Origen de la curva pseudo – astroide

1914

En la obra alemana de Prym y Rost se determina la ecuación de Poisson fundándose en el círculo, dándonos ello a comprender que bien podían establecerse relaciones entre puntos interiores y exteriores del mismo, y en el supuesto de que si los puntos interiores hacían referencia a una curva determinada, podía obtenerse otra relacionada con la primera por la parte exterior; así, al admitir la misma relación de puntos interiores y exteriores que sirvió para establecer la ecuación de Poisson, vimos que, dada la astroide como curva interior, resultaba otra exterior, la cual nos atrevemos a designar bajo el nombre de ***pseudo-astroide*** por la semejanza que guarda con la primera, constituyendo su estudio el principal objetivo del presente trabajo.

Para mayor claridad, consideramos importante empezar por dar a conocer en términos generales la familia de las astroides, antes de emprender el estudio de la curva *pseudo-astroide*, lo cual servirá para comprender mejor la semejanza que guarda esta última curva con la verdadera astroide referida al círculo.

Varios son los procedimientos que se conocen para engendrar la astroide, siendo los más importantes los que a continuación indicamos:

1º *La curva envolvente de una recta de longitud constante k, que se mueve apoyándose sobre dos rectas perpendiculares, llámase astroide.*

En efecto; si se toman por ejes coordenados las dos rectas entre las cuales se mueve la propuesta, la ecuación de la recta móvil será

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mathrm{I}$$

designando por *a* y *b* las longitudes interceptadas por la recta a partir del origen en cada uno de los ejes coordenados, cantidades que se sujetan a la condición

$$a^2+b^2=k^2$$

en el concepto de que sea *k* la longitud de la recta móvil. La diferenciación, según *a* y *b* de las ecuaciones anteriores, da

$$\frac{xda}{a^2}+\frac{ydb}{b^2}=0, \qquad ada+bdb=0$$

de donde

$$da=-\frac{bdb}{a}, \qquad -\frac{x}{a^2}\frac{bdb}{a}+y\frac{db}{b^2}=0$$

o sea

$$\frac{x}{a^3}=\frac{y}{b^3}$$

igualdad que nos permite realizar las transformaciones siguientes:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{a}{b}, \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{2}}=\frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{v^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{k^2}{b^2}$$

De un modo análogo,

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{k^2}{a^2}$$

En su virtud, se tiene

$$b=\frac{k\,y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad a=\frac{k\,x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación primitiva,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\mathrm{I}$$

se obtiene

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{k}+\frac{y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{k}=\mathrm{I}$$

de donde

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=k$$

o sea

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$$

ecuación de la astroide.

2º Determinemos ahora la envolvente a las elipses representadas por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k-a)^2}=\mathrm{I} \qquad [\alpha]$$

lo cual supone que la suma de los semiejes de las diferentes elipses es una cantidad constante *k*; al relacionar este caso con el anterior, equivale a suponer que en el movimiento de la recta *k* sobre los ejes cada punto de ella describe una de las elipses anteriores.

Veamos, pues, como la envolvente de dichas elipses, así como de las diferentes posiciones de la recta *k*, es la misma astroide. En efecto, al derivar según *a* la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{(k-a)^3}=0$$

de donde

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{k-a}{a}, \quad \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\frac{k-a}{k}, \quad \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{k}, \quad (k-a)^2=\frac{k^2y^{\frac{4}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}, \quad a^2=\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}$$

Al sustituir estos valores en [α] se obtiene:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}{k^2}+\frac{y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}{k^2}=\mathrm{I}$$

luego

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$$

Igualdad que nos da la misma ecuación hallada anteriormente correspondiente a la astroide.

3º Otro punto de vista importante existe para la generación de la astroide, el cual consiste en considerarla como una curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija exterior a ella y de radio cuatro veces mayor que la móvil.

En efecto, en el estudio de las epicicloides se encuentra para las coordenadas de un punto de la epicicloide referida a ejes rectangulares, las siguientes ecuaciones:

$$x=(a+b)\cos\theta-h\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

$$y=(a+b)\operatorname{sen}\theta-h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta$$

como fácilmente cabe deducirlas de la adjunta *figura 1ª*, siendo

$$ACB=\theta,\quad CB=a,\quad OB=b,\quad OM=h,\quad CN=x,\quad MN=v,\quad AB=BQ$$

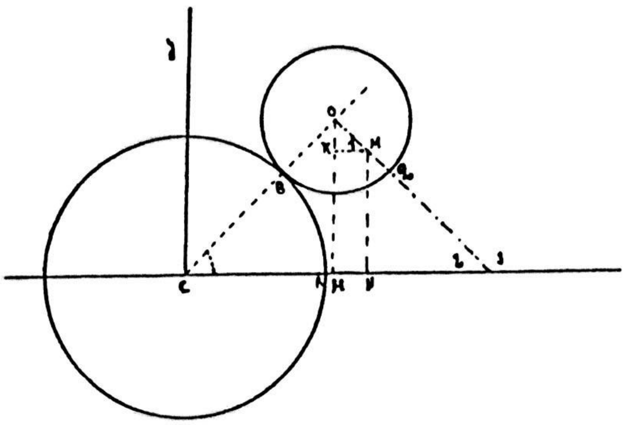

Figura. 1ª

de donde

$$QOB=\frac{a}{b}\theta;$$

$$\text{ang I}=\text{ang }2.$$

$$\text{ang }3=QOB+\theta=\frac{a}{b}\theta+\theta=\frac{a+b}{b}\theta$$

$$\operatorname{sen}2=\operatorname{sen}3=\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta=\operatorname{sen}\mathrm{I}$$

$$\cos 2=-\cos 3=-\cos\frac{a+b}{b}\theta=\cos\mathrm{I}$$

$$x=CH+HN$$

$$y=OH-OK$$

Ahora, para pasar a la hipocicloide que consideramos, basta suponer en las fórmulas anteriores:

$$h = b = -\frac{a}{4}$$

resultando

$$x = \frac{3}{4} a \cos\theta + \frac{a}{4} \cos 3\theta$$

$$y = \frac{3}{4} a \,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{a}{4} \,\mathrm{sen}\, 3\theta$$

y como según la Trigonometría se tiene:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \mathrm{sen}\,3\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\theta$$

al sustituir estos valores en las igualdades anteriores se obtiene:

$$x = \frac{3}{4} a \cos\theta + \frac{a}{4}\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) = a\cos^3\theta$$

$$y = \frac{3}{4} a \,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{a}{4}\left(3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\theta\right) = a\,\mathrm{sen}^3\theta$$

de donde

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\theta; \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \mathrm{sen}^2\theta, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \mathrm{I}$$

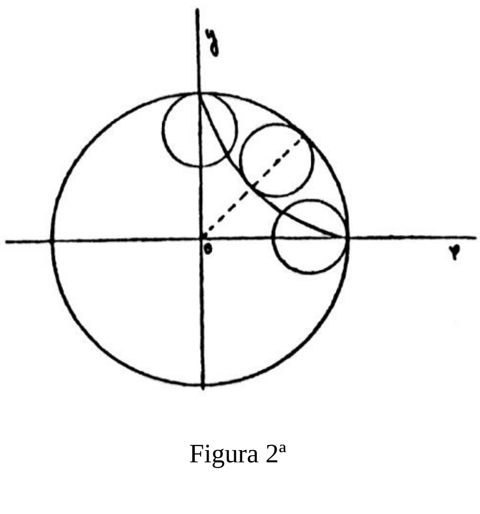

Figura 2ª

o sea

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

y si $a = k$, se tiene definitivamente

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

ecuación de la astroide, según se manifiesta en la adjunta *figura 2º*

No son estos los únicos puntos de mira que pueden considerarse para la generación de la astroide, pues los trabajos de Bispal, Braseine, Lemoine, etc., expresan diferentes conceptos que pueden considerarse referentes al mismo asunto.

CONSECUENCIAS IMPORTANTES DEDUCIDAS DE LA CURVA ASTROIDE

1ª *La evoluta de la astroide es otra astroide del mismo centro e inscripta en un círculo de radio doble del que corresponde a la astroide dada y a ángulos de 45° respecto a los puntos de retroceso de una y otra astroide.*

Para probar este principio recordemos las fórmulas generales que determinan las coordenadas de un punto de la evoluta correspondiente a una línea dada cualquiera.

Sabido es que al hallar la primera y segunda derivada, según x, de la ecuación del círculo

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

se deducen para α y β las coordenadas de un punto de la evoluta correspondiente a un punto x é y de la evolvente; en efecto, de

$$(x-\alpha)+(y-\beta)y'=0 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{I}+y'^2+(y-\beta)y''=0$$

se deduce

$$\alpha = x+(y-\beta)y' \qquad \beta = y+\frac{\mathrm{I}+y'^2}{y''}$$

Al tomar y' e y'' de

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

se obtiene

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad y'' = -\frac{\mathrm{I}}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{xy'-y}{x^2}$$

luego

$$\beta = y + \frac{\mathrm{I} + y'^2}{y''} = y + \frac{\mathrm{I} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}{-\frac{\mathrm{I}}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{xy' - y}{x^2}}$$

y después de toda reducción se halla

$$\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

De un modo análogo se tiene

$$\alpha = x + (y - \beta) y' = x + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

Y como las ecuaciones

$$x = k \operatorname{sen}^3 t \quad \text{e} \quad y = k \cos^3 t \;^{(*)}$$

(*) Interesa hacer algunas aclaraciones respecto al ángulo *t*. Si diferenciamos las ecuaciones:

$$x = k \operatorname{sen}^3 t \qquad \text{y} \qquad y = k \cos^3 \mathrm{t}$$

resulta:

$$dx = 3 \operatorname{sen} k^2 t \cos t \, dt, \qquad \mathrm{d}y = -3k \cos^2 t \operatorname{sen} t \, dt$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t$$

Según la *figura 3ª*, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t = \operatorname{tg} \mathrm{I} = -\operatorname{tg} 2 = -\cot 3$$

luego

$$t = 3$$

Esto nos indica que el ángulo *t* hace referencia al formado en todos los casos por la normal a la curva que pasa por el punto de contacto con el eje *x*;

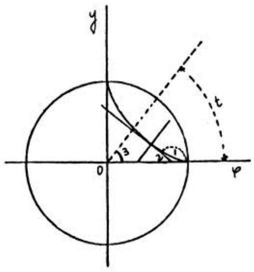

Figura. 3ª

Por consiguiente, para tener los diferentes valores de *t* basta suponer rectas que salgan del origen perpendiculares a las respectivas tangentes a la astroide.

satisfacen a la ecuación de la astroide, resulta

$$\beta = k\cos^3 t + 3k\,\mathrm{sen}^2 t\cos t \qquad \alpha = k\,\mathrm{sen}^3 t + 3k\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t$$

Si adoptamos ahora por nuevos ejes las bisectrices de los primeros, según la Geometría Analítica, se tiene:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - y_2), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + y_2) \qquad [a]$$

fórmulas generales de transformación de ejes rectangulares en otros también rectangulares. En efecto, de:

$$x = x_2\cos\alpha_1 - y_2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

$$y = y_2\cos\alpha_1 - x_2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

siendo $\alpha_1 = 45^{\circ}$ y $\mathrm{sen}\,\alpha_1 = \cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, resultan las fórmulas [*a*]

Interesa determinar x_2 é y_2, siendo *x* e *y* las coordenadas α y β de un punto de la evoluta que se busca (*Figura* 3'ª). Así, pues, se tiene:

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \qquad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$$

Al sustituir por x e y los valores hallados de α y β, se obtiene:

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}k\left[\mathrm{sen}\,t + \cos t\right]^3 = 2k\left(\mathrm{sen}\,t\cos\frac{\pi}{4} + \cos t\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)^3 = 2k\,\mathrm{sen}^3\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}k\left[\cos t - \mathrm{sen}\,t\right]^3 = 2k\left(\cos t\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)^3 = 2k\cos^3\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

y si suponemos

$$t_1 = t + \frac{\pi}{4}$$

resulta

$$x_2 = 2k\,\mathrm{sen}^3 t_1 \qquad y_2 = 2k\cos^3 t_1$$

lo cual nos indica que la evoluta de la astroide es otra astroide correspondiente a un círculo de radio doble respecto al primero, suponiendo luego que la astroide evoluta sufra un giro de 45°, tal como se manifiesta en la *Figura* 3'ª

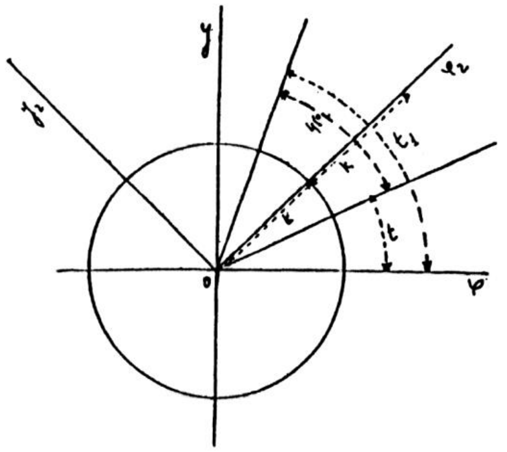

Figura. 3’ª

Empero antes de dejar de ocuparnos en términos generales de la astroide, digno de mención es indicar la facilidad con que puede obtenerse el área correspondiente a dicha curva, mediante las funciones circulares, ocupándonos, por último, también de la rectificación de un arco de la misma. Según elementos de cálculo integral, se tiene para el área:

$$A = \int y dx = \int_0^x \sqrt{\left(k^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}\, dx$$

de la cual se deduce, suponiendo

$$x^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}} t^2 \qquad \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = 2k^{\frac{2}{3}} t\, dt \qquad dx = 3x^{\frac{2}{3}}\, k^{\frac{2}{3}}\, t\, dt = 3k^{\frac{2}{3}}\, t\, k^{\frac{2}{3}}\, t\, dt = 3k\, t^2 dt$$

de donde

$$A = \int_0^t 3k^2 \sqrt{\left(\mathrm{I} - t^2\right)^3}\, dt$$

Para determinar fácilmente esta integral, correspondiente a un cuadrante, supondremos:

$$t = \operatorname{sen} \varphi, \qquad dt = \cos \varphi\, d\varphi, \qquad t = \mathrm{I}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad t = 0, \qquad \varphi = 0$$

$$A = 3k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi = 3k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \left(\mathrm{I} - \cos^2 \varphi\right) d\varphi = 3k^2 \left[\frac{3}{4}\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\right]\frac{\pi}{2} = \frac{9k^2}{6.4.2}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}\pi k^2$$

Para el área total multiplicaremos por 4, de donde:

$$A = \frac{3}{8}\pi k^2$$

siendo k el radio de la circunferencia que pasa por los cuatro puntos de retroceso de la astroide.

Más sencillo resulta el problema de la rectificación. En efecto, según fórmula de cálculo integral, se tiene:

$$s = \int_0^x \sqrt{\mathrm{I} + y'^2}\, dx$$

Aplicándola al caso que nos ocupa, resulta:

$$s = \int_0^x \sqrt{\mathrm{I} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\, dx = \int_0^x \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}\left(k\, x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

Luego, como indica el matemático Teixeira, el cubo de la longitud del arco de astroide, comprendido entre los puntos (o,k) y (x,y), es proporcional al cuadrado de la abscisa x.

CURVAS RELACIONADAS CON LA ASTROIDE

1º Curvas paralelas a la astroide:

Llámanse curvas paralelas, en general, a otra curva cualquiera, las obtenidas tomando sobre las normales a ésta en uno u otro sentido, segmentos de longitud constante h, de suerte que al aplicar este principio a la astroide

$$x = l \operatorname{sen}^3 t \qquad y = l \cos^3 t$$

se pueden deducir para las coordenadas de un punto de la curva paralela a la astroide, siendo h la porción de normal que se toma, las fórmulas siguientes

$$x = l \operatorname{sen}^3 t + h \cos t \quad e \quad y = l \cos^3 t + h \operatorname{sen} t$$

según se deduce inmediatamente de la *figura 3ª*.

Notables son las consecuencias que se deducen de estas ecuaciones junto con sus derivadas.

2º Al generalizar la ecuación de la astroide cabe escribir.

$$x = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \mathrm{I} \qquad (1)$$

Fácilmente se deduce para la ecuación de la tangente a la curva la expresión

$$Y = -\left(\frac{b^2 y}{a^2 x}\right)^{\frac{2}{3}} X + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

y como quiera que los puntos de intersección de esta tangente con los ejes son

$$\left(o, b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{y} \quad \left(a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, o\right)$$

al considerar las coordenadas de un punto expresadas por

$$x_1 = a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}} \qquad y_1 = b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}$$

y en el concepto de que ***x*** é ***y*** satisfagan a [**1**], se obtiene

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \mathrm{I}$$

ecuación de una elipse que es fácil construir por lo que precede, la cual pasa por los cuatro puntos de retroceso de [**1**], y cuya curva primitiva designa el matemático Teixeira por evoluta de la elipse.

De un modo análogo se tiene que la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \mathrm{I} \qquad [2]$$

queda satisfecha por las expresiones

$$x = a\,Ch^3 t \qquad \text{é} \qquad y = b\,Sh^3 t$$

resultando la ecuación de la hipérbola equilátera:

$$Ch^2t - Sh^2t = \mathrm{I} \qquad [3]$$

por lo cual se considera [**2**] como evoluta de [**3**].

Por fin, notables son las relaciones íntimas que guardan dichas evolutas con las cruciformes y puntiformes, grupo de curvas más generales, estudiadas por Bellavitis bajo la denominación de tetracúspides.

Vamos a ocuparnos ahora de la curva que constituye el principal objetivo del presente trabajillo. Dicha curva la denominaremos pseudo-astroide, pues puede considerársela como una generalización de la astroide anteriormente estudiada.

En la célebre obra de Prym y Rost, últimamente publicada, al determinar la ecuación de Poisson se establece una relación entre puntos interiores y exteriores de un círculo bajo una razón constante. Así, pues, cabe suponer que los puntos interiores de una curva guarden relación con otra curva exterior.

Supongamos (*figura* 4ª) el punto *m* interior de coordenadas polares $(r = om, t = AOB)$, y se trata de hallar el punto M cuyas coordenadas polares serán $\left(\frac{R^2}{r} = OM,\ t = AOB\right)$.

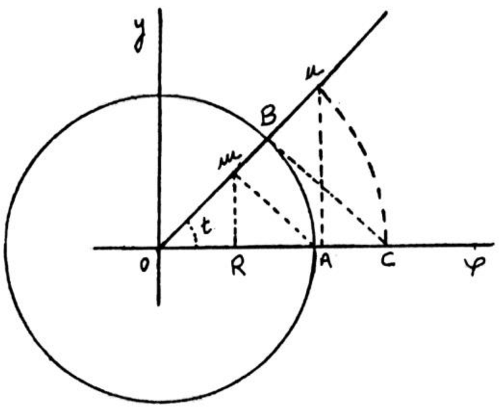

Figura. 4

En dicha *figura* se puede apreciar la construcción que debe realizarse para un punto, según la tercera proporcional $\left(\frac{R^2}{r} = OM\right)$.

Así, pues, si la curva interior es una astroide, puede trazarse por puntos mediante la construcción anterior la curva exterior, conforme se manifiesta en la *figura 5ª*.

En la *figura 6ª* puede apreciarse el conjunto que resulta entre las curvas astroides, su evoluta y la pseudo-astroide, trazadas en dos circunferencias cuya relación de radios es de 1:2

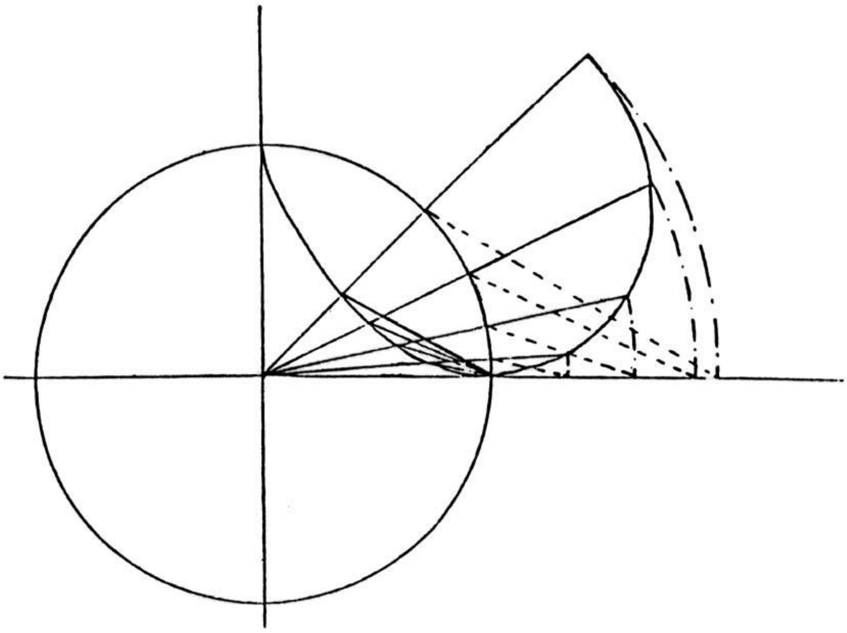

Figura. 5ª

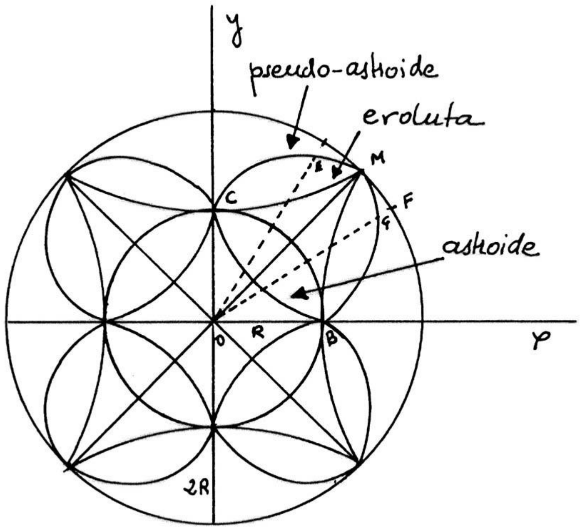

Figura.6ª

Hasta aquí no tenemos más consideraciones geométricas. Vamos a ocuparnos ahora de algunas expresiones analíticas importantes.

Hemos hallado para la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

luego al suponer $k = R$, resulta

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

cuya ecuación queda satisfecha por

$$x = R \operatorname{sen}^3 t \qquad \text{é} \qquad y = R \cos^3 t$$

conforme se ha indicado anteriormente.

Ahora bien, en la *figura 4ª*, al tomar las coordenadas de los puntos m y M, se deduce

$$r : \frac{R^2}{r} :: x : X$$

o sea

$$X = \frac{R^2}{r^2} x = \frac{R^2}{r^2} R \operatorname{sen}^3 t = \frac{R^3}{r^2} \operatorname{sen}^3 t$$

De un modo análogo

$$Y = \frac{R^3}{r^2} \cos^3 t$$

pero

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 \left(\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t \right)$$

de donde

$$X = R \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t} \qquad Y = R \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t}$$

$$\left(\frac{X}{R} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\operatorname{sen} t}{\left(\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t \right)^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(\frac{Y}{R} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\cos t}{\left(\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Elevando al cuadrado y sumando estas dos últimas igualdades, se obtiene la ecuación de la pseudo-astroide siguiente:

$$\left(\frac{X}{R} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{R} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\mathrm{I}}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t} \right)^{\frac{2}{3}} \qquad [4]$$

Si llamamos ρ al radio vector de la pseudo-astroide, se tiene:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \frac{R^2\left(\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t\right)}{\left(\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t\right)^2} = \frac{R^2}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t}$$

de donde

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t}} \qquad [5]$$

Luego si $t = 0$, resulta inmediatamente $\rho = R$, y si $t = \frac{\pi}{2}$, da también $\rho = R$. Además, si consideramos $t = \frac{\pi}{2}$, lo que supone:

$$\cos t = \operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{2}}$$

al substituir estos valores en [5] se obtiene

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{8} + \frac{\mathrm{I}}{8}}} = 2R = OM$$

Valor máximo del radio vector.

Esta curva *BMC* (*Figura* 6ª) es simétrica respecto a *OM*. En efecto, tomemos a ambos lados de *OM* la misma cantidad angular, por ejemplo, 15°; así se halla

$$FOB = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \qquad DOB = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

y los valores de ρ referidos al ángulo:

$$FOB = t = 30^\circ \quad \text{ó} \quad \text{al} \quad DOB = t = 60^\circ$$

resultan enteramente iguales, según la fórmula [**5**].

Para tener el coeficiente angular de la tangente en un punto de la curva, tomaremos las diferenciales de

$$X = R\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t} \qquad Y = R\frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t};$$

de donde

$$dY = R\frac{3\mathrm{sen}t\left(\cos^6 t+\cos^4 t-\cos^2 t\right)}{\left(3\cos^4 t-3\cos^2 t+\mathrm{I}\right)^2}dt$$

$$dX = -R\frac{3\cos t\left(\mathrm{sen}^6 t+\mathrm{sen}^4 t-\mathrm{sen}^2 t\right)}{\left(3\cos^4 t-3\cos^2 t+\mathrm{I}\right)^2}dt$$

en el concepto de que

$$\cos^6 t+\mathrm{sen}^6 t = 3\cos^4 t-3\cos^2 t+\mathrm{I} = 3\mathrm{sen}^4 t-3\mathrm{sen}^2 t+\mathrm{I}$$

Luego

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\mathrm{sen}t\left(\cos^6 t+\cos^4 t-\cos^2 t\right)}{\cos t\left(\mathrm{sen}^6 t+\mathrm{sen}^4 t-\mathrm{sen}^2 t\right)}$$

o sea

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\cos^5 t+\cos^3 t-\cos t}{\mathrm{sen}^5 t+\mathrm{sen}^3 t-\mathrm{sen}t}$$

Este resultado representa el coeficiente angular de la tangente en un punto de la curva pseudo-astroide.

Fijemos sus valores, por ejemplo, en los puntos *B, M, C* de la *figura 6ª*. En *B* se tiene: $t=\frac{\pi}{2}$, luego $\frac{dY}{dX}=0$, y, por consiguiente, la tangente a la curva en dicho punto es el mismo eje *x*.

En *M* corresponde $t=\frac{\pi}{2}$, de donde $\frac{dY}{dX}=-1$, cuyo resultado indica que la tangente a la pseudo-astroide en este punto forma con el eje *x* positivo un ángulo de 135°, o sea, que dicha tangente es perpendicular al radio *OM* de la circunferencia correspondiente.

Por fin, en el punto *o*, como *t* = 0, se obtiene $\frac{dY}{dX}=-1$, lo cual nos dice que la tangente a la curva en dicho punto es precisamente el eje *y*.

Después de estas consideraciones generales acerca de la pseudo-astroide, pasemos a la determinación del área limitada por una porción de curva. La fórmula general que debe aplicarse es:

$$A = \frac{\mathrm{I}}{2}\int \rho^2 dt$$

Según lo que precede resulta:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \frac{R^2}{\operatorname{sen}^6 t + \cos^6 t} = \frac{R^2}{1 - 3\operatorname{sen}^2 t + 3\operatorname{sen}^4 t}$$

luego

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{R^2 dt}{1 - 3\operatorname{sen}^2 t + 3\operatorname{sen}^4 t} = \frac{R^2}{6}\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^4 t - \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{3}}$$

si

$$\operatorname{sen}^2 t = z, \qquad 2\operatorname{sen} t \cos t \, dt = dz, \qquad dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}\sqrt{1-z}}$$

Así, pues,

$$A = \frac{R^2}{12}\int \frac{dz}{\sqrt{z}\,\sqrt{1-z}\left[\frac{1}{3} - z + z^2\right]}$$

El trinomio $\frac{1}{3} - z - z^2$, puede descomponerse en:

$$\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{3}}\right)$$

luego

$$A = \frac{R^2}{12}\int \frac{dz}{\sqrt{z}\,\sqrt{1-z}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right]}$$

Al descomponer el quebrado en fracciones simples se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{z}\,\sqrt{1-z}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right]} = \frac{A}{\sqrt{z}} + \frac{B}{\sqrt{1-z}} + \frac{C_z + D}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} =$$

$$A\sqrt{1-z}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] + B\sqrt{z}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] + \sqrt{z}\,\sqrt{1-z}\,(Cz + D) = 1$$

$$z = 0 \qquad A = 3,$$

$$z = 1 \qquad B = 3,$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

Para este último valor resulta

$$C\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{D}{\sqrt{3}} = 1, \qquad \frac{C}{6}\sqrt{-1} = 0, \qquad C = 0, \qquad D = \sqrt{3}$$

Y al sustituir estos valores en la expresión de A, se obtiene

$$A = \frac{1}{12}\left[3\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + 3\int \frac{dz}{\sqrt{1-z}} + \int \frac{\sqrt{3}\,dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}\right] R^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz - \frac{1}{4}\int (1-z)^{-\frac{1}{2}} \times -dz + \frac{1}{12}\int \frac{\sqrt{3}\,dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}\right] R^2$$

Ahora, según la fórmula general de cálculo,

$$\int \frac{Cz+D}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\,dz = \frac{C}{2}\rho\left[(z-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{C\alpha+D}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{z-\alpha}{\beta}$$

al aplicarla al caso anterior en que

$$C = 0, \qquad D = \sqrt{3}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

resulta

$$A = \left[\frac{1}{4}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\frac{(1\text{-}z)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\right] R^2 = \left[\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1\text{-}z)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2z-1)\sqrt{3}\right] R^2$$

limitando ***z*** entre 0 y $\frac{I}{2}$, correspondientes a 0° y 45° de *t*, según $\operatorname{sen}^2 t = z$, resulta:

$$A = \frac{I}{2}\left(I + \frac{\pi}{3}\right)R^2$$

y para el área total

$$A = \frac{R^2}{2}\left(I + \frac{\pi}{3}\right)\times 8 = 4R^2\left(I + \frac{\pi}{3}\right)$$

Por último, vamos a ocuparnos de la rectificación; verdaderamente que sube de punto la dificultad cuando se trata de la rectificación de la curva pseudo-astroide; sin embargo, podemos indicar un medio para hallarla con bastante aproximación. La fórmula general es:

$$S = \int \sqrt{d\,X^2 + d\,Y^2} = \int \sqrt{\frac{9R^2 \operatorname{sen}^2 t\left(\cos^6 t + \cos^4 t - \cos^2 t\right)^2}{\left(3\cos^4 t - 3\cos^2 t + I\right)^4} + \frac{9R^2 \cos^2 t\left(\operatorname{sen}^6 t + \operatorname{sen}^4 t - \operatorname{sen}^2 t\right)^2}{\left(3\cos^4 t - 3\cos^2 t + I\right)^4}}\,dt$$

Al suponer

$$\operatorname{tg} t = z$$

resulta

$$\frac{dz}{I + z^2} = dt \qquad \operatorname{sen} t = \frac{z}{\sqrt{I + z^2}}, \qquad \cos t = \frac{I}{\sqrt{I + z^2}}$$

luego se tiene:

$$S = 3R \int \sqrt{\frac{\frac{z^2}{I+z^2}\left[\frac{I}{\left(I+z^2\right)^3} + \frac{I}{\left(I+z^2\right)^2} - \frac{I}{I+z^2}\right]^2 + \frac{I}{I+z^2}\left[\frac{z^6}{\left(I+z^2\right)^3} + \frac{z^4}{\left(I+z^2\right)^2} - \frac{z^2}{I+z^2}\right]^2}{\left[\frac{3}{\left(I+z^2\right)^2} - \frac{3}{I+z^2} + I\right]^4}} \times \frac{dz}{I+z^2}$$

Después de varias reducciones resulta:

$$S = 3R \int \sqrt{\frac{I - z^2 + z^4 + z^6 - z^8 + z^{10}}{\left(I - z^2\right)\left(I - z^2 + z^4\right)^4}} \times z\,dz$$

Si hacemos $z^2 = u$, se tiene $2z\,dz = du$, luego:

$$S = 3R\int \sqrt{\frac{\mathrm{I} - u + u^2 + u^3 - u^4 + u^5}{(\mathrm{I}-u)\left(\mathrm{I}-u+u^2\right)^4}}\,\frac{du}{2}$$

$$S = 3R\int \sqrt{\frac{\mathrm{I} - u + u^2 + u^3 - u^4 + u^5}{\mathrm{I} - 3\mathrm{u} + 6u^2 - 6u^3 + 3u^4 + 3u^5 - 6u^6 + 6u^7 - 3u^8 + u^9}}\,\frac{du}{2}$$

En el supuesto de tomar los valores de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{4}$, a fin de obtener la longitud de medio lazo de la pseudo-astroide, y según $z = \operatorname{tg} t = \sqrt{u}$, resultan para u los limites 0 y 1, de suerte que el radical anterior toma

$$\begin{aligned}&\text{para } u = 0, && \text{el valor } 1,\\ &\text{para } u = 0.5, && \text{el valor } 1.3,\\ &\text{para } u = 1, && \text{el valor } 1,\end{aligned}$$

valores que oscilan entre I y I,3. Así, pues, puede tomarse la media aritmética entre estos extremos, o sea I,I5, como valor constante entre los límites de la integral, sin gran error posible, resultando, en definitiva,

$$S = \frac{3}{2}\times 1{,}15Ru\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\times 1{,}15R = 1{,}725\times R$$

expresión muy aproximada del arco ***BGM***.

Podíamos haber seguido otro procedimiento para hallar el valor de *S*, simplificando el quebrado subradical, obteniendo por fin la expresión

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}}R = 1.8134R;$$

pero hemos preferido seguir el procedimiento indicado, atendida su brevedad, y puesto que su valor es muy próximo al verdadero.

Varias serían, seguramente, las propiedades que podían obtenerse de la curva que hemos designado bajo el nombre de pseudo-astroide; pero por lo que precede puede juzgarse de las dificultades a que las operaciones algorítmicas pueden dar lugar, presentándose, no obstante, para los verdaderos amantes de la Ciencia matemática un campo hermoso y fecundo de nuevas investigaciones interesantes.

Barcelona, 15 Mayo de 1914
Lauro Clariana Ricart