

**Secciones torales con aplicación
a la
lemniscata de Bernoulli**

1913



En la célebre obra del matemático Teixeira que trata de curvas especiales, encuéntrase un estudio bastante complejo de las **cuárticas**, empezando por las *espíricas* atribuidas a Perseo, correspondientes a las secciones producidas por planos paralelos al eje de la superficie de un toro, engendrado por un círculo cuando gira alrededor de una recta situada en su plano.

La ecuación de la superficie del toro es:

$$\left(l \pm \sqrt{x^2 + z^2} \right)^2 = R^2 - y^2$$

siendo y el eje de revolución, R el radio del círculo generador y l la distancia del centro de este círculo al eje de la superficie.

En efecto; suponiendo el círculo en el plano zy (*fig. 1ª*), se tiene:

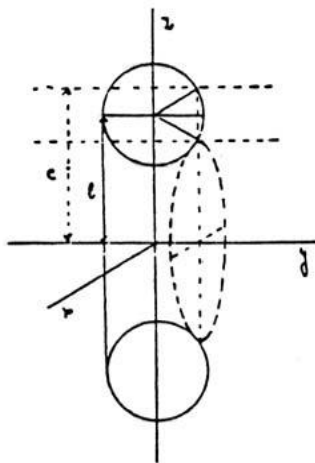


Figura. 1ª

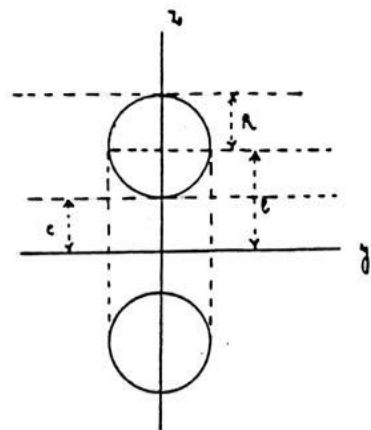


Figura.2ª

$$R^2 = y^2 + (z-l)^2 = y^2 + (l-z)^2$$

Para la superficie de revolución resulta:

$$R^2 = y^2 + \left(l \pm \sqrt{z^2 + x^2} \right)^2$$

o sea

$$\left(l \pm \sqrt{z^2 + x^2} \right)^2 = R^2 - y^2 \quad [1]$$

Y para tener la sección del toro con un plano paralelo (*fig. 1^a*) al de xy y a la distancia $z = c$ [2], basta eliminar z entre [1] y [2], resultando la curva que se proyecta en el plano xy tal cual es. Así, pues,

$$\left(l \pm \sqrt{c^2 + x^2} \right)^2 = R^2 - y^2$$

de donde

$$\left(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2 \right)^2 = 4l^2 \left(x^2 + c^2 \right) \quad [3]$$

Fácilmente se comprende que si se considera $l - c = R$, lo que supone $l > R$ (*fig. 2^a*), se obtiene:

$$l^2 + c^2 = R^2 + 2lc$$

cuyo valor, sustituido en [3], da:

$$\left(x^2 + y^2 + 2lc \right)^2 = 4l^2 \left(x^2 + c^2 \right)$$

de donde

$$\left(x^2 + y^2 \right)^2 = 4l(l - c)x^2 - 4lcy^2$$

y siendo

$$4l(l - c) = b^2 \quad \text{y} \quad 4lc = a^2$$

se obtiene la ecuación de la lemniscata hiperbólica:

$$\left(x^2 + y^2 \right)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2$$

Ahora, al tomar $l + c = R$, lo que supone $l < R$ (*Fig. 3^a*) se obtiene:

$$l^2 + c^2 = R^2 - 2lc$$

cuyo valor, substituido en [3], da:

$$\left(x^2 + y^2 - 2lc \right)^2 = 4l^2 \left(x^2 + c^2 \right)$$

de donde

$$\left(x^2 + y^2 \right)^2 = 4l(l + c)x^2 + 4lcy^2$$

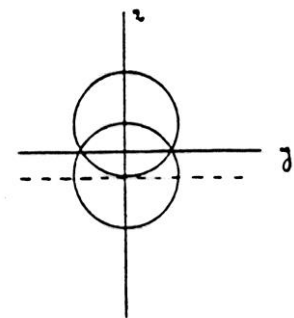


Figura. 3^a

y al considerar

$$4l(l+c) = b^2 \quad \text{y} \quad a^2 = 4lc$$

se halla

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2$$

ecuación de la lemniscata elíptica.

Veamos ahora las secciones intermedias que se pueden suponer entre estas extremas.

$$l > R$$

$$l \leq c < l + R$$

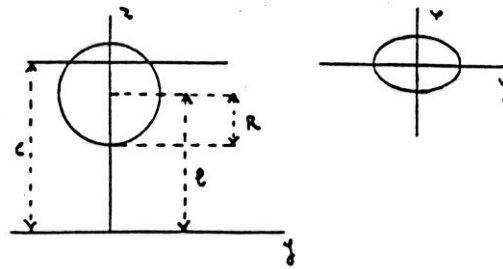


Figura. 4ª

$$l > R$$

$$l - R < c < l$$

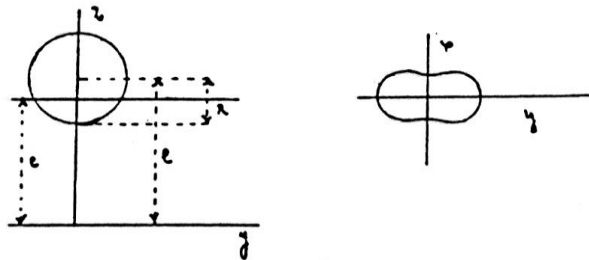


Figura. 5ª

Empecemos por el primer caso, en que $l > R$, correspondiente al toro abierto.

Presentemos los diferentes casos que pueden ocurrir, y para su mayor inteligencia indicamos las secciones en el plano yz por una recta paralela al eje y, como traza del plano secante, llevando aparte el esquema del rebatimiento de dichas secciones.

$$l > R$$

$$c < l - R$$

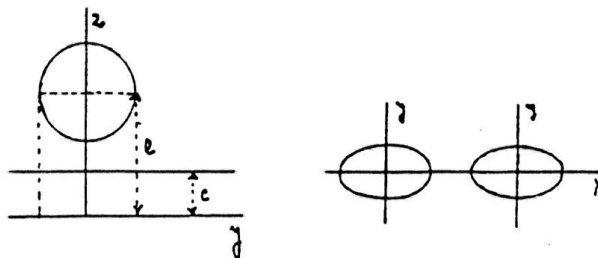


Figura 6º

Conforme a la segunda condición $l+c=R$, ello supone $l < R$ dando origen a tres casos correspondientes al toro cerrado.

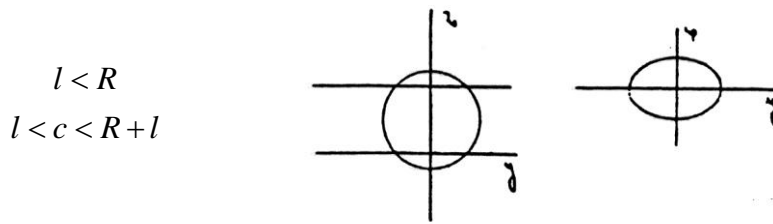


Figura 7ª

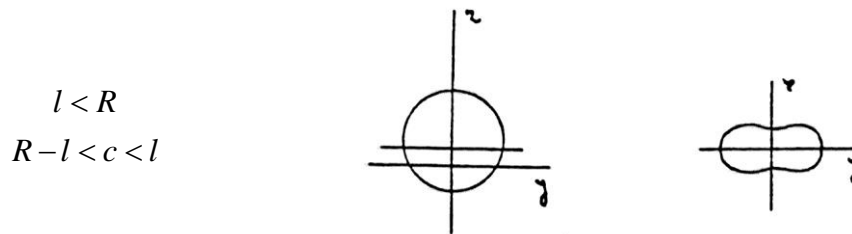


Figura 8ª

Partiendo de las curvas cassínicas, o sea de los óvalos de Cassini, se da con la ecuación de las espíricas, por lo cual pueden considerarse dichas curvas como resultado de las secciones de un plano con la superficie del toro, siendo el plano paralelo al de xy a la distancia del eje igual al radio del círculo generador de la superficie.

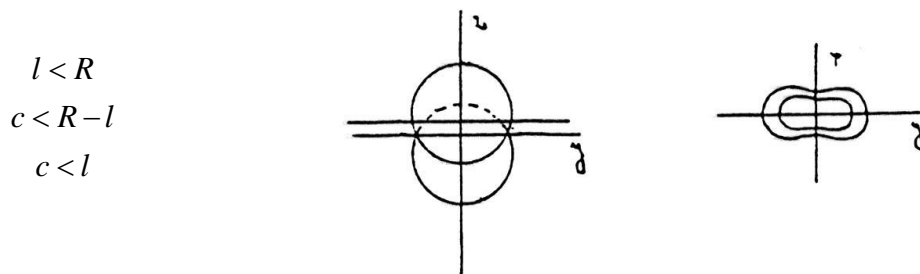
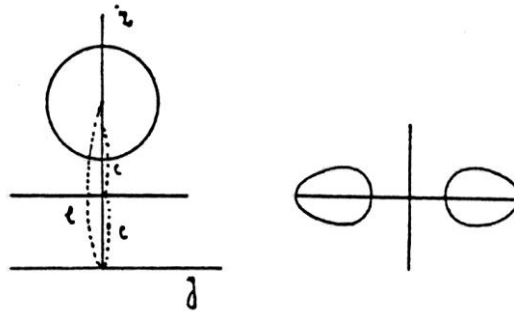


Figura 9ª

Así, las curvas de Cassini admiten las formas siguientes:

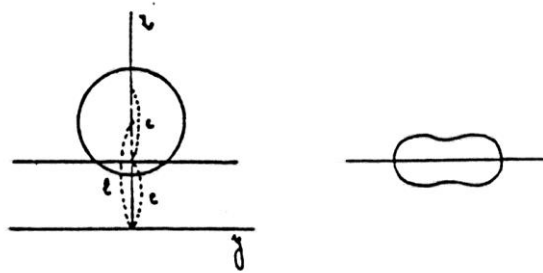
Caso 1°
 $l > 2c$
 $c = R$



Ovalos
de Cassini

Figura 10ª

Caso 2°
 $2c > l > c$
 $c = R$

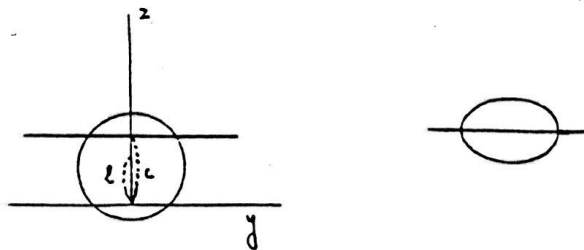


Caso 2°
en las
espéricas

Figura. 11ª

Ahora bien; veamos como las cassínicas pueden considerarse caso particular de las espéricas.

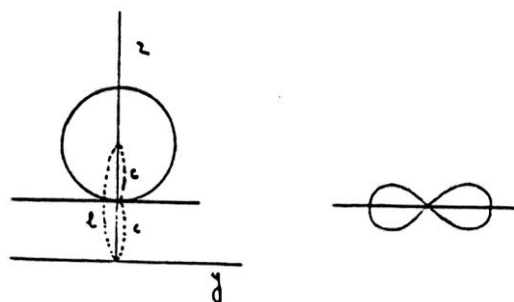
Caso 3°
 $l = c$
 $c = R$



Elipse
de
Cassini

Figura 12ª

Caso 4°
 $l = 2c$



Lemniscata
de
Bernoulli

Figura 13ª

En efecto; al designar por M (fig.14) el punto generador de la curva, se admite para las cassínicas que $MF \times MF' = a$, siendo a una cantidad determinada.

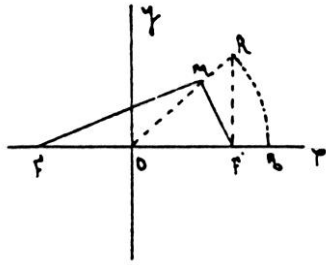


Figura. 14^a

Los puntos F y F' son fijos y suelen tomar el nombre de focos; el eje y pasa por el punto medio de FF' , siendo los ejes rectangulares y la recta FF' el eje de las abscisas.

Fácilmente se comprende que la igualdad anterior se transforma en:

$$\sqrt{(l-x)^2 + y^2} \times \sqrt{(l+x)^2 + y^2} = a$$

Siendo $oF = oF' = l$, de donde:

$$(x^2 + y^2 + l^2)^2 = a^2 + 4l^2x^2$$

luego si $a^2 = 4l^2c^2$, resulta

$$(x^2 + y^2 + l^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2)$$

Al comparar esta ecuación con [3] resultan iguales al suponer $R = c$, luego las cassínicas no son sino un caso particular de las espíricas, para lo cual se requiere que el plano secante en el toro se halle del eje de revolución a una distancia igual al radio de la circunferencia generadora de dicho toro.

Así resultan los cuatro casos indicados correspondientes a los óvalos de Cassini, y en particular, la lemniscata de Bernoulli, cuando el plano secante es tangente a la superficie del toro por la parte inferior. Además, cuando se estudia directamente la lemniscata de Bernoulli, se encuentra que es un caso particular de la lemniscata hiperbólica. En efecto, para ello supongamos la distancia focal FF' expresada por $2e$ y el producto de los vectores MF y MF' , igual al cuadrado de la mitad de la distancia focal, como suele admitirse $e = oF = oF'$.

Así, la ecuación será:

$$\sqrt{y^2 + (e-x)^2} \times \sqrt{y^2 + (e+x)^2} = e^2$$

de donde

$$(y^2 + x^2 + e^2 - 2ex)(y^2 + x^2 + e^2 + 2ex) = e^4$$

o sea

$$\begin{aligned} & (y^2 + x^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2 = e^4 \\ [4] \quad & (y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = 0 \\ & (y^2 + x^2)^2 = 2e^2(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Es de ver que esta ecuación corresponde con la lemniscata hiperbólica

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

en el caso de $a^2 = b^2 = 2e^2$. Esto indica la importancia que debe concederse a la lemniscata hiperbólica para deducir de ella consecuencias, obteniéndose de momento

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad [4']$$

para la lemniscata de Bernoulli.

Veamos, pues, cuales son las principales propiedades de la lemniscata hiperbólica.

1º.- La lemniscata hiperbólica es la podaria central de la hipérbola dada por la ecuación

$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$$

Para hallar un punto de la podar hemos de tomar las ecuaciones de la tangente a la hipérbola y luego la perpendicular a ella desde el centro u origen de coordenadas, de donde resulta inmediatamente:

$$Y - y = \frac{a^2x}{b^2y}(X - x) \quad Y = -\frac{b^2y}{a^2x}X$$

o sea

$$Yyb^2 - Xxa^2 = -a^2b^2 \quad Ya^2x = -b^2yX$$

Estas ecuaciones quedan satisfechas por

$$x = \frac{b^2X}{X^2 + Y^2} \quad y = \frac{-a^2Y}{X^2 + Y^2} \quad [D]$$

luego las coordenadas (X,Y) corresponden a la podaría de la hipérbola de coordenadas (x,y). Mas al substituir en la ecuación de la hipérbola

$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$$

los valores (D), se obtiene:

$$\frac{a^2 b^4 X^2}{(X^2 + Y^2)^2} - \frac{-b^2 a^4 Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} = a^2 b^2$$

de donde

$$b^2 X^2 - a^2 Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$$

Ecuación de la lemniscata hiperbólica; luego la lemniscata hiperbólica es la podaria de la hipérbola en general.

Si se considera la hipérbola equilátera obtendríamos, como podaria suya, la lemniscata de Bernoulli. En efecto, al suponer en las fórmulas anteriores $a = b$, resulta:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (X^2 + Y^2)^2 = a^2 (X^2 - Y^2)$$

Esta última ecuación es la que hallamos ya para la lemniscata de Bernoulli.

2ª.- *La lemniscata de Bernoulli es la figura inversa de la hipérbola equilátera, o sea la que se obtiene por radios vectores recíprocos de esta última.*

En efecto, de $x^2 - y^2 = a^2$, se deduce:

$$\rho^2 \cos 2\theta = a^2 \quad \rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

La ecuación de la lemniscata es: $\rho_1 = a \sqrt{\cos 2\theta_1}$ al pasar la ecuación [4'] a ejes polares, luego en la dirección de un mismo vector se tiene:

$$\rho \rho_1 = a^2$$

Principio fundamental de las figuras determinadas por radios vectores recíprocos.

Por último vamos a ocuparnos de la longitud de un arco de lemniscata de Bernoulli, en función de la gamma de Euler, de las integrales elípticas y de las sigmas de Weierstrass.

Empecemos por hacer algunas consideraciones acerca de la ecuación [4]. Al pasar esta ecuación a coordenadas polares se tiene:

$$\rho^2 = 2e^2 \cos 2\theta$$

de donde

$$\rho = e \sqrt{2 \sqrt{\cos 2\theta}} \quad [c]$$

Ahora, si en el punto F de la última figura levantamos una perpendicular a FF' , igual a e , y trasladamos el punto R a Q por medio de un arco de circunferencia de centro O , cabra escribir:

$$OQ = e\sqrt{2} = a$$

y entonces la ecuación [c] se reduce a

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

siendo Q el punto donde la curva corta al eje polar, o sea al eje x primitivo.

Hay autores que suponen $e = 1$, y de esta suerte se alcanza otra forma de dicha curva:

$$\rho = \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\theta}$$

Según la fórmula hallada

$$\rho = \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\theta}$$

se comprende que al variar θ de 0 a $\frac{\pi}{4}$, el radio vector varia de $\sqrt{2}$ a 0, dando un cuarto de lemniscata. Luego la expresión de dicho arco es

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$$

y como

$$\rho' = -\sqrt{2} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

resulta

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

si $\varphi = 2\theta$, se obtiene

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \varphi d\theta$$

Por último al suponer $\varphi = r$, se deduce fácilmente

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 z^{\frac{1}{2}-1} (1-z^2)^{\frac{1}{2}-1} dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

Este resultado representa el valor de la cuarta parte de la lemniscata, siendo el valor total

$$s_1 = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad [\alpha]$$

Esta fórmula cabe reducirla, sabiendo que

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

de donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi \quad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Al sustituir este valor en $[\alpha]$ se obtiene:

$$s_1 = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

Si nos refiriéramos a un arco cualquiera, tendríamos que acudir a la integral elíptica de primera especie como método general. En efecto, al partir de

$$s = \sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

y al suponer

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi$$

se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{I}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \varphi \quad \cos \theta d\theta = \frac{I}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi \quad d\varphi = \frac{I}{\sqrt{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{I - \frac{I}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = I - 2 \operatorname{sen}^2 \theta = I - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \cos^2 \varphi$$

luego

$$s = \sqrt{2} \int_0^\varphi \frac{\frac{I}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{I - \frac{I}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi} \cos \varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{I - \frac{I}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Integral elíptica de primera especie de módulo $K = \frac{I}{\sqrt{2}}$ y siendo $K = \operatorname{sen} \theta$, como indican muchos autores, para formar las tablas de valores resulta $\theta = 45^\circ$.

Por último, puede relacionarse s con las funciones de Weierstrass. Representemos en este caso la ecuación de la lemniscata que estudiamos conforme la notación de Appell, por

$$r = \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\theta}$$

fórmula que ya hemos hallado, de donde resulta

$$dr = \sqrt{2} \frac{-\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \quad \frac{d\theta}{dr} = -\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2} \operatorname{sen} 2\theta}$$

luego al aplicar las fórmulas generales

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = dr \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 r^2}$$

se obtiene

$$ds = dr \sqrt{1 + \frac{\cos^2 2\theta}{\operatorname{sen}^2 2\theta}} = \frac{dr}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^4}{4}}} = \frac{2dr}{\sqrt{4 - r^4}}$$

Al integrar

$$s = \int_0^r \frac{2dr}{\sqrt{4 - r^4}} \quad \text{si} \quad r = \sqrt{\frac{I}{2}}$$

se deduce

$$s = - \int_I^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}}$$

Si comparamos este resultado con la fórmula general

$$\int_I^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

cabe suponer

$$g_2 = 1, \quad y \quad g_3 = 0$$

luego, según la notación de Weierstrass, se tiene

$$z = p(s, 1, 0) = \frac{1}{r^2}$$

Veamos ahora como puede darse interpretación geométrica a las nuevas funciones de Weierstrass

$$\frac{\sigma_1(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sigma_2(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sigma_3(s)}{\sigma(s)}$$

para cuando $g_2 = 1$ y $g_3 = 0$

Sabido es que

$$4 \left(z^3 - \frac{g_2}{4}z - \frac{g_3}{4} \right) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

y en el caso particular que estudiamos

$$4 \left(z^3 - \frac{z}{4} \right) = 4z \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) = 0$$

resulta

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -\frac{1}{2}$$

Además, como quiera que se tiene, en general,

$$\sqrt{pu - e_1} = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}, \quad \sqrt{pu - e_2} = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}, \quad \sqrt{pu - e_3} = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}$$

al aplicar estas fórmulas al caso de que tratamos, resulta:

$$\sqrt{z - \frac{I}{2}} = \sqrt{p(s, I, 0) - \frac{I}{2}} = \sqrt{\frac{I}{r^2} - \frac{I}{2}} = \sqrt{\frac{2-r^2}{2r^2}} = \frac{\sqrt{2-2\cos 2\theta}}{r\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{r} = \frac{\sigma_1(s)}{\sigma(s)}$$

De un modo análogo se obtiene

$$\frac{I}{r} = \frac{\sigma_2(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{r} = \frac{\sigma_3(s)}{\sigma(s)}$$

Por último, podemos poner en relación las diferentes fórmulas halladas respecto a la lemniscata de Bernoulli.

Hemos obtenido

$$s_1 = \frac{\Gamma^2\left(\frac{I}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

para la longitud de toda la lemniscata.

Ahora, según las tablas de las gammas, se tiene:

$$\Gamma\left(I + \frac{I}{4}\right) = \frac{I}{4} \Gamma\left(\frac{I}{4}\right) = 0,906402$$

de donde

$$\Gamma^2\left(\frac{I}{4}\right) = 4^2 \cdot 0,906402^2$$

y como

$$\sqrt{\pi} = 1,772$$

para un cuarto de lemniscata resulta,

$$s = \frac{4 \times (0,906402)^2}{1,772} = 1,854$$

Al utilizar la integral elíptica de primera especie, para este caso, conforme hemos hallado

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{I - \frac{I}{2}\sin^2\varphi}}$$

debemos considerar $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$, correspondiente a un ángulo de 45° , y $\varphi = 90^\circ$ deducido de la fórmula:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Las tablas calculadas por Legendre, Bertrand, Hoüel, etc., dan el mismo valor calculado anteriormente hasta milésimas, esto es: $s = 1,854$.

Si supusiéramos una parte cualquiera de arco, por ejemplo, el correspondiente a $\theta = 15^\circ$, resulta:

$$op = \sqrt{2} \sqrt{\cos 30^\circ} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} = r = 1,316$$

valor inferior al que corresponde a

$$OQ = r_1 = \sqrt{2} = 1,414$$

Al consultar la tabla de valores de las integrales elípticas de primera especie, para

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} 45^\circ \quad \text{y} \quad \varphi = 21^\circ 28'$$

siendo este último valor deducido de $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi$, para $\theta = 15^\circ$, da, aproximadamente, como expresión de s ,

$$s = 0,3786$$

Así, en definitiva, según la fórmula anteriormente supuesta $r = \sqrt{\frac{1}{z}}$, se obtiene:

$$z = \frac{1}{r^2} = 0,577 = p(s, 1, 0) = p(0,3786, 1, 0)$$

Por fin, si se consideran las fórmulas de Weierstrass

$$\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta}{r} = \frac{\sigma_1(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\sigma_2(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{r} = \frac{\sigma_3(s)}{\sigma(s)}$$

ellas permiten relacionar un arco s de lemniscata con los valores de las coordenadas polares que le corresponden, o sea con r y θ .

Las secciones torales consideradas solo se refieren al caso de que sea la meridiana de la superficie toral una circunferencia, y los planos de sección paralelos al eje de revolución, de suerte que fácilmente se comprende la importancia que debe adquirir este problema cuando varíe la curva meridiana, así como la dirección de los planos secantes. Campo de investigación precioso para los verdaderos amantes de la ciencia matemática, cuyos frutos deberán juntarse con los que se vienen desarrollando desde la más remota antigüedad.

Barcelona, abril-mayo 1913

Lauro Clariana Ricart