C_1) = -2$$

$$B_1\alpha^2 + C_1\alpha = -I \qquad [4]$$

Formando sistema con [3] y [4], hállase

$$B_1\left(\alpha - \alpha^2\right) = 2\alpha + I, \qquad B_1[\alpha + I + \alpha] = 2\alpha + I, \qquad B_1 = I$$

$$C_1 = 2 - B_1 = I, \qquad A_1 = 3 - (B_1 + C_1) = 3 - 2 = I$$

Así, pues, en definitiva, se tiene

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^2 + I} = \frac{A_1}{\theta + I} + \frac{B_1}{\theta + \alpha} + \frac{C_1}{\theta + x^2} = \frac{I}{\theta + I} + \frac{I}{\theta + \alpha} + \frac{I}{\theta + \alpha^2}$$

luego

$$\int ydx = \frac{1}{2}yx - \frac{1}{2}\int [ydx - xdy]$$

Interesa que la integral del segundo miembro $\int [ydx - xdy]$ cumpla con las condiciones apetecidas para lo cual será preciso introducir nuevas cantidades que contribuyan al mismo fin. Para ello consideremos las igualdades siguientes:

$$X = \lambda x + \lambda' y \qquad Y = \mu x + \mu' y$$

las cuales nos permiten escribir, según Hermite

$$Y\,d\,X - X\,d\,Y = (\mu x + \mu' y)(\lambda\, dx + \lambda' dy) - (\lambda x + \lambda' y)(\mu\, dx + \mu' dy) = (\mu'\lambda - \lambda'\mu)(ydx - xdy)$$

Al integrar se obtiene

$$(\mu'\lambda - \lambda'\mu)\int (ydx - xdy) = \int [Y\,d\,X - X\,d\,Y]$$

De suerte que si la integral del segundo miembro puede resolverse en función algebraica, habremos logrado que la del primer miembro, o sea la primitiva, satisfaga a las mismas condiciones.

Vamos, pues, a determinar las condiciones a que deben satisfacer *X* é *Y*, refiriéndonos a la ecuación del *folium* de tercer orden antes citada, pero representando de momento $\alpha, \beta, \gamma,$ las tres raíces de la ecuación $\theta^3 + 1 = 0$.

Así pues, al suponer los valores de *x* é *y*, descompuestos en fracciones simples, se tiene

$$x = \frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma} \qquad y = \frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma}$$

Luego al sustituir estos valores en las fórmulas de condición

$$X = \lambda x + \lambda' y \qquad Y = \mu x + \mu' y$$

se deduce

$$X = \lambda\left[\frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma}\right] + \lambda'\left[\frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma}\right]$$

$$Y = \mu\left[\frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma}\right] + \mu'\left[\frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma}\right]$$

de donde

$$X = \frac{A\lambda + A'\lambda'}{\theta - \alpha} + \frac{B\lambda + B'\lambda'}{\theta - \beta} + \frac{C\lambda + C'\lambda'}{\theta - \gamma}$$

$$Y = \frac{A\mu + A'\mu'}{\theta - \alpha} + \frac{B\mu + B'\mu'}{\theta - \beta} + \frac{C\mu + C'\mu'}{\theta - \gamma}$$

Empero la indeterminación de $\lambda, \lambda', \mu, \mu',$ nos permite establecer las ecuaciones de condición

$$B\lambda + B'\lambda' = 0 \qquad C\mu + C'\mu' = 0$$

en virtud de las cuales los valores de *X* é *Y*, en términos generales, se expresaran por

$$X = \frac{P}{\theta - \alpha} + \frac{Q}{\theta - \gamma} \qquad Y = \frac{R}{\theta - \alpha} + \frac{S}{\theta - \beta} \qquad (\pi)$$

Al derivar, según θ, estas dos igualdades, hállase

$$\frac{dX}{d\theta} = -\frac{P}{(\theta - \alpha)^2} - \frac{Q}{(\theta - \gamma)^2} \qquad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{R}{(\theta - \alpha)^2} - \frac{S}{(\theta - \beta)^2}$$

de donde

$$\frac{Y\,dX - X\,dy}{d\theta} = \left[\frac{P}{\theta - \alpha} + \frac{Q}{\theta - \gamma}\right]\left[\frac{R}{(\theta - \alpha)^2} + \frac{S}{(\theta - \beta)^2}\right] - \left[\frac{R}{\theta - \alpha} + \frac{S}{\theta - \beta}\right]\left[\frac{P}{(\theta - \alpha)^2} + \frac{Q}{(\theta - \gamma)^2}\right] \qquad (A)$$

Ahora, para que la integral $\int [Ydx - Xd\,Y]$, resulte algebraica es preciso que los residuos pertenecientes al segundo miembro, los cuales podemos designar por *a, b, c,* conforme a los valores α, β, γ, de la variable θ, desaparezcan con el objeto de que sea el resultado independiente de toda función logarítmica; así, pues, debe suponerse *a* = 0, *b* = 0, *c* = 0; empero una cualquiera de estas tres condiciones entra en las otras dos por ser *a* + *b* + *c* = 0 (2); bastando, por consiguiente, suponer por ejemplo, *b* = 0 y *c* = 0.

---

(2).Sabido es por el análisis que si $F(x)$ y $F_1(X)$ son dos polinomios enteros, siendo $F(x) = (x-a)^n (x-b)^p$ y $F_1(x)$ de grado inferior a $F(x)$, se puede escribir:

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \cdots$$

Al integrar, resulta:

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)} dx = Al(x-a) - \frac{A_1}{(x-a)} \cdots + Bl(x-b) - \frac{B_1}{(x-b)} \cdots + \cdots (I)$$

Luego interesa que los términos logarítmicos del segundo miembro se anulen a fin de que la integral del primer miembro pueda representarse por una función algebraica. Ahora bien; todos los términos de (I), excepto los logarítmicos, cabe desarrollarlos en funciones algebraicas. Mas para los términos logarítmicos, se tiene:

Además, como el residuo *b* se refiere al coeficiente de $\frac{1}{\theta-\beta}$; y *c* al de $\frac{1}{\theta-\gamma}$, claro está que al suponer θ igual a β o a γ, según la igualdad (A), se tiene:

$$\frac{P}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{Q}{(\beta-\alpha)^2}=b=0 \qquad \frac{R}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{S}{(\lambda-\beta)^2}=c=0$$

Estas ecuaciones quedan satisfechas, siendo

$$P=(\beta-\alpha)^2, \qquad Q=-(\beta-\gamma)^2, \qquad R=(\gamma-\alpha)^2, \qquad S=-(\lambda-\beta)^2$$

Y si por fin sustituimos estos valores en (π), tendremos conocidos ya los valores de *X* é *Y*, esto es

$$X=\frac{(\beta-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{\theta-\gamma} \qquad Y=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\lambda-\beta)^2}{\theta-\beta}$$

Estas son las condiciones a que debe sujetarse la integral primitiva:

$$\int ydx$$

para que pueda resolverse en función algebraica, conocidas las relaciones que enlazan *X* é *Y*, con *x* é *y*, siendo α, β, γ las tres raíces de la ecuación $\theta^3+1=0$.

Fácil nos será ahora deducir la fórmula que corresponde a

$$\int [Yd\,X-Yd\,X]$$

aunque para ello nos obligue a ciertos desarrollos de cálculo, que de todos modos consideramos conveniente detallar.

$$\frac{I}{x-a}=\frac{I}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\cdots\cdots, \qquad \frac{I}{x-b}=\frac{I}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\cdots$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots=\frac{A+B+\cdots}{x}+\frac{Aa+Bb+\cdots}{x^2}+\cdots$$

e integrando

$$Al(x-a)+Bl(x-b)+\cdots=(A+B+\cdots)lx-\frac{Aa+Bb+\cdots}{x}+\cdots$$

y para que este resultado se refiera a las funciones algebraicas hay que suponer $A+B\cdots=0$, es decir, la suma de todos los residuos de la función igual a cero.

Según los valores hallados anteriormente, se tiene:

$$(\delta)\qquad \begin{aligned} Y\frac{d\,X}{d\,\theta} &= \left[\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta}\right]\left[-\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^2}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\theta-\gamma)^2}\right]= \\ &= -\frac{(\gamma-\alpha)^2(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^2}+(\beta-\gamma)^2\left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\alpha)^2}+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^2}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2}\right] \end{aligned} \qquad (3)$$

---

(3).-Al tomar los términos que están dentro del paréntesis de (δ), podemos descomponerlos en fracciones simples. El primero, da:

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\alpha)^2}=\frac{B}{\theta-\beta}+\frac{A}{(\theta-\alpha)^2}+\frac{A'}{\theta-\alpha}=\frac{B}{\theta-\beta}+\frac{A+A'(\theta-\alpha)}{(\theta-\alpha)^2}=$$

$$=\frac{B\left(\theta^2-2\alpha\theta+\alpha^2\right)+A(\theta-\beta)+A'\left[\theta^2-(\alpha+\beta)\theta+\alpha\beta\right]}{(\theta-\beta)(\theta-\alpha)^2}$$

Luego

$$B+A'=0,\qquad -2B\alpha+A-A'(\alpha+\beta)=0,\qquad B\alpha^2-A\beta+A'\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2$$

de este sistema, se deduce

$$A'=-B,\qquad 2A'\alpha+A-A'(\alpha+\beta)=0,\qquad -A'\alpha^2-A\beta+A'\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2$$

o sea

$$A=A'(\beta-\alpha)\qquad -A'\alpha^2-A'(\beta-\alpha)\beta+A'\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2$$

de donde

$$-A'(\beta-\alpha)^2=(\beta-\alpha)^2$$

y por fin

$$A'=-I,\qquad A=-(\beta-\alpha),\qquad B=I$$

Integrando, resulta

$$\int\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\alpha)^2}d\,\theta=\int\frac{d\,\theta}{(\theta-\beta)}+\int\frac{-(\beta-\alpha)d\,\theta}{(\theta-\alpha)^2}+\int\frac{-d\,\theta}{\theta-\alpha}=l(\theta-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha}-l(\theta-\alpha)$$

Pasemos al segundo término de dentro del paréntesis de la fórmula (δ), el cual de un modo análogo al anterior, dará lugar a los desarrollos siguientes:

$$\frac{(\gamma-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^2}=\frac{A}{\theta-\alpha}+\frac{C}{(\theta-\gamma)^2}+\frac{C'}{\theta-\gamma}=\frac{A\left(\theta^2-2\theta\gamma+\gamma^2\right)+C(\theta-\alpha)+C'(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} A+C'&=0\\ -2A\gamma+C-C'(\alpha+\gamma)&=0\\ A\gamma^2-C\alpha+C'\alpha\gamma&=(\gamma-\alpha)^2\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned} C'&=-A\\ 2C'\gamma+C-C'(\alpha+\gamma)&=0\\ -C'\gamma^2-C\alpha+C'\alpha\gamma&=(\gamma-\alpha)^2\end{aligned}$$

$$C=C'(\alpha-\gamma)\qquad -C'\gamma^2-C'(\alpha-\gamma)\alpha+C'\alpha\gamma=(\gamma-\alpha)^2$$

$$-C'(\gamma-\alpha)^2=(\gamma-\alpha)^2\qquad C'=-I,\qquad C=-(\alpha-\gamma),\qquad A=I$$

Integrando se obtiene:

Al integrar, resulta:

$$\int Y\,d\,X =$$

$$-\int \frac{(\gamma-\alpha)^2(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^3}\,d\,\theta+(\beta-\gamma)^2\left[l(\theta-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha}-l(\theta-\alpha)+l(\theta-\alpha)+\frac{\alpha-\gamma}{\theta-\gamma}-l(\theta-\gamma)-(\theta-\beta)\frac{\beta-\gamma}{\theta-\gamma}+l(\theta-\gamma)\right]=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)^2(\beta-\alpha)^2}{2(\theta-\alpha)^2}-(\beta-\gamma)^2\,\frac{\beta-\alpha}{\theta-\gamma}+(\beta-\gamma)^2\,\frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha} \qquad (\Delta)$$

Ahora si atendemos a las fórmulas de X é Y, veremos que se puede pasar de una a otra, suponiendo sencillamente una permutación entre β y γ, debiendo resultar, sin necesidad de repetir los cálculos anteriores, la expresión siguiente para $\int X\,d\,Y$.

$$\int Y\,d\,X=\frac{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2}{2(\theta-\alpha)^2}-\frac{(\gamma-\beta)^2(\gamma-\alpha)}{\theta-\beta}+(\gamma-\beta)^2\,\frac{\gamma-\alpha}{\theta-\alpha}$$

Al sustituir valores en $\int [Y\,d\,X - X\,d\,Y]$, se obtiene:

$$\int \frac{(\gamma-\alpha)^2\,d\,\theta}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^2}=\int\frac{d\,\theta}{\theta-\alpha}-\int\frac{\alpha-\gamma}{(\theta-\gamma)^2}d\,\theta-\int\frac{d\,\theta}{\theta-\gamma}=l(\theta-\alpha)+\frac{\alpha-\gamma}{\theta-\gamma}-l(\theta-\gamma)$$

El tercer término de la misma fórmula (δ), da

$$\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2}=\frac{B}{\theta-\beta}+\frac{C}{(\theta-\gamma)^2}+\frac{C'}{\theta-\gamma}=\frac{B\left(\theta^2-2\theta\gamma+\gamma^2\right)+C(\theta-\beta)+C'\left(\theta^2-\theta(\beta+\gamma)+\beta\gamma\right)}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2}$$

$$B+C'=0,\qquad -2B\gamma+C-C'(\beta+\gamma)=0,\qquad B\gamma^2-C\beta+C'\beta\gamma=(\beta-\gamma)^2$$

$$C'=-B,\qquad 2C'\gamma+C-C'(\beta+\gamma)=0,\qquad -C'\gamma^2-C\beta+C'\beta\gamma=(\beta-\gamma)^2$$

$$C=C'(\beta-\gamma),\qquad -C'(\beta-\gamma)^2=(\beta-\gamma)^2,\qquad C'=-I,\qquad C=-(\beta-\gamma),\qquad B=I$$

Al integrar, resulta:

$$\int\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2}\,d\,\theta=\int\frac{d\,\theta}{\theta-\beta}-\int\frac{\beta-\gamma}{(\theta-\gamma)^2}d\,\theta-\int\frac{d\,\theta}{\theta-\gamma}=l(\theta-\beta)+\frac{\beta-\gamma}{\theta-\gamma}-l(\theta-\gamma)$$

Luego al sustituir todos estos valores en la integral $\int Y\,d\,X$, se encuentra la igualdad (Δ).

$$\int [Y\,d\,X - X\,d\,Y] = (\beta-\gamma)^2\left[\frac{\gamma-\alpha}{\theta-\beta} - \frac{\gamma-\alpha}{\theta-\alpha} - \frac{\beta-\alpha}{\theta-\gamma} + \frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha}\right] =$$

$$= (\beta-\gamma)^2\left[\frac{-\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2-\gamma^2-\theta(\beta-\gamma)}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} + \frac{\beta-\gamma}{\theta-\alpha}\right] = (\beta-\gamma)^3\left[\frac{\beta+\gamma-\alpha-\theta}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} + \frac{1}{\theta-\alpha}\right] =$$

$$= (\beta-\gamma)^3\,\frac{\beta(\gamma-\alpha)-\alpha(\gamma-\alpha)}{(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} = (\beta-\gamma)^3\,\frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}{(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)}$$

En virtud de este resultado puede afirmarse que la integral $\int (ydx - xdy)$, se resolverá en función racional respecto a θ, según se desprende de la fórmula primitiva de que hemos partido, o sea:

$$(u'\lambda - u\lambda')\int (ydx - xdy) = \int [Y\,d\,X - X\,d\,Y]$$

Digno de mención es que si aplicamos las fórmulas anteriores a la ecuación de M. Hermite, de tercer orden, en el supuesto de que hayamos hallado ya

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3+1} = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}$$

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3+1} = \frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}$$

cabe deducir las igualdades siguientes:

$$\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(x+\alpha^2 y\right) = \frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1} - \frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha^2}$$

$$\left(\alpha^2-\alpha\right)(x+\alpha\, y) = \frac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{\theta+1} - \frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha}$$

En efecto, se tiene

$$x+\alpha^2 y = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2} + \alpha^2\left(\frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)$$

$$\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(x+\alpha^2 y\right)=\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(-\frac{1}{\theta+1}-\frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}\right)+\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{\theta+1}-\frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)\alpha^2=$$

$$=\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(\alpha^2-\alpha\right)}{\theta+\alpha^2}+\frac{\alpha^2-\alpha+\alpha^3-\alpha^4}{\theta+1}=-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha^2}+\frac{\alpha^2-\alpha+1-\alpha}{\theta+1}=$$

$$=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha^2}=\frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha^2}$$

De un modo análogo, se tiene también

$$\left(\alpha^2-\alpha\right)(x+\alpha\, y)=\left(\alpha^2-\alpha\right)\left[-\frac{1}{\theta+1}-\frac{\alpha^2}{\theta+\alpha}-\frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}+\alpha\left(\frac{1}{\theta+1}+\frac{1}{\theta+\alpha}+\frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)\right]=$$

$$=\left(\alpha^2-\alpha\right)\frac{\alpha-1}{\theta+1}+\left(\alpha^2-\alpha\right)\frac{\alpha-\alpha^2}{\theta+\alpha}=\frac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha^2+\alpha}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)}{\theta-\alpha}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^4}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha}$$

Estos valores obtenidos pueden igualarse a *X* é *Y*

$$\left(\alpha-\alpha^2\right)\left(x+\alpha^2 y\right)=\frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha^2}=X \qquad (a)$$

$$\left(\alpha^2-\alpha\right)(x+\alpha y)=\frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1}-\frac{\left(\alpha-\alpha^2\right)^2}{\theta+\alpha}=Y \qquad (b)$$

puesto que estos resultados corresponden con las fórmulas generales de *X* é *Y*, siguientes, ya obtenidas

$$X=\frac{(\beta-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{\theta-\gamma} \qquad Y=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta}$$

en el concepto de que $\alpha=-1,\ \beta=-\alpha,\ \gamma=-\alpha^2$.

Además, los valores hallados satisfacen también a las ecuaciones de condición:

$$B\lambda+B'\lambda'=0, \qquad C\mu+C'\mu'=0 \qquad (c)$$

al saber que: $X=\lambda x+\lambda' y,\ Y=\mu x+\mu' y$.

En efecto, en virtud de (*a*) y (*b*), resulta

$$\lambda = \alpha - \alpha^2, \qquad \lambda' = \left(\alpha - \alpha^2\right)\alpha^2$$

$$\mu = \alpha^2 - \alpha, \qquad \mu' = \left(\alpha^2 - \alpha\right)\alpha$$

Y según los valores de *x* é *y*, también hallados en fracciones simples, sabemos que:

$$B = -\alpha^2, \qquad B_1 = 1, \qquad C = -\alpha, \qquad C_1 = 1$$

luego al sustituir valores en (c), se obtiene

$$-\alpha^2\left(\alpha - \alpha^2\right) + \left(\alpha - \alpha^2\right)\alpha^2 = 0$$
$$-\alpha\left(\alpha^2 - \alpha\right) + \left(\alpha^2 - \alpha\right)\alpha = 0$$

igualdades que se convierten en identidades, demostrándonos que las igualdades (*c*) quedan satisfechas por los valores anteriormente hallados.

En suma, se tiene que la integral $\int ydx$ que ha tomado las formas siguientes:

$$\int ydx = \frac{1}{2}yx + \frac{1}{2}\int \left[ydx - xdy\right]$$

$$\left(\mu'\lambda - \lambda'\mu\right)\int \left(ydx - xdy\right) = \int \left(Y\,d\,X - X\,d\,Y\right)$$

aplicada al caso que consideramos, permite ser expresada en función racional y algebraica de θ, como única variable correspondiente a las curvas unicursales

~~~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~~~~

Por último llegamos a las aplicaciones de los principios anteriores. Nos concretaremos solo a los *foliums* de Descartes, referentes a los de tercero y cuarto orden, y al considerar las curvas unicursales nos permitirá resolver la cuestión sin necesidad de despejar la *y*, en las ecuaciones respectivas, ni de pasar a coordenadas polares, como suelen realizarlo varios autores de cálculo infinitesimal, con objeto de salvar las dificultades que presenta el análisis ordinario al pretender resolver el problema directamente.

Empecemos por el *folium* de tercer orden, dando la ecuación que lo representa bajo un carácter más general que no lo habíamos considerado anteriormente, esto es

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

Al suponer $y = xt$, se obtiene

$$x = \frac{at}{1+t^2} \qquad y = \frac{at^2}{1+t^3} \qquad dx = a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Fácilmente se concibe que estos valores deben conducirnos a probar, según los principios que anteceden, que la integral $\int ydx$ debe resolverse en una función algebraica y racional de *t*; empero los casos particulares que suponemos, permiten prescindir de dichos principios, resolviendo las integrales directamente. En efecto:

$$\int ydx = \int a\frac{t^2}{1+t^3}\, a\,\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}dt = a^2\int \frac{t^2-2t^2}{\left(1+t^3\right)^3}dt = a^2\left[\int \frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^3} - 2\int \frac{t^5dt}{\left(1+t^3\right)^3}\right]$$

Determinemos cada una de las integrales anteriores

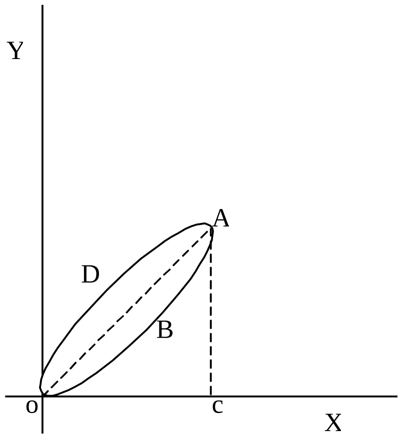
$$\int \frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^3} = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2dt}{\left(1+t^3\right)^3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{2\left(1+t^3\right)^2}$$

$$\int \frac{t^5dt}{\left(1+t^3\right)^3} = \int t^3\frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^3} = \frac{1}{3}\int t^3\frac{3t^2dt}{\left(1+t^3\right)^3} = \frac{1}{3}\left[-\frac{t^3}{2\left(1+t^3\right)^2} + \int \frac{3t^2dt}{2\left(1+t^3\right)^3}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{t^3}{2\left(1+t^3\right)^2} - \frac{1}{2\left(1-t^3\right)}\right]$$

Sustituyendo estos valores en la integral primitiva, se deduce

$$\int ydx = a^2\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{2\left(1+t^3\right)^2} - \frac{2}{3}\left(-\frac{t^3}{2\left(1+t^3\right)^2} - \frac{1}{2\left(1+t^3\right)}\right)\right] = a^2\left[-\frac{1}{6}\frac{1}{\left(1+t^3\right)^2} + \frac{2}{6}\frac{t^3}{\left(1+t^3\right)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+t^3}\right]$$

Al analizar geométricamente la ecuación del *folium* de tercer orden, resulta la forma que se asigna en la adjunta figura, refiriéndose solo a la parte de curva cerrada



Además si de momento tomáramos la ecuación anterior referida a ejes polares, sería:

$$\rho = \frac{a \operatorname{sen}.\theta \cos.\theta}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \qquad (4)$$

y según la teoría de máximos y mínimos, el vector máximo corresponde a un ángulo de 45°, resultando OC = CA, y como hemos supuesto $y = xt$, se deduce que $t = 1$.

De modo que para tener el área correspondiente a *OBACO*, deben tomarse como límites para t; cero y uno.

Luego:

$$\int y dx = a^2 \int_0^1 \left[-\frac{1}{6(1+t^2)^2} + \frac{2}{6}\frac{t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+t^3} \right] = a^2 \left[-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right] = \frac{a^2}{24}$$

Para la determinación del área del triángulo *OAC*, recordemos que

$$x = a\frac{t}{1+t^3} \qquad y = a\frac{t^2}{1+t^3} \qquad \text{y para} \quad t = 1,\ x = \frac{a}{2},\ y = \frac{a}{2}$$

de donde

$$\frac{xy}{2} = \frac{a}{2}\frac{a}{2}\frac{1}{2} = \frac{a^2}{8}$$

---

(4). Al tomar la primera derivada de ρ, para la determinación del máximo, basta considerar el numerador de la expresión correspondiente, averiguando las condiciones que debe reunir para que sea cero.

$$\left(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta\right)\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left[3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\right]$$

luego para que esta expresión sea cero, es suficiente que $\theta = \frac{\pi}{4}$, valor que determina la dirección OA, como bisectriz del ángulo recto *yox*.

Y como de la figura se desprende que:

$$OBAO = OAC - OBACO$$

al sustituir valores, se obtiene

$$OBAO = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

Y por fin, doblando este valor, atendida la simetría de la curva, según *OA*, resulta:

$$OBADO = \frac{a^2}{6}$$

Valor definitivo correspondiente a la expresión del área de la curva cerrada.

Consideraremos ahora el *folium* de cuarto orden, dado por la ecuación:

$$x^4 + y^4 - a^2 xy = 0$$

Siguiendo igual procedimiento que en el caso anterior, cabrá escribir inmediatamente la serie de igualdades siguientes:

$$y = xt \qquad x^4 + x^4 t^4 - a^2 x^2 t = 0$$

$$x = a\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}} \qquad y = a\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$dx = a\,\frac{\sqrt{1+t^4}\,\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\,\dfrac{4t^3dt}{2\sqrt{1+t^4}}}{1+t^4} = a\,\frac{1-3t^4}{2\sqrt{t}\,\left(1+t^4\right)^{\frac{8}{2}}}\,dt$$

Luego

$$\int ydx = a\int \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}\,a\,\frac{1-3t^4}{2\sqrt{t}\,\left(1+t^4\right)^{\frac{8}{2}}}\,dt = a^2\int \frac{t-3t^5}{2\left(1+t^4\right)^2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int \frac{tdt}{\left(1+t^4\right)^2} - \frac{3}{2}a^2\int \frac{t^5dt}{\left(1+t^4\right)^2}$$

La última integral, da

$$\int \frac{t^5dt}{\left(1+t^4\right)^2} = \frac{1}{4}\int t^2\,\frac{4t^3dt}{\left(1+t^4\right)^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{t^2}{1+t^4} + \int \frac{2tdt}{1+t^4}\right]$$

y al suponer $t^2 = \theta,$ resulta para la integral primitiva

$$\int ydx = \frac{a^2}{4}\int \frac{d\theta}{\left(1+\theta^2\right)^2} - \frac{3}{8}a^2\left[-\frac{\theta}{1+\theta^2} + \int \frac{d\theta}{1+\theta^2}\right] \qquad (A)$$

Si consideramos por último la integral

$$\int \frac{d\theta}{\left(1+\theta^2\right)^2}$$

se tiene

$$\int \frac{d\theta}{\left(1+\theta^2\right)^2} = \int \frac{1+\theta^2-\theta^2}{\left(1+\theta^2\right)^2}d\theta = \int \frac{d\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{2}\int \theta\frac{2\theta d\theta}{\left(1+\theta^2\right)^2} = \int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Al sustituir este valor en (A), resulta:

$$\int ydx = \frac{a^2}{4}\left[\frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{\theta}{1+\theta^2}\right] - \frac{3}{8}a^2\left[-\frac{\theta}{1+\theta^2} + \int \frac{d\theta}{1+\theta^2}\right] = -\frac{a^2}{4}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{a^2}{2}\frac{\theta}{1+\theta^2} =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\operatorname{arctg}\theta + \frac{1}{2}a^2\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Por razones análogas a las del ejemplo anterior, la curva que resulta parecida a la anterior, admite un máximo para el radio vector correspondiente a un ángulo de 45°, respecto a los ejes x, é y; y si nos concretáramos a la determinación del área correspondiente al ángulo cuyas coordenadas son positivas, se tiene $x = y$, para el punto A, y como $y = xt$, resulta para límites de t, cero y uno, siendo los mismos para θ, puesto que $t^2 = \theta.$ Además, por ser:

$$x = a\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}} \qquad y = a\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}$$

se deduce para $t = 1$,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Luego la integral anterior se convierte en

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} ydx = -\frac{a^2}{4}\left[\operatorname{arctg}\theta\right]_0^1 + \frac{1}{4}a^2 = -\frac{a^2\pi}{16} + \frac{a^2}{4} = \text{área } \ OBACO$$

Ahora bien, en el concepto de utilizar la misma figura anterior, se tiene

$$OBAO = OAC - OBACO$$

y siendo

$$OAC = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$$

resulta

$$OBAO = \frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{16}$$

Por fin, para tener el área total *OBADO,* bastará doblar el valor anterior, de donde:

$$OBADO = \frac{\pi a^2}{8}$$

Verdadera expresión del área correspondiente a la curva cerrada en el cuadrante positivo.

Ciertamente que podríamos continuar presentando nuevos ejemplos más o menos complicados que los anteriores, pero entendemos que lo expuesto es suficiente para comprender cuál es la importancia que debe concederse a las curvas unicursales, como una de las partes más admirables del Análisis Matemático.

Barcelona, 29 Marzo de 1909
Lauro Clariana Ricart