# Rápida excursión a las altas regiones del Análisis Matemático

1913

Propóngome realizar una rápida excursión a las altas regiones del análisis matemático, contando con vuestra benevolencia, ya que la materia de que voy a tratar sea quizá para algunos demasiado abstrusa, no obstante procuraré ser lo menos molesto posible durante el largo trayecto que hemos de recorrer

Imposible de todo punto fuera pretender formarse cargo de las diferentes y múltiples direcciones que en los tiempos presentes son de apreciar en la colosal y fecunda Ciencia Matemática, no diré respecto a las dos ramas de análisis y geometría de que depende, sino ni siquiera al concretarse a una sola de ellas.

Distinguidos académicos de esta Corporación en varias ocasiones han dado a entender la importancia y diferentes orientaciones que se han originado dentro de la geometría, y como quiera que mis aficiones desde mi juventud hánme llevado hacia el análisis, así, pues, de él os voy a decir algo, ya que no hace falta que a manera mezquina os hable de las célebres geometrías que en otras ocasiones habéis oído de labios más autorizados que los míos.

## I

El análisis matemático cabe dividirlo en ordinario y superior, y en la presente disertación solo voy a ocuparme del análisis superior, por ser éste el más importante, no solo dentro de la matemática pura, sino como origen y base fecunda para la Física-Matemática.

Situados ya en la región del análisis superior, podremos admitir el dividirlo en dos partes principales referentes a las funciones y ecuaciones diferenciales. A estos dos puntos debemos dirigirnos, empero, para llegar a ellos, antes hemos de atravesar algunos otros de menos importancia, que a manera de jalones nos sirvan de guía para la consecución de nuestro fin.

Podemos señalar como principales puntos de mira, los siguientes: Números de Bernoulli; Polinomios de Legendre; funciones isotropas; Geometría infinitesimal; superficies regladas; congruencias y complejos correspondientes a un sistema de rectas; estudio de los diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas según Aoust, Lamé, Darboux; Integrales curvilíneas referidas a integrales simples; integrales dobles y triples, llegando así al conocimiento de las célebres fórmulas de Stokes y Green, de suma importancia en Física-Matemática; Teoría de los vectores, cuaternions y de Grasmann; principio de atracción Newtoniana o Laplaciana; Potencial; integrales pseudo-elípticas; integrales abelianas, etc.

Es muy posible, señores Académicos, que a pesar de haber fatigado vuestra atención al apuntaros una retahíla de conceptos diferentes, no haya tenido aun en cuenta algo que a vuestro ver debiera ir incluido en esta primera parte, o porta estandarte del verdadero análisis superior matemático; mas téngase presente que en el estado actual de la ciencia pueden incluirse en análisis ordinario muchos conocimientos que antiguamente pertenecían al análisis superior.

# I I

Sea como quiera, hemos llegado ya al punto de considerar el análisis superior dividido en las dos partes mencionadas, esto es: Estudio de las Funciones y de las ecuaciones diferenciales.

Si de momento nos fijamos en la región correspondiente a las funciones matemáticas, imposible será dar cuenta exacta de la variedad de las que se han ido formando desde los primitivos tiempos, bien que no cabe negar que su mayor desarrollo es patrimonio de nuestros tiempos, gracias a los trabajos admirables de un Hermite y de un Weierstrass, jefes del movimiento matemático actual.

Claro está que Cauchy lleva gran parte en dicho movimiento al clasificar las funciones en monodromas, politropas, meromorfas, monógenas, holomorfas o sinecdoques, llegando de esta suerte a teoremas fecundísimos dentro del análisis.

De esta suerte, bajo el carácter de cantidad compleja, se estudian las funciones algebraicas, uniformes, regulares con sus ceros, polos y puntos singulares esenciales, accidentales, líneas y espacios lagunares.

También se estudian bajo forma especial las funciones trigonométricas, partiendo del seno en forma de producto para deducir de dicha forma las de cotangente y $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}$; estas dos últimas expresiones resultantes de tomar primero la derivada logarítmica de *sen.u*, y luego la derivada con signo contrario de la expresión última. Esta clasificación de funciones trigonométricas tiene suma importancia según Apell, por relacionarse con las funciones $\sigma$ $\zeta$ y *p*, correspondiendo esta última según Weierstrass, a las funciones elípticas, clave de las funciones doblemente periódicas.

Por esta vía se alcanza la fórmula de Hermite, correspondiente a una función elíptica, descompuesta en elementos simples sumatorios, mediante la nueva función *Z* o la *p* de Weierstrass, y por ende la función elíptica descompuesta en factores, dependientes de la función $\sigma$, la cual nos conduce directamente al teorema de Lionville, que demuestra como los ceros y los infinitos de una función elíptica, situados en un paralelogramo de los períodos, la suma de los ceros no difiere de los infinitos sino en múltiplos de dichos períodos.

Ciertamente que la función elíptica *p* de Weierstrass es una de las más importantes, siendo su derivada igual a una raíz cuadrada que contiene un trinomio de tercer grado en *p*, y cuyos coeficientes son las invariantes designadas por la letra *g*. De las funciones anteriormente citadas, se viene luego en conocimiento de una infinidad de fórmulas importantes, así como las consecuencias de que toda función elíptica par es una función racional de *p*; siendo en cambio una función elíptica impar igual a una función racional de *p* multiplicada por $p'$.

Por fin, para no fatigar vuestra atención, digno de mención son también los trabajos realizados acerca de las funciones $\Theta$ de Jacobi en combinación de otras designadas por $H$ y $H_1$, de donde resultan, según Briot y Bouquet, las $\theta_3$ $\theta$ $\theta_2$ $\theta_1$, las cuales por relación de cociente como nuevas funciones doblemente periódicas, originan las tres expresiones $\gamma, \mu, \sigma$ correspondientes a *senam, cosam y deltam*.

Así, por fin, se viene en conocimiento de las funciones a multiplicadores constantes llamadas funciones doblemente periódicas de segunda especie, amén de las funciones a multiplicadores exponenciales llamadas funciones doblemente periódicas de tercera especie.

Lo expuesto hasta aquí puede considerarse como un breve resumen de lo concerniente al estudio de las funciones.

# I I I

Si de las funciones pasamos a reseñar lo que hay de más importante respecto a las ecuaciones diferenciales, empezaré manifestando como las consideraciones referidas a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, basta para conducir por medio de la ecuación de Euler a la suma de argumentos correspondiente a las funciones elípticas, origen de la verdadera goniometría que permite por valores particulares del módulo, pasar inmediatamente a la goniometría circular o hiperbólica, todo lo cual puede considerarse como preliminar al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales en combinación del factor integrante de Laplace, sistemas adjuntos, desarrollos de las integrales en forma de series, según Jordan; formas canónicas; analogías con las ecuaciones algebraicas; Integrales primeras de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden; multiplicadores según Jacobi; Formas simbólicas, etc.

Mas si nos detenemos por un momento en las ecuaciones entre derivadas parciales, nos encontramos frente a frente de lo que se designa bajo los nombres de integral completa, general y singular; ecuaciones canónicas, teoremas de Donkin y Poisson, con sus formas simbólicas.

Conforme a estas investigaciones hay que tener en cuenta los trabajos de Jacobi; luego las fórmulas de Lagrange y Fourier en la integración de ecuaciones entre derivadas parciales de un orden cualquiera, perteneciendo también a los sistemas clásicos y bien conocidos la integración de las ecuaciones llamadas de Laplace, Monge y d'Ampère, alcanzándose por inducción, integrales de ecuaciones entre derivadas parciales de tercer y cuarto orden, mediante las investigaciones de Guldberg y la doctora Elisabet de Alemania.

¿Que diremos ahora, señores académicos, de las ecuaciones diferenciales totales? Sin duda que las dificultades suben de punto para alcanzar su integración, siendo notable, no obstante, el estudio que el inglés Forsyth ha realizado en esta clase de ecuaciones, llegando después de indicar las soluciones debidas a Bertrand y Natani a la más general de Pfaff, siendo su método altamente ingenioso; prueba fehaciente de lo que puede la inteligencia humana cuando trata de conquistar algo que no sea de muy fácil adquisición.

Sin embargo, todo cuanto precede no corresponde a las últimas tentativas realizadas por los matemáticos actuales; hoy existe como una tendencia a separarse de lo que algunos llaman viejos moldes; los grupos y las sustituciones sellan nuestros tiempos modernos, todo lo cual permite considerar el encasillado fijo e invariable de las funciones doblemente periódicas, como simple caso particular de las funciones automorfas.

De este modo, mediante grupos continuos y discontinuos, grupos Fuchsianos, Kleinianos, se obtienen resultados altamente sorprendentes, con auxilio de las sustituciones especiales designadas bajo los nombres de hiperbólicas, elípticas parabólicas y loxodrómicas.

Por último, otra orientación se descubre en nuestros días, muy apreciada de los alemanes, debida a las superficies de Riemann, considerándolas formadas de varias hojas con el fin de referir las funciones multiformes a las uniformes; tendencia constante de la ciencia, al pretender llevar siempre dentro de lo constante y de la unidad, lo que es variable y múltiple.

# I V

Después de esta rápida excursión hacia las funciones y ecuaciones diferenciales, fuerza es que señalemos cuales son los puntos más notables que se presentan a la vista del observador, y en su virtud espero, señores académicos, me permitáis una comparación al considerar la ciencia matemática como una vasta y extensa comarca con sus montes, valles, cordilleras etc.; bajo este concepto no cabe duda que en este sistema orográfico de formación actual existe podríamos decir, dos notables cordilleras a manera de los Alpes y de los Andes, es decir, líneas salientes y extensas dó fijan la vista los matemáticos a causa del desarrollo y dirección que tome hoy la ciencia matemática en harmonía con las ciencias de aplicación.

Estos dos centros importantes a que se refiere la matemática actual, corresponden a las ecuaciones diferenciales lineales y a la ecuación de Laplace.

Ha llegado, pues, el momento culminante de la presente Memoria, siendo justo detenerme algún tanto ahí para señalaros, si vale la frase, con el taquímetro en la mano, las orientaciones que llevan las dos cordilleras precitadas, indicando los puntos principales que se destacan en cada una de ellas.

# V

Empecemos por señalar en especial las particularidades que se observan en las ecuaciones diferenciales lineales en el caso más sencillo, esto es, para cuando es ordinaria, homogénea y los coeficientes son funciones de la sola variable independiente ***x***. En este concepto si los coeficientes corresponden a funciones uniformes dentro de una cierta región del plano a contorno simple no admitiendo sino polos como puntos singulares; si para un cierto valor $x^0$ de $x$ que no sea punto singular, se puede dar arbitrariamente el valor de una integral y sus derivadas hasta la del orden *m-I* siendo la ecuación diferencial del orden *m*, entonces si la matriz correspondiente por *m* valores de la función *y*, no se anula, cabe formar la integral general, dando ello origen a lo que los alemanes designan bajo el nombre de sistema fundamental.

Ahora bien, si la variable independiente describe alrededor de uno de los polos un contorno cerrado, en general no se encuentra luego el sistema inicial, empero como la ecuación diferencial vuelve al estado primitivo, debe obtenerse un nuevo sistema de integrales que guarde relación con las integrales anteriores, alcanzando una matriz igual a cero, de un grado igual al del orden de la ecuación diferencial, la cual determina los diferentes valores que deben considerarse en el factor que debe afectar a los valores de las integrales antes de la circulación.

De esta suerte se obtiene la forma analítica general de dichas integrales, siendo notables las consecuencias que se deducen para cuando en la ecuación-matriz hay raíces múltiples.

Estas consideraciones conducen a M. Fuchs al estudio de ecuaciones en que todas las integrales son regulares, más cuando se considera un sistema bajo la forma normal, hay que atender al teorema debido a M. Liaponnoff, y para las representaciones asintóticas a los trabajos del matemático M. Poincaré.

Con todo, la parte más importante a la par que más difícil es la concerniente a las ecuaciones diferenciales, lineales, a coeficientes doblemente periódicas.

Nuevas orientaciones vienen en auxilio de esos conceptos dentro del análisis matemático superior; contribuye al mismo fin el gran pensamiento de Riemann al convertir las superficies en simplemente conexas por medio de ciertas aberturas que ponen en comunicación unas hojas con otras de la superficie dada, y así toda integral de la ecuación diferencial lineal resulta uniforme si el punto ($x$, $y$) supuesto sobre dicha superficie no atraviesa el contorno total de la misma.

Hay que atender en esta nueva teoría a las sustituciones lineales que se suponen desarrolladas en sentido positivo o negativo de las líneas cortantes. En general las sustituciones no son conmutables, y esta circunstancia, sin duda, complica el procedimiento; empero cuando se trata del género *uno* las dos sustituciones expresadas por $S$ y $\sum_1$, son conmutables y entonces puede admitirse que el producto de las dos sustituciones anteriores sea independiente del orden de los factores.

De esta suerte se llega al estudio de una ecuación diferencial lineal cuyos coeficientes de los diferentes términos, excepto el primero, sean funciones doblemente periódicas de **z**, con los períodos $w$ y $w'$. La célebre ecuación diferencial de segundo orden de Lamé, como caso particular de la anterior, estudiada con profundidad por Hermite, es prueba clarividente de los sorprendentes resultados que se obtienen cuando las funciones elípticas entran como coeficientes en las ecuaciones diferenciales lineales.

Ciertamente que ese campo inmenso de investigaciones es el que corresponde al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales aunque no sea sino concretándose a las ordinarias, habiendo ocupado con predilección la atención de nuestros matemáticos por espacio de más de medio siglo.

Al considerarlas en términos generales fácilmente se comprende que su estudio ofrece dos fases bien distintas, esto es: la primera, relativa a la determinación de integrales correspondientes a un sistema diferencial, la segunda, a la deducción de propiedades de las integrales, atendiendo tan solo a las ecuaciones diferenciales que las deben producir.

De esta segunda parte se ha ocupado, entre otros varios matemáticos, el distinguido Fuchs, y de modo sorprendente el insigne matemático Painlevé.

La importancia de esa parte notable del análisis superior, se deduce, por ejemplo, al consultar la obra que ha poco acaba de publicarse en Alemania por los matemáticos Guldberg y Wallenberg; hermosa condensación de cuanto se viene hablando sobre el particular en los tiempos actuales.

Por fin, el Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo, acaba de publicar también un trabajo bastante importante respecto al mismo punto.

# VI

Si nos situamos, por último, sin más pérdida de tiempo en un punto dominante de la segunda cordillera contendiente de la célebre ecuación de Laplace, fuerza será detenernos en ella un poco más que en la anterior, no solo por referirse dicha ecuación al problema de Dirichlet, que ha constituido, si vale la frase, la desesperación de los matemáticos, sino por demandar mayores requerimientos por parte de la Física.

La ecuación de Laplace de origen a consecuencias tan variadas como fecundas, que temeridad fuera pretender enumerarlas todas; sin embargo podemos indicar lo más importante al pasar desde la ecuación de Laplace a las fórmulas que son de apreciar en la obra publicada recientemente en Alemania por F.F. Prym y G. Rost, trabajo que bien puede compararse con los de Legendre acerca de las integrales elípticas y la gamma de Euler, a juzgar por el tiempo que habrá sido necesario emplear en ello para darla a luz.

La ecuación de Laplace es importantísima dentro de la Física, ella aparece en la teoría de la elasticidad, en la atracción Newtoniana, en la Hidrodinámica, en la teoría del calor, etc.

Cosa rara es verdaderamente que esa diversidad de fenómenos vaya a depender de una misma fórmula, lo cual no ha dejado de llamar la atención de los científicos, buscando el medio de justificar semejante particularidad, bien que sus argumentos sean quizá más ingeniosos que convincentes.

Con todo no se puede negar que existe un hermoso maridaje entre la Matemática y la Física, llegando algunos movidos de su entusiasmo a suponer que tan preciosa unión sea debida exclusivamente por requerimientos de la Física.

A este punto recordemos al Excmo. Sr. D. José Echegaray cuando dice en sus notables conferencias de Física-Matemática: "*Que las ciencias químicas y físicas plantean nuevos problemas matemáticos; que aquéllas hayan sido el estímulo, por decirlo así, para la creación de muchas teorías, nadie puede ponerlo en duda*".

Pero hemos protestado más de una vez en suponer que las matemáticas son la alta servidumbre de la materia inorgánica y de sus fenómenos; un instrumento más o menos elevado del fenómeno material, y que su único objeto es resolver problemas del orden matemático, planteados por el físico o por el químico para la explicación de los fenómenos naturales. No, ya lo hemos dicho más de una vez; las matemáticas puras son una ciencia autónoma.….. Las matemáticas puras son lo que son, y su utilidad práctica la dan de añadidura.

En efecto, señores académicos, bien podía haberse hallado dentro de la matemática pura relaciones importantísimas, como realmente se han hallado entre la ecuación de Laplace, las funciones esféricas, polinomios de Legendre, etcétera, sin necesidad de atender para nada a la Física. Después de estas ligeras consideraciones, concretemos ya el punto. La ecuación de Laplace queda satisfecha por infinidad de funciones que toman el nombre de harmónicas, tales como funciones algebraicas racionales y enteras de primero y segundo grado, funciones circulares dependientes de constantes que en general deben sujetarse a ciertas condiciones. Empero el gran manantial de esas funciones surge del estudio de la cantidad compleja al pasar a cantidades reales por medio de las condiciones de monogeneidad, resultando combinación de ecuaciones de Laplace referidas respectivamente a dos variables independientes.

La potencial como resultado de la atracción Newtoniana, satisface también a la ecuación de Laplace, pero referida a tres variables independientes, pues si fueran dos, tendrían que suponerse condiciones diferentes a las anteriores para que tuviese lugar la precitada ecuación reducida a dos variables.

Notables son las propiedades que se pueden atribuir a las funciones que satisfacen a la ecuación de Laplace como integrales suyas y que toman el nombre de harmónicas.

Estas propiedades se deducen generalmente de la célebre fórmula integral de Green, propiedades que repercuten en la ecuación de Laplace sin necesidad de conocerla: bello objetivo del cálculo integral.

Vamos a reseñar algunas:

*Las harmónicas que tienen derivadas segundas bajo condiciones especiales de uniformidad, finitud y determinación, si se aplican a una superficie cerrada dará un flujo nulo, es decir, que tomando en cada punto de la superficie la derivada con relación a la normal, multiplicada por el área indefinidamente pequeña de superficie que corresponde a dicho punto y sumando, la suma será nula.*

Otra propiedad interesante:

*La harmónica no tiene en su campo ni máximo ni mínimo, y lo que se dice respecto a un punto y a una línea, cabe hacerlo extensivo a una superficie y a un volumen.*

Falta aun dar a conocer algunas otras propiedades importantes, deducidas en general de la célebre Mecánica Racional de M. Apell, la cual, como todo lo que sale de su envidiable pluma, debiera servir de modelo para los demás matemáticos al escribir sus obras o memorias, procurando imitarle respecto a la claridad y sencillez con que expone los pensamientos más sutiles y profundos.

He ahí algunas de dichas nuevas propiedades:

**1º.-** *Si en el interior de un volumen una harmónica es uniforme, finita y bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, y además en todos los puntos de la superficie correspondiente a dicho volumen, la harmónica tiene el valor nulo, será forzosamente igual a cero en toda la extensión del precitado volumen.*

**2º.-** *Si consideramos el espacio que media entre la superficie anterior y la que corresponde a una distancia indefinidamente grande, si existe una función harmónica uniforme, finita y bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, teniendo un valor nulo en todos los puntos de la superficie finita, anulándose además en la otra superficie a distancia indefinidamente grande; esta harmónica será nula en todo el espacio exterior a la superficie finita.*

Digno de mención es que la ecuación de Laplace quede satisfecha no solo por infinitas funciones de la ciencia pura, sino por otras muchas correspondientes a diferentes ramas de la Física-Matemática, dando a veces origen al principio de la discontinuidad, como así resulta, por ejemplo, tratándose de la potencial, la cual puede ser función harmónica en cierta parte, satisfaciendo a la ecuación de Laplace, y en otra dejar de serlo, satisfaciendo en cambio a la ecuación de Poisson.

Esta consideración es muy notable porque nos dice que una función en general puede satisfacer a diferentes ecuaciones diferenciales, según la región o dominio que se considere.

La complejidad de dicha ecuación conduce a las consecuencias siguientes, esto es: las temperaturas pueden ser símbolos de las potenciales, así como las potenciales pueden serlo de las temperaturas, llegando de esta suerte a la expresión más general para ser aplicada a la ciencia pura, que permita muchas variantes de forma, ora considerándola en el hiper espacio, ora refiriéndola simplemente a dos variables, habiendo no solo diferentes derivadas de segundo orden, sino también de primero, como puede apreciarse en un caso particular mediante el reciente trabajo publicado en el Circolo Matemático di Palermo por Enrico Bompiani.

Sin duda que una de las aplicaciones más importantes de la ecuación de Laplace, es para cuando se refiere al problema de Dirichlet, el cual consiste en determinar una harmónica que satisfaga a la ecuación de Laplace dentro de un volumen y que en cada punto de la superficie correspondiente a dicho volumen tenga valores determinados.

Este problema admite dos partes, según se trate del interior o exterior del volumen supuesto; esto es:

1º.- Hallar una harmónica que sea harmónica solamente para el interior de un volumen, y que en los puntos de la superficie que determina dicho volumen, adquiera valores determinados, variando por la ley de continuidad.

2º. Dada una superficie que limite un volumen dentro de la finitud, determinar una harmónica respecto al espacio exterior y que tome valores determinados y continuos sobre la superficie, anulándose a distancia indefinidamente grande.

Sabido es que consideraciones acerca del calor han dado origen al problema de Dirichlet, empero muchos matemáticos prescindiendo de la Física, han tratado de buscar la verdadera demostración analítica del mismo, llegando el propio Dirichlet a dar dicha demostración, considerándola, no obstante, incorrecta el matemático Weierstrass.

No cabe duda, señores académicos, que el problema, como problema de análisis es difícil, delicado y sutil, en el cual han agotado sus fuerzas grandes matemáticos, como dice con suma oportunidad el distinguido literato y matemático español Excmo. Sr. D. José Echegaray.

Y a este propósito debo manifestar aquí la grata sorpresa que me produjo la ingeniosa idea que da dicho matemático del problema de Dirichlet al suponer un cubo descompuesto en varios cubitos, unos referentes a la superficie del cubo total y otros interiores con expresión de la función harmónica referida a cada uno de los cubitos para venir en conocimiento de la resolución del problema consistente en un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas de primer grado; empero a pesar de idea tan ingeniosa, por desgracia queda siempre en pie la dificultad inmensa de poder salvar el paso de la finitud a lo infinitésimo, como así lo exige el problema de Dirichlet, cuestión imposible de resolver al considerar el sistema de ecuaciones anterior en número indefinidamente grande.

El autor de semejante intuición, ya presenta tal dificultad, pero sea como quiera, idea tan peregrina sirve para formarse concepto cabal del problema de Dirichlet, abriendo nuevos horizontes a la investigación.

Con todo, algo se ha logrado en bien del precitado problema, en efecto:

A M. Neumann se debe un método notable para resolverlo en el caso muy extenso donde en cada punto de la superficie tiene un plano tangente determinado cortando una recta a dicha superficie en dos puntos. Otro método existe indicado por Kirchaoff y publicado por los cuidados de Mme. Kowalewsky.

En el caso de considerar la esfera el problema queda completamente resuelto, conforme a los principios precedentes; y a este fin contribuyen también Picard, Poincaré, Stekloff, A. Korn y Liaponnoff.

Por último, atendiendo a la parte histórica de tales trabajos, podemos sintetizarlos en la forma siguiente:

Después de las investigaciones de M. C. Neumann y M. Schwarz, respecto a los contornos, se presentan a la par Gauss, Dirichlet y Riemann, resolviendo el problema del mínimo, considerando la función harmónica dentro y fuera del contorno supuesto, en el concepto de que la función harmónica referida al dominio interior tome valores dados en el contorno, y que referida dicha harmónica al dominio exterior, se anule a distancia indefinidamente grande, tomando en cambio valores determinados también en el contorno supuesto dentro de la finitud.

Nuevos conceptos son emitidos por Weierstrass, Poincaré y otros matemáticos hasta que Hilbert vuelve a resucitar el principio del *minimum*.

W. Thomson refiere por medio de la inversión el problema del dominio exterior al del interior; luego M. Fredholm manifiesta que los dos problemas de Dirichlet, así como los de Neumann, pueden condensarse en una integral única, dependiente de lo que se llama núcleo y parámetro, siendo de advertir que el signo de dicho parámetro determina el dominio interior o exterior.

Por fin, las investigaciones de Volterra guardan relación con los de Fredholm, de modo que puede decirse que la ecuación del primero se distingue de la del segundo solo por los límites de la integral.

Demos con esto término a las consideraciones que acabo de emitir con rapidez vertiginosa, respecto a las ecuaciones diferenciales y a la ecuación de Laplace; y a pesar de que quizá he abusado de vuestra paciencia, señores académicos, os suplico me otorguéis un momento más para concluir.

# V I I

Verdaderamente que causa asombro ver de lo que es capaz la inteligencia humana, sin embargo interesa ir prevenidos con lo nuevo, pues no siempre es verdad que lo nuevo sea mejor que lo antiguo, el entusiasmo por lo nuevo no debe cegarnos.

A los que se dedican en particular a la enseñanza, interesa mucho saber escoger lo más fácil y de más importancia que puede hallarse en medio de esa Babel científica, a fin de lograr ópimos frutos sin desalientos en bien de esa multitud de jóvenes, ávidos de saber.

Ciertamente para que la juventud estudiosa llegue a sentir las bellezas que encierra la ciencia, y en particular la Matemática, precisa que los encargados de trasmitirla la den a conocer con sencillez, claridad y entusiasmo, detallando muchos conceptos que nos vienen del extranjero, pues en general son demasiado condensados para nosotros los españoles; los que no piensan así, posible es que sus trabajos pasen como si no fueran, y sin que la buena crítica se entretenga en descifrar los misterios que puedan encerrar sus trabajos, que en general resultan ininteligibles para la mayoría, sin que ello suponga, a veces, superioridad respecto a otros al parecer menos pretenciosos.

En una palabra, señores académicos, en beneficio de la buena cultura, precisa exponer procedimientos generales en vez de entretenerse en resolver casos particulares; hay que trazar líneas generales bien determinadas y de fácil seguimiento para que con seguridad se puedan continuar sin fatiga a la par que con entusiasmo y amor, aunándose así la verdad con la belleza.

Verdad y Belleza, unidas en armonioso lazo; emblema de la presente Real Academia, dó la misma luz y el mismo color anima, alienta y vivifica el cerebro y corazón del artista que del científico.

Barcelona a 24 de Abril de 1913
Lauro Clariana Ricart